

Modeling of three-dimensional flow of the incompressible liquid in the diffuser turbulent boundary layer

V. M. Zubarev

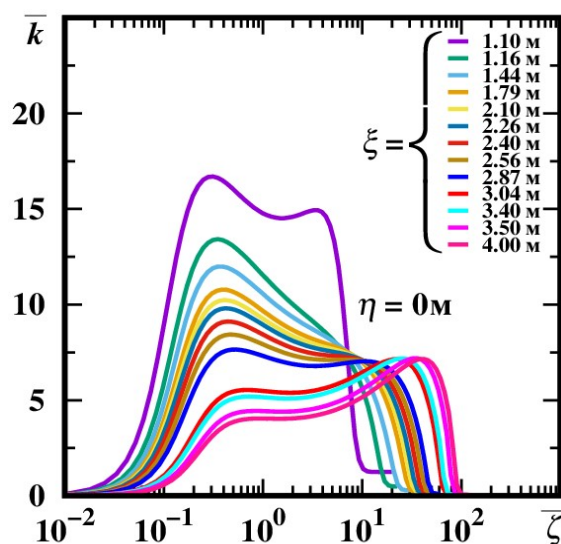
*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences
Moscow, 119526, Russia*

zubarev@ipmnet.ru

Abstract

Within the framework of the three dimensional boundary layer, the developed turbulent flow region of the incompressible liquid is modeled under the influence of the longitudinal unfavorable (positive) pressure gradient in the diffuser. For turbulent flow mode Navier–Stokes equations averaged by Reynolds in the boundary layer approximation are closed using the differential turbulence model based on the turbulent viscosity introduction and the Kolmogorov – Prandtl hypotheses. Correlation dependencies used for numerical modelling are found for the initial experimental data using the nonlinear least squares method. Calculated and experimental velocity profiles are compared in the region near separation. Based on the numerical solutions of turbulent boundary layer equations, the mechanisms of flows interaction are studied under the transverse pressure gradients in the incompressible liquid.

Key words: wall flow, three-dimensional boundary layer, turbulence, differential turbulence model, incompressible fluid, pressure gradients, diffuser.



Turbulence kinetic energy distributions across the boundary layer

УДК 532.526.4

Моделирование трехмерного течения несжимаемой жидкости в турбулентном пограничном слое диффузора

В. М. Зубарев

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Россия, Москва, 119526, просп. Вернадского, 101, корп. 1*

zubarev@ipmnet.ru

Аннотация

В рамках трехмерного пограничного слоя моделируется область развитого турбулентного течения несжимаемой жидкости в условиях воздействия продольного неблагоприятного (положительного) градиента давления (далее НГД) в диффузоре. Для турбулентного режима течения осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса в приближении пограничного слоя замыкаются с использованием дифференциальной модели турбулентности, основанной на введении турбулентной вязкости и гипотез Колмогорова–Прандтля. Нелинейным методом наименьших квадратов (НМК) для начальных данных эксперимента найдены корреляционные зависимости, которые были использованы далее при численном моделировании. Проведено сравнение расчетных и экспериментальных профилей скорости в области близкой к отрыву. На основе численных решений уравнений турбулентного пограничного слоя изучаются механизмы взаимодействия потоков при наличии поперечных градиентов давления в несжимаемой жидкости.

Ключевые слова: пристенное течение, пространственный пограничный слой, турбулентность, дифференциальная модель турбулентности, несжимаемая жидкость, градиенты давления, диффузор

1. Введение

В настоящем исследовании рассматриваются вопросы, связанные с обоснованием применимости используемой ранее двухпараметрической $k-\varepsilon$ модели турбулентности для решения задач гидромеханики. Модель *Myong–Kasagi* [1], учитывающая малые числа Рейнольдса вблизи стенки, успешно применялась в [2] при исследовании влияния параметров турбулентности набегающего потока (степени турбулентности Tu_∞ и масштаба L_∞) на ламинарно–турбулентный переход для течения над плоской пластиной при большой степени интенсивности турбулентности. В подтверждении обоснованности и, следовательно, надежности подобного подхода лежат проводимые сопоставления получаемых численных результатов с экспериментальными данными по динамическим характеристикам пограничного слоя в криволинейных каналах с градиентами давления, где возникают участки ускоренных и заторможенных течений с ненулевыми градиентами давления.

При моделировании турбулентности использовался модифицированный вариант дифференциальной $k-\varepsilon$ модели [1] для низких чисел Рейнольдса при исследовании характеристик течения, апробированный в [2, 3], который позволил непрерывно рассчитывать всю область течения от ламинарного до турбулентного режима. Некоторые детали и особенности модифицированных $k-\varepsilon$ групп моделей даны в обзоре на эту тему [4]. Эта модель с успехом применялась, как обеспечивающая наилучшее согласование с экспериментальными данными, для моделирования течения в трубе [5]. По словам авторов, она хорошо описы-

вает распределение осевой скорости в трубе и распределение кинетической энергии турбулентности в ядре потока, но дает несколько заниженные значения энергии турбулентности в пристенной области. Модель $k-\varepsilon$ Myong-Kasagi использовалась для анализа переходного колебательного пограничного слоя [6]. Данная нелинейная $k-\varepsilon$ модель широко применяется в технологических задачах [7, 8].

Пространственные пограничные слои могут учитывать переменность градиентов давления как в продольном, так и в поперечном направлениях в зависимости от вида исследуемого течения и наличия данных экспериментов, с которыми возможно провести сопоставление полученных расчетных результатов. Причем представленные там методы задания геометрий сложных тел показывают возможность их использования для исследования широкого ряда трехмерных течений в пограничных слоях.

2. Постановка задачи

Условная схема течения воспроизводится из эксперимента [9, 10] и приведена на рис. 1.

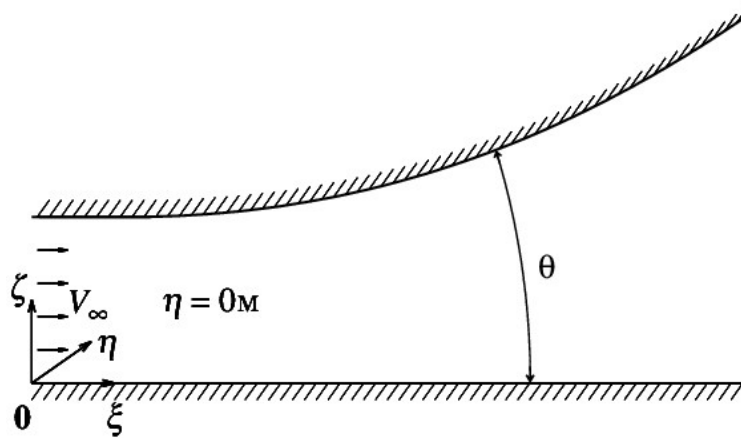


Рис. 1. Схема течения в диффузоре и система координат

Система уравнений для осредненных характеристик трехмерного квазистационарного пограничного слоя в потоке несжимаемой жидкости относительно системы координат ξ, η, ζ , связанной с плоской стенкой диффузора, представляется в виде [11, 12, 13]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial \xi} + w \frac{\partial u}{\partial \eta} + v \frac{\partial u}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\mu_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right], \\ u \frac{\partial w}{\partial \xi} + w \frac{\partial w}{\partial \eta} + v \frac{\partial w}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\mu_{\Sigma} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right], \\ \frac{\partial p}{\partial \zeta} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее обозначения совпадают с общепринятыми: уравнение неразрывности и два уравнения импульсов в проекции на оси ξ, η ; ξ – ориентированное по основному течению направление, η – поперечное направление, и ζ является нормальным направлением к стенке; μ_{Σ} – коэффициент полной (эффетивной) вязкости. Соответствующие компоненты скорости продольная, трансверсальная и нормальная будут u, w, v ; p – среднее статическое давление; ρ – плотность жидкости; ν – кинематический коэффициент молекулярной вязкости жидкости. Система (1) записана с учетом обычных предположений теории пограничного

слоя и в пренебрежении членами с нормальными напряжениями Рейнольдса. Статическое давление p считается функцией координат вдоль поверхности ξ и η .

Осредненные квазистационарные уравнения пространственного пограничного слоя для несжимаемой жидкости при развитом турбулентном режиме течения могут замыкаться с использованием дифференциальных моделей для характеристик турбулентности, основанных на применении различных гипотез и предположений. Используемый здесь подход основывается на введении турбулентной вязкости и применении гипотез Колмогорова – Прандтля [14–16]. Влияние вязкости на турбулентные пульсации в пристеночной области развитого турбулентного пограничного слоя и при малых локальных числах Рейнольдса и переходе в низкорейнольдсовых вариантах таких моделей учитывается введением соответствующих демпфирующих функций в коэффициенты уравнений переноса. Уравнения модели $k - \varepsilon$ модифицируются авторами таким образом, чтобы они были справедливы как в области больших чисел Рейнольдса вдали от твердых поверхностей, так и в низкорейнольдсовой пристеночной зоне. Модель турбулентности такой сложности впервые использована в [17]. Сравнение различных модификаций $k - \varepsilon$ модели, учитывающих сжимаемость и численные расчеты, например, проведены в работе [18].

Введение динамического коэффициента турбулентной (вихревой) вязкости μ_t с применением гипотезы Буссинеска о градиентном механизме переноса уже двух турбулентных напряжений Рейнольдса по направлениям ξ, η для $(-\rho \langle u'v' \rangle)$ и $(-\rho \langle w'v' \rangle)$

$$\tau_{1t} = -\rho \langle u'v' \rangle = \mu_t \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \tau_{2t} = -\rho \langle w'v' \rangle = \mu_t \frac{\partial w}{\partial \xi}$$

дает возможность представить полные (эффективные) напряжения трения по координатам вдоль поверхности (ξ, η) аналогично [14–16]

$$\tau_1 = \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} - \rho \langle u'v' \rangle = \mu_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \tau_2 = \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} - \rho \langle w'v' \rangle = \mu_\Sigma \frac{\partial w}{\partial \xi}$$

Здесь и далее нижний индекс t отмечает турбулентный режим; угловые скобки – знак осреднения по Рейнольдсу, штрих сверху обозначает флуктуационные (пульсационные) величины.

Введен полный динамический коэффициент вязкости μ_Σ

$$\mu_\Sigma = \mu + \mu_t$$

Граничные условия задаются на поверхности и внешней границе пограничного слоя

$$\begin{aligned} \zeta = 0: \quad u = 0, \quad w = 0, \quad v = 0, \\ \zeta \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow u_e, \quad w \rightarrow w_e \end{aligned}$$

Далее нижние индексы $\{ \}_e$ и $\{ \}_w$ относятся к значениям на внешней границе пограничного слоя и стенке.

Распределения продольной и поперечной составляющих скорости $u_e(\xi, \eta)$ и $w_e(\xi, \eta)$ предполагаются известными из решения соответствующих уравнений гидродинамики или из экспериментальных данных. В расчетах продольная составляющая скорости $u_e(\xi, \eta)$ задается по результатам измерений и аппроксимируется дробно–рациональной функцией. Следует заметить, что рассматривается трехмерное течение с ненулевой поперечной компонентой скорости $w \neq 0$, при этом учитывается зависимость функций от поперечной координаты η . Поперечная скорость w_e задается в самом общем виде формулой $w_e(\xi, \eta)$.

Начальные условия по продольной координате для профилей скорости u и w задаются в некоторой области, например, при $\xi = \xi_0$

$$u(\xi_0, \zeta) = u_{00}(\zeta), \quad w(\xi_0, \zeta) = w_{00}(\zeta)$$

3. Моделирование турбулентности

Для замыкания системы уравнений (1) используется двухпараметрическая $k-\varepsilon$ модель, для которой параметры турбулентности в набегающем потоке определяются интенсивностью турбулентности $(Tu_\infty)^2 = 10^4 \times 2k_\infty / (3V_\infty^2)$ (в %). Здесь кинетическая энергия турбулентности $k = 0.5 \langle u'_i u'_i \rangle$, полная скорость диссипации энергии турбулентности $\varepsilon_k = 0.5 \nu \langle (\partial u'_i / \partial x_j + \partial u'_j / \partial x_i)^2 \rangle = \varepsilon + D$ ($\varepsilon = \nu \langle (\partial u'_i / \partial x_j)^2 \rangle$ – ее изотропная часть) в тензорной записи $u_1 = u, u_2 = w, u_3 = v, x_1 = \xi, x_2 = \eta, x_3 = \zeta$.

Влияние вязкости на турбулентные пульсации при малых локальных числах Рейнольдса вблизи стенки развитого турбулентного пограничного слоя в разных $k-\varepsilon$ моделях учитывается путем введения демпфирующих функций в коэффициенты уравнений модели. Уравнения для кинетической энергии турбулентности k и изотропной части скорости ее диссипации ε трехмерного пограничного слоя в системе координат ξ, η, ζ имеют вид [16]

$$u \frac{\partial k}{\partial \xi} + w \frac{\partial k}{\partial \eta} + v \frac{\partial k}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\nu_{\Sigma, k} \frac{\partial k}{\partial \zeta} \right] + P_k - \varepsilon_k, \quad (2)$$

$$u \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\nu_{\Sigma, \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} \right] + P_\varepsilon - D_\varepsilon \quad (3)$$

Здесь в уравнениях (2)–(3) введены кинематические коэффициенты полных (эффективных) вязкостей $\nu_{\Sigma, k}, \nu_{\Sigma, \varepsilon}$, числа Прандтля $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$ для k и ε соответственно

$$\nu_{\Sigma, k} = \nu + \frac{V_t}{\sigma_k}, \quad \nu_{\Sigma, \varepsilon} = \nu + \frac{V_t}{\sigma_\varepsilon}$$

В уравнения переноса для применяемого варианта модели [1] введены члены P_k, P_ε , которые описывают процессы генерации в уравнениях для k и скорости изотропной части диссипации ε в явной форме. Кроме того, соответственно в уравнения для k и ε входит член со скоростью диссипации ε_k и слагаемое D_ε . Дополнительные слагаемые D, E (4) в уравнениях (2)–(3) низкорейнольдсовых $k-\varepsilon$ моделях турбулентности выражают влияние вязкости на диссипативные эффекты вблизи стенки и в областях с малыми локальными числами Рейнольдса.

$$P_k = \tau_{t1} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \tau_{t2} \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \quad \varepsilon_k = \varepsilon + D, \quad P_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{P_k \varepsilon}{k}, \quad D_\varepsilon = c_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + E \quad (4)$$

Кинематический коэффициент турбулентной вязкости V_t определяется по второй формуле Колмогорова – Прандтля с демпфирующей функцией f_μ [12]

$$v_t = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5)$$

Демпфирующая функция f_μ служит для уточнения величины v_t в формуле (5) около твердой поверхности. Отметим, что модель Myong – Kasagi [1] записана для полной скорости диссипации ε_k .

Функции f_μ, f_1, f_2 , соответственно, применяются в виде

$$f_\mu = \left(1 + \frac{3.45}{Re_t^{1/2}} \right) \left[1 - \exp \left(-\frac{\zeta^+}{70} \right) \right], \quad f_1 = 1, \quad D = 0, \quad E = 0,$$

$$f_2 = \left\{ 1 - \frac{2}{9} \exp \left[-\left(\frac{Re_t}{6} \right)^2 \right] \right\} \left[1 - \exp \left(-\frac{\zeta^+}{5} \right) \right]^2,$$

$$\text{Re}_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}, \quad \zeta^+ = \frac{u_* \zeta}{\nu}, \quad u^+ = \frac{u}{u_*}, \quad u_* = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}}$$

Демпфирующие множители модели турбулентности [1] f_μ, f_1, f_2 являются функциями от ζ^+ и Re_t . Функция f_μ , введенная в соотношение (5), корректирует уравнение при приближении к стенке. Известно [4, 19], что вблизи стенки $-\langle u'v' \rangle \propto \zeta^3$, $k \propto \zeta^2$ и $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_w = \text{const}$ (при $\zeta \rightarrow 0$), то из этого следует (6), что в данной модели f_μ будет изменяться как ζ^{-1} . Тогда $k-\varepsilon$ модель турбулентности [1] обеспечивает правильное асимптотическое поведение для $-\langle u'v' \rangle \propto \zeta^3$.

Константы модели, определяемой формулами (4)–(5), имеют следующие значения:

$$(c_\mu, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon) = (0.09; 1.4; 1.8; 1.4; 1.3)$$

На всей горизонтальной поверхности диффузора задаются граничные условия

$$\zeta = 0: \quad k_w = 0, \quad \varepsilon_w = \nu \frac{\partial^2 k}{(\partial \zeta)^2} \Big|_w$$

На внешней границе пограничного слоя выполняются условия

$$\zeta \rightarrow \infty: \quad k \rightarrow k_e(\xi, \eta), \quad \varepsilon \rightarrow \varepsilon_e(\xi, \eta)$$

Функции $k_e(\xi, \eta), \varepsilon_e(\xi, \eta)$ на внешней границе при заданных распределениях $u_e(\xi, \eta)$ и $w_e(\xi, \eta)$ численно определяются из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} u_e \frac{\partial k_e}{\partial \xi} + w_e \frac{\partial k_e}{\partial \eta} &= -\varepsilon_e, \\ u_e \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial \xi} + w_e \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial \eta} &= -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_e^2}{k_e} \end{aligned}$$

На участке границы, через которую жидкость поступает в расчётную область, т.е. при $\xi = \xi_0$, для скорости выставляются граничные условия $u = u_0(\zeta)$, $w_0 = 0$. Аналогично для кинетической энергии турбулентности $k = k_0(\zeta)$ и скорости диссипации $\varepsilon = \varepsilon_0(\zeta)$. Профили скорости $u_0(\zeta)$, кинетической энергии турбулентности $k_0(\zeta)$ (k рассчитывалась по результатам измерений среднеквадратичных пульсаций $\sqrt{\langle u'^2 \rangle}$, $\sqrt{\langle w'^2 \rangle}$, $\sqrt{\langle v'^2 \rangle}$) и скорости диссипации $\varepsilon_0(\zeta)$ в начальном сечении $\xi_0 = 1.04$ м брались из данных эксперимента [10] в 201 точках поперек слоя.

В плоскости симметрии диффузора ($\eta = 0$ м) скорость u , кинетическая энергия турбулентности k , скорость диссипации ε определяются из решения уравнений (1)–(3) при $\partial/\partial w = 0$ и $w = 0$.

Характеристики течений в трехмерном пограничном слое определяются численными методами расчета, основанными на неявной конечно-разностной схеме второго порядка точности по всем координатам. Для системы уравнений неразрывности, движения и модели турбулентности с граничными условиями использовалась неявная разностная схема на семиточечный шаблоне, которая решалась численно методом прогонки с итерациями. Молекула разностной схемы с односторонней аппроксимацией по ξ и η приводится в работе [13]. В расчетах применялась неравномерная ортогональная сетка соответственно по декартовым координатам $\xi, \eta, \zeta : 150 \times 100 \times 250$. Данные методы позволяют получить численные решения исходных систем нелинейных уравнений и на их основе изучить свойства турбулентных режимов течения в каналах с градиентами давления.

4. Результаты численных расчетов

Есть много реальных ситуаций с потоком (таких как на корпусах судна, крыльях самолета и тел вращения), где направленный по течению градиент давления становится все более и более неблагоприятным. В [9] систематизированы физические эксперименты, отобранные в качестве «эталонных» для исследования возможностей моделей турбулентности. В настоящей работе численно исследовалось трехмерное течение несжимаемой жидкости в турбулентном пограничном слое диффузора. В экспериментальных работах [9, 10] рассматривалось безотрывное течение в пограничном слое, развивающемся на гладкой стенке диффузора под воздействием увеличивающегося неблагоприятного градиента давления $p(\xi)$. Результаты приводятся для плоскости симметрии диффузора. Параметры эксперимента: рабочая секция была шириной 1 м и высотой 0.36 м. Измерения приведены в диапазоне $\xi = 1.04 \div 3.04$ м. В данном диапазоне эксперимента отрыва от стенок диффузора не происходит. Предполагается, что турбулентный пограничный слой остается полностью присоединенным к обтекаемой поверхности, то есть поверхностное трение не достигает нулевого значения и не образуются зоны вязкого отрыва. Число Рейнольдса вверх по течению в входном сечении было $Re_\infty = 1.76 \times 10^6$. Невязкий основной поток был однороден в ± 0.7 % и интенсивность турбулентности свободного потока была мала и составляла в эксперименте $Tu_\infty = 0.3$ %. В расчетах влияние параметра Tu_∞ не учитывалось. Турбулентность в набегающем потоке считается пренебрежимо малой.

После обезразмеривания задача определяется параметрами набегающего потока: Re_∞ , L_∞, V_∞ . В качестве характерных параметров в расчетах и в эксперименте была взята длина $L_\infty = 1$ м (как в эксперименте), модуль скорости потока в бесконечности был определен таким $V_\infty = 0.2226 \times 10^2$ м/с, число Рейнольдса $Re_\infty = V_\infty L_\infty / \nu$. Далее вводятся безразмерные величины (черта над величинами обозначает обезразмеривание по характерным параметрам)

$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{L_\infty}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{L_\infty}, \quad \bar{\zeta} = \frac{\zeta \sqrt{Re_\infty}}{L_\infty}, \quad \bar{u} = \frac{u}{V_\infty}, \quad \bar{w} = \frac{w}{V_\infty}, \quad \bar{v} = \frac{v \sqrt{Re_\infty}}{V_\infty},$$

$$\bar{k} = \frac{k \sqrt{Re_\infty}}{V_\infty^2}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon L_\infty}{V_\infty^3}, \quad \bar{v}_t = \frac{v_t}{\nu}$$

Расчеты проводились в области: $\xi = 1.04 \div 4.0$ м, $\eta = 0 \div 1.0$ м, $\zeta = 0 \div 0.75$ м.

4.1. Анализ экспериментальных данных

Численно получено с помощью алгоритма Левенберга–Марквардта для нелинейного метода наименьших квадратов, что следующая дробно–рациональная аппроксимация идеально описывает экспериментальные данные (скорость на внешней границе пограничного слоя u_e), полученные в 101 точке в плоскости симметрии диффузора при $\eta = 0$ м (показано на рис. 2)

$$\bar{u}_e(\bar{\xi}) = \frac{a_1 + a_3 \bar{\xi}^2 + a_5 \bar{\xi}^4 + a_7 \bar{\xi}^6}{1 + a_2 \bar{\xi}^2 + a_4 \bar{\xi}^4 + a_6 \bar{\xi}^6},$$

$$a_1 = 1.1935, \quad a_2 = -0.1567, \quad a_3 = -0.2125, \quad a_4 = 0.0076,$$

$$a_5 = 0.0139, \quad a_6 = 0.0002, \quad a_7 = -8.4921 \times 10^{-5} \quad (6)$$

В численных расчетах вместо методов интерполяции и экстраполяции данных [10] применялись корреляционные зависимости (так формула (6) для $\bar{u}_e(\bar{\xi})$), что позволяло с высокой точностью описывать результаты эксперимента. Хорошее совпадение подтверждает достоверность используемого НМНК метода.

Компонента поперечной скорости w_e в расчетах определялась линейным законом по формуле $w_e(\eta) = 0.01 \times V_\infty \times (\eta/L_\infty)$.

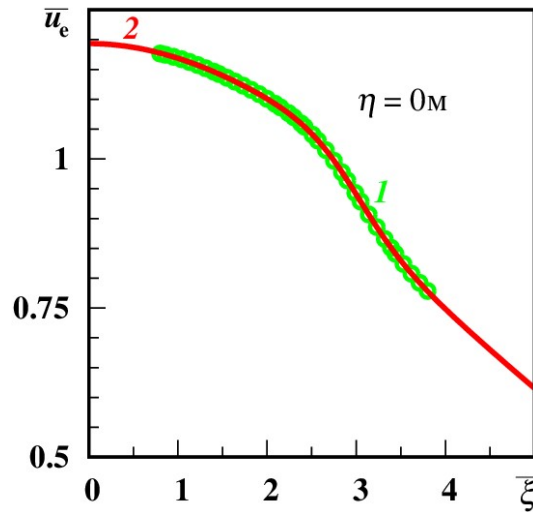


Рис. 2. Продольное распределение безразмерной внешней скорости $\bar{u}_e(\bar{\xi})$ при $\eta = 0$ м, 1 – экспериментальные данные, 2 – аппроксимация по формуле (6)

Начальный профиль средней скорости $u_0(\zeta)$ приводится в эксперименте [10] при $\xi = 1.04$ м и $\eta = 0$ м. Продольный профиль скорости в переменных закона стенки $u_0^+(\zeta^+)$ и безразмерный профиль осредненной скорости u_0/u_e пограничного слоя от физической нормированной координаты $\bar{\zeta}$ представлены на рис. 3, а. Данные натурального эксперимента для графиков на рис. 3, а были пересчитаны к безразмерному виду. Здесь же дается линейный закон $u^+ = \zeta^+$ кривая 3 и логарифмическая зависимость закона стенки кривая 4 (формула Клаузера для плоской пластины)

$$u_0^+ = a \ln(\zeta^+) + b, \quad a = 2.5, \quad b = 5.1 \quad (7)$$

Немногочисленные точки профиля начальной скорости (в области $0 < \zeta^+ < 10^2$) показывают, что только образуется переход от ламинарного к турбулентному режиму течения. Видно, что логарифмическая зависимость (7) для $u_0^+(\zeta^+)$ всего лишь формируется и наблюдается на коротком участке примерно при $19.5 < \zeta^+ < 27.7$ с другими коэффициентами в аналогичной формуле Клаузера (соответственно при логарифме коэффициент $a = 3.69$ и свободный член $b = 8.01$). Одна точка эксперимента попала в линейную область.

Численно найдено, что зависимость $u_0/u_e(\bar{\zeta})$ хорошо аппроксимируется следующим дробным рационалом половинного порядка для наилучшего приближения:

$$\frac{u_0}{u_e(\bar{\zeta})} = \frac{a_1 + a_3 \bar{\zeta}^{0.5} + a_5 \bar{\zeta} + a_7 \bar{\zeta}^{1.5}}{1 + a_2 \bar{\zeta}^{0.5} + a_4 \bar{\zeta} + a_6 \bar{\zeta}^{1.5}},$$

$$a_1 = 0.00127, \quad a_2 = 0.7677, \quad a_3 = 1.1068,$$

$$a_4 = -0.3605, \quad a_5 = -0.3969, \quad a_6 = 0.0417, \quad a_7 = 0.0429 \quad (8)$$

Начальные профили кинетической энергии турбулентности $\bar{k}_0(\bar{\zeta})$ и скорости ее диссипации $\bar{\varepsilon}_0(\bar{\zeta})$ рассчитывались по следующим аналогичным эмпирическим зависимостям (модифицированной функцией Гаусса для \bar{k}_0 и дробно-рациональной функцией половинного порядка для $\bar{\varepsilon}_0$)

$$\bar{k}_0(\bar{\zeta}) = b_1 + b_2 b_4 \exp\left[\frac{-0.5(\bar{\zeta} - b_3)^2}{b_6}\right] \frac{1 + \operatorname{erf}\left[\frac{b_5(\bar{\zeta} - b_3)}{(2b_6)^{0.5} b_4}\right]}{b_6^{0.5}},$$

$$b_1 = -0.146, \quad b_2 = 540.027, \quad b_3 = 0.423, \quad b_4 = 0.164, \quad b_5 = 15.361, \quad b_6 = b_4^2 + b_5^2, \quad (9)$$

$$\bar{\varepsilon}_0(\bar{\zeta}) = \frac{c_1 + c_3 \bar{\zeta}^{0.5} + c_5 \bar{\zeta} + c_7 \bar{\zeta}^{1.5} + c_9 \bar{\zeta}^2}{1 + c_2 \bar{\zeta}^{0.5} + c_4 \bar{\zeta} + c_6 \bar{\zeta}^{1.5} + c_8 \bar{\zeta}^2 + c_{10} \bar{\zeta}^{2.5}},$$

$$c_1 = 0.2199, \quad c_2 = -0.5730, \quad c_3 = -0.1092, \quad c_4 = 0.2793, \quad c_5 = 0.0197,$$

$$c_6 = -0.0445, \quad c_7 = -0.0015, \quad c_8 = -0.0035, \quad c_9 = 4.1524, \quad c_{10} = 0.0009 \quad (10)$$

Результаты аппроксимаций в безразмерном виде величин $\bar{k}_0(\bar{\zeta})$ и $\bar{\varepsilon}_0(\bar{\zeta})$ представлены на рис. 3, б. Видно, что кривая 2, построенная по формуле (10), располагается на данных эксперимента $\bar{\varepsilon}_0$. Кривая 4 формула (9) на рис. 3б незначительно завышает значения \bar{k}_0 в области $5 \times 10^{-1} < \bar{\zeta} < 5 \times 10^1$. Отклонение аппроксимации (9) от точек эксперимента в указанной области объяснимо малым количеством точек вблизи стенки. В область $0 < \bar{\zeta} < 3 \times 10^{-1}$ попали только две точки измерений.

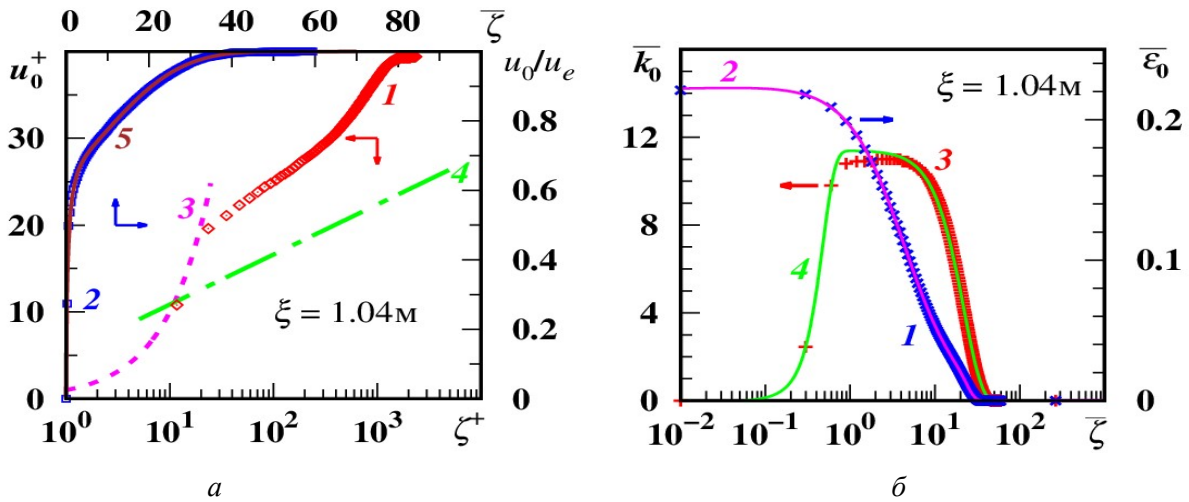


Рис. 3. Начальный профиль средней скорости в сечении пограничного слоя при $\xi = 1.04$ м, $\eta = 0$ м: (а) $u^+(\zeta^+)$ в координатах закона стенки и безразмерный профиль $u_0/u_e(\bar{\zeta})$; 1, 2 – экспериментальные данные; 3 – линейный закон; 4 – закон Клаузера (7); кривая 5 соответствует формуле (8); (б) начальные профили кинетической энергии турбулентности $\bar{k}_0(\bar{\zeta})$ и скорости ее диссипации $\bar{\varepsilon}_0(\bar{\zeta})$ при $\xi = 1.04$ м, $\eta = 0$ м: 1, 3 – экспериментальные данные; кривая 2 соответствует формуле (9); кривая 4 – (10)

На рис. 4 приведена достаточно мелкая расчетная сетка около твердой поверхности обтекаемого тела, где видно, что в области вязкого подслоя $0 < \zeta^+ \leq 5$ находится по крайней мере 8 слоев точек сетки, не считая точку на самой стенке. В буферной зоне $5 < \zeta^+ \leq 30$ уже оказалось 14 слоев.

4.2. Профили средней скорости

На рис. 5–6 представлены профили расчета 2 безразмерной скорости $u^+(\zeta^+)$ в переменных закона стенки в сечениях $\xi = 2.10$ м, 2.26 м, 3.04 м, 4.00 м и $\eta = 0$ м.

На рис. 5, а (в первом сечении $\xi = 2.10$ м, $\eta = 0$ м) рассчитанный профиль 2 зависимости $u^+(\zeta^+)$ лежит несколько ниже экспериментальных точек 1 и логарифмической кривой 4, определенной по формуле Клаузера (7). На графиках во всех представленных сечениях

приводится линейный закон (линия 3). Вблизи стенки расчетные кривые полностью совпадают с линейным законом.

Во втором сечении $\xi = 2.26$ м, $\eta = 0$ м (рис. 5, б) профиль 2 касается логарифмической кривой (9) и находится на экспериментальных точках 1.

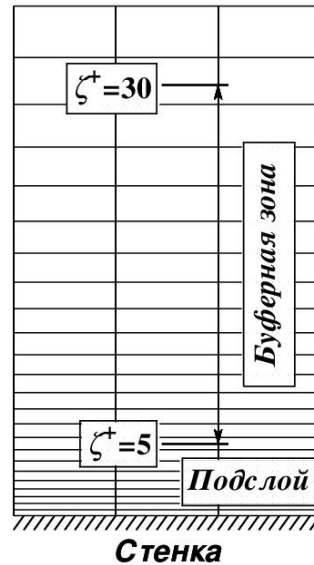


Рис. 4. Расчетная сетка вблизи стенки при моделировании турбулентного пограничного слоя

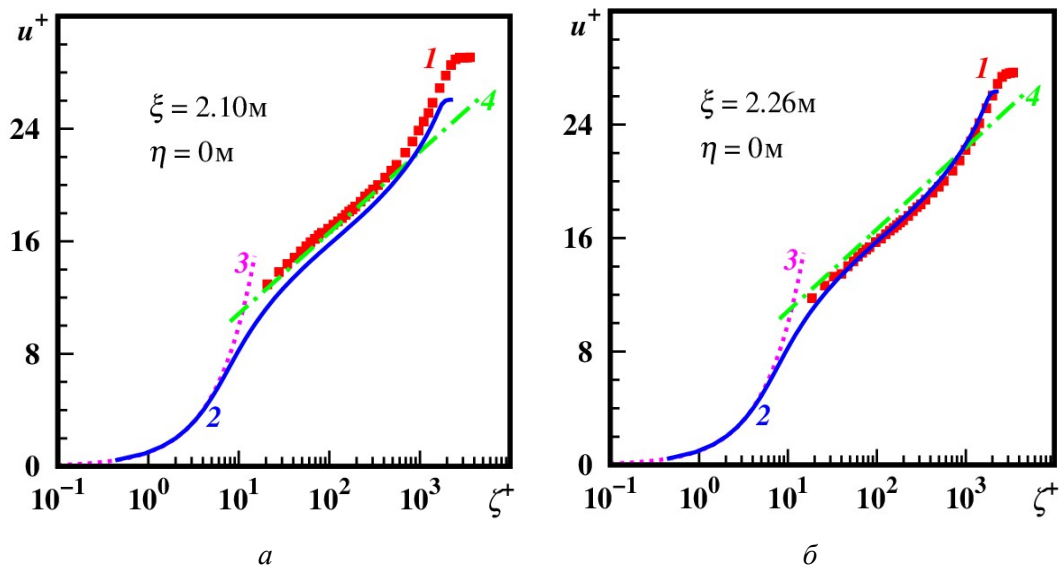


Рис. 5. Профиль средней скорости $u^+(\zeta^+)$ в координатах закона стенки в сечениях пограничного слоя: (а) при $\xi = 2.10$ м, (б) при $\xi = 2.26$ м, $\eta = 0$ м; 1 – экспериментальные данные; 2 – расчет, 3 – линейный закон; 4 – закон Клаузера (7)

В сечении $\xi = 3.04$ м, $\eta = 0$ м рис. 6, а профиль 2 зависимости $u^+(\zeta^+)$ стремится ближе к точкам 1 эксперимента, оставаясь несколько выше в средней части слоя, при этом располагаясь ниже логарифмической кривой 4 Клаузера. Видно, что градиент давления повлиял на профиль средней скорости $u^+(\zeta^+)$ и закон логарифма Клаузера (7) (полученный для плоской пластины) в данном сечении будет с новыми коэффициентами: $a = 1.91$, $b = 5.8$. На графике $u^+(\zeta^+)$ логарифмический участок очень незначительный.

В сечении $\xi = 4.00$ м, $\eta = 0$ м рис. 6, б расчетный профиль 2 в координатах закона стенки сильно изгибается. Получено подтверждение проведенными расчетами, что профили

средней скорости в безразмерных координатах закона стенки существенно отклоняются от логарифмического распределения (7) в пограничных слоях с НГД. Так в экспериментальной работе Nagano [20] впервые показано, что средний профиль продольной скорости в логарифмической области смещается ниже классического закона логарифма в пограничных слоях с НГД. Аналогичный результат получили Spalart – Watmuff [21].

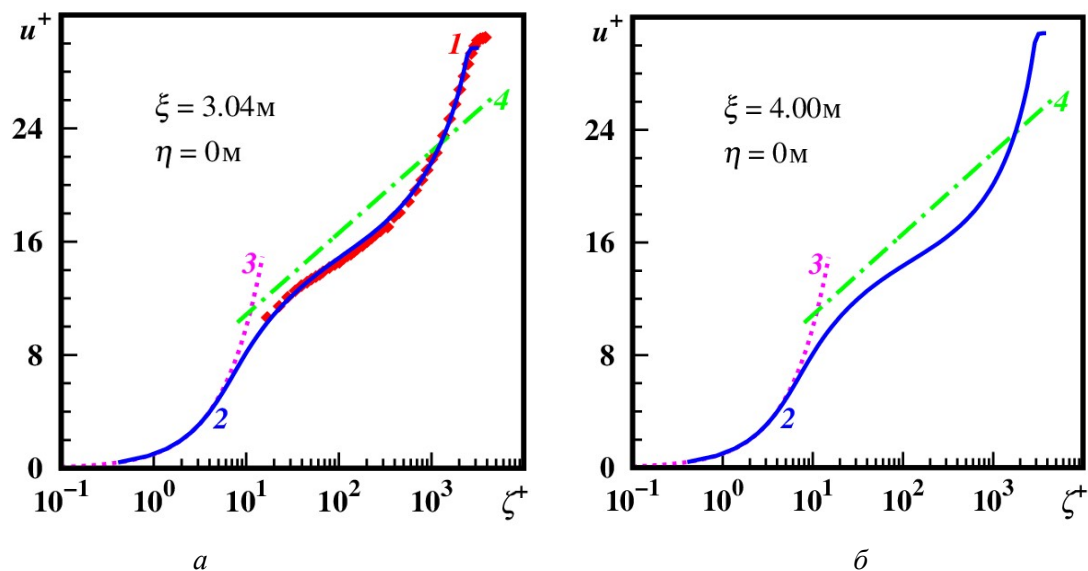


Рис. 6. Профиль средней скорости $u^+(\zeta^+)$ в координатах закона стенки в сечениях пограничного слоя: (а) при $\xi = 3.04$ м, (б) при $\xi = 4.0$ м, $\eta = 0$ м; 1 – экспериментальные данные; 2 – расчет, 3 – линейный закон; 4 – закон Клаузера (7)

Из проведенных расчетов видно, что постепенно профиль средней скорости $u^+(\zeta^+)$ (кривая 2) становится очень изогнутым, дважды S-образным. Имеется явное вырождение ранее протяженного логарифмического участка (например, при $\xi = 4.00$ м, $\eta = 0$ м). Логарифмический участок профиля скорости с новыми коэффициентами ($a = 1.8$, $b = 6.0$) практически исчезает.

4.2. Турбулентные величины

На рис. 7 показаны профили кинетической энергии турбулентности $\bar{k}(\bar{\zeta})$ (а) и скорости диссипации энергии турбулентности $\bar{\varepsilon}(\bar{\zeta})$ (б), рассчитанные в различных $\bar{\zeta}$ – сечениях пограничного слоя при $\eta = 0$ м.

Кинетическая энергия турбулентности k из представленных расчетов имеет два локальных максимума в области $\bar{\zeta} \approx 1.10$ м. Происходит сложное перераспределение кинетической энергии турбулентности в турбулентном пограничном слое. Первый максимум, который ближе к стенке, уменьшается при смещении вниз по потоку и постепенно второй локальный максимум становится больше первого. Кинетическая энергия в расчетной области концентрируется при $\bar{\zeta} \approx 3 \times 10^1 \div 10^2$.

Видно, как диссипация ε рис. 7, б изменяется под воздействием неблагоприятного градиента давления. В начальном сечении отсутствует локальный максимум, расположенный вблизи стенки, что видно из графика рис. 3, б. Максимум измеренной величины диссипации ε находится на стенке. С ростом продольной координаты $\bar{\zeta}$ в профиле скорости диссипации ε возникают два локальных максимума. Первый находится ближе к стенке, значение его постепенно уменьшается и сдвигается глубже в пограничный слой. Второй максимум существенно меньше первого, достигается в области выше над стенкой, он быстро пропадает при увеличении $\bar{\zeta}$. Его появление можно предугадать в начальном профиле $\bar{\varepsilon}(\bar{\zeta})$ на рис. 3, б.

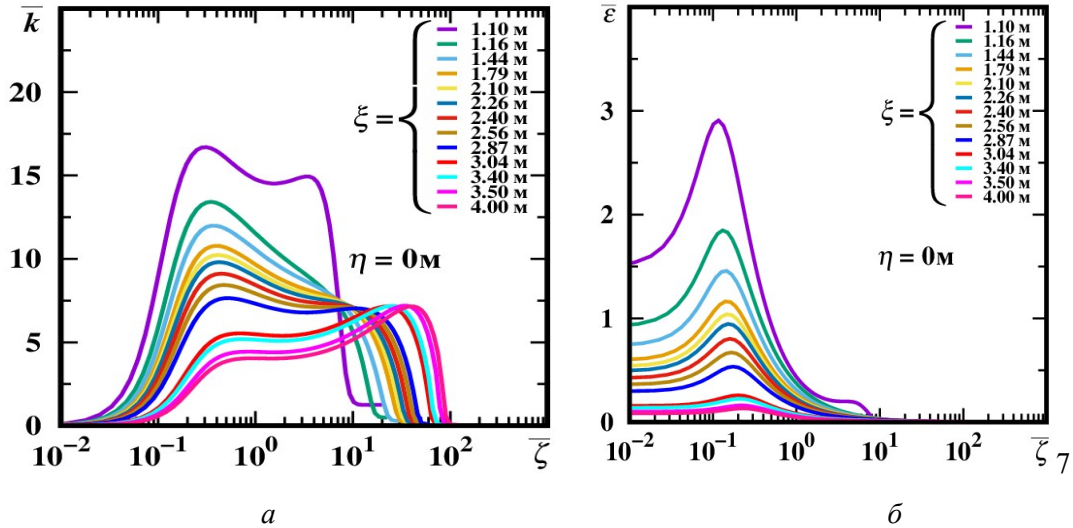


Рис. 7. Распределения поперек пограничного слоя в различных сечениях вниз по потоку ($\eta = 0$ м) при $\xi = 1.10$ м, 1.16 м, 1.44 м, 1.79 м, 2.10 м, 2.26 м, 2.40 м, 2.56 м, 2.87 м, 3.04 м, 3.40 м, 3.50 м, 4.00 м: (а) кинетической энергии турбулентности $\bar{k}(\bar{\xi})$; (б) скорости диссипации $\bar{\varepsilon}(\bar{\xi})$

На рис. 8, а демонстрируется рассчитанная вихревая вязкость $\bar{\nu}_t(\bar{\xi})$ в различных сечениях пограничного слоя. Видно, что кинематический коэффициент вихревой вязкости во внешней части турбулентного пограничного слоя имеет локальный максимум. Турбулентная вязкость во много раз больше молекулярной вязкости. Здесь напряжения, обусловленные молекулярной вязкостью, пренебрежимо малы по сравнению с реинольдсовыми напряжениями. Максимум вихревой вязкости увеличивается при смещении вниз по потоку и при этом сдвигается к внешней границе пограничного слоя.

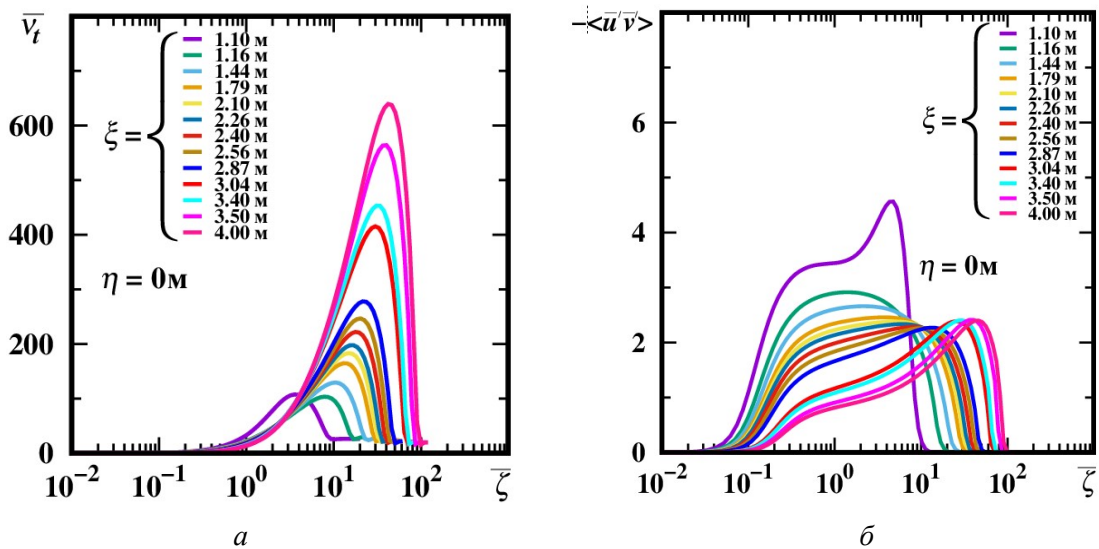


Рис. 8. Распределения поперек пограничного слоя в различных сечениях вниз по потоку ($\eta = 0$ м): (а) кинематического коэффициента вихревой вязкости $\bar{\nu}_t$; (б) сдвигового напряжения трения $\langle \bar{u}'\bar{v}' \rangle$. Обозначения такие же как на рис. 7

Рисунок 8, б показывает распределение турбулентного сдвигового напряжения трения $-\langle \bar{u}'\bar{v}' \rangle$ в тех же сечениях пограничного слоя. Как видно из профиля напряжения трения $-\langle \bar{u}'\bar{v}' \rangle$ имеется локальный максимум, который постепенно уменьшается и сдвигается к внешней границе турбулентного пограничного слоя при увеличении ξ .

Поведение рассчитанных величин $\bar{k}_e(\bar{\xi})$ и $\bar{\varepsilon}_e(\bar{\xi})$ на внешней границе пограничного слоя показано на рис. 9 в сечении $\eta = 0$ м. Кинетическая энергия турбулентности \bar{k}_e с увеличением $\bar{\xi}$ убывает по закону рациональной дроби от логарифма согласно лучшей аппроксимации по методу НМНК

$$\bar{k}_e(\bar{\xi}) = \frac{d_1 + d_3 f + d_5 f^2 + d_7 f^3 + d_9 f^4}{1 + d_2 f + d_4 f^2 + d_6 f^3 + d_8 f^4},$$

$$d_1 = -1.3341, \quad d_2 = -34.4352, \quad d_3 = 293.4252, \quad d_4 = 1455.3586,$$

$$d_5 = -2968.2801, \quad d_6 = -12036.2303, \quad d_7 = 11965.4954,$$

$$d_8 = 45592.0949, \quad d_9 = -5324.3252, \quad f = \ln(\bar{\xi}) \quad (11)$$

Скорость убывания диссипации энергии турбулентности $\bar{\varepsilon}_e$ от $\bar{\xi}$ дается эмпирической зависимостью по следующей формуле:

$$\bar{\varepsilon}_e(\bar{\xi}) = \frac{e_1 + e_3 \bar{\xi}^{0.5} + e_5 \bar{\xi} + e_7 \bar{\xi}^{1.5}}{1 + e_2 \bar{\xi}^{0.5} + e_4 \bar{\xi} + e_6 \bar{\xi}^{1.5} + e_8 \bar{\xi}^2},$$

$$e_1 = 6.8344 \times 10^{-05}, \quad e_2 = -3.6825, \quad e_3 = -0.0001, \quad e_4 = 5.0850,$$

$$e_5 = 9.9313 \times 10^{-05}, \quad e_6 = -3.1214, \quad e_7 = -2.0753 \times 10^{-05}, \quad e_8 = 0.7189 \quad (12)$$

Результаты численных результатов расчеты величин \bar{k}_e и $\bar{\varepsilon}_e$ из уравнений (7) в области течения представлены кружочками на рис. 9, а и рис. 9, б соответственно. Здесь же графически показаны найденные аналитические зависимости по методу НМНК.

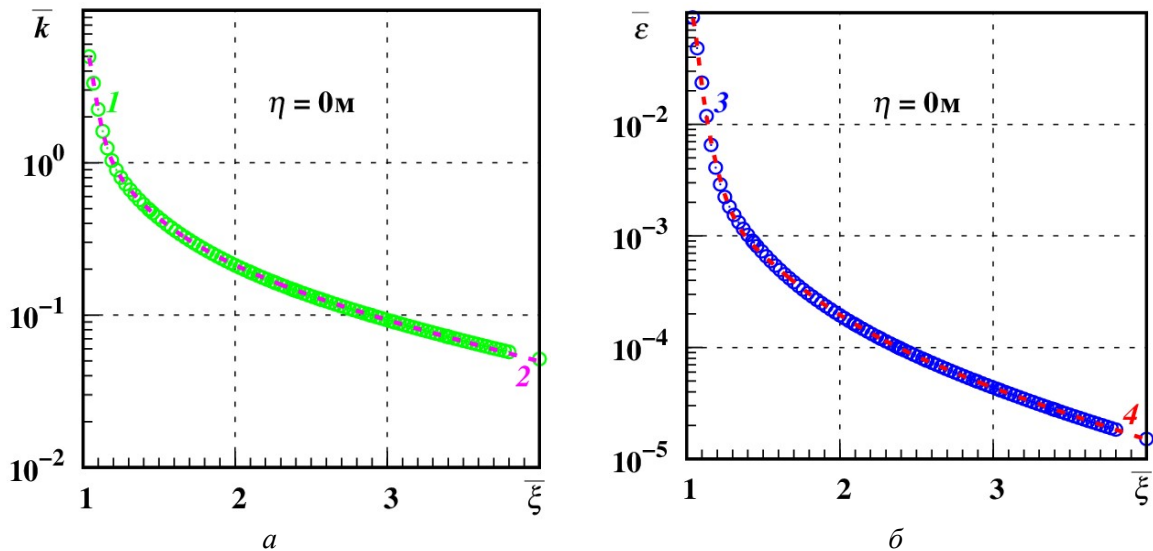


Рис. 9. Распределения турбулентных величин на внешней границе пограничного слоя вниз по потоку ($\eta = 0$ м): (а) кинетической энергии турбулентности $\bar{k}_e(\bar{\xi})$, 1 – расчет, пунктирная линия 2 – соответствует формуле (11); (б) скорости диссипации $\bar{\varepsilon}_e(\bar{\xi})$ 3 – расчет, кривая 4 – зависимость (12)

На рис. 10 показаны профили кинетической энергии турбулентности $\bar{k}(\bar{\zeta})$ а) и скорости диссипации энергии турбулентности $\bar{\varepsilon}(\bar{\zeta})$ б), рассчитанные в тех же $\bar{\zeta}$ сечениях пограничного слоя при $\eta = 1.0$ м. Видно, что в сечении $\eta = 1.0$ м у кинетической энергии турбулентности $\bar{k}(\bar{\zeta})$ (рис. 10, а) наблюдается только один локальный максимум при $\bar{\zeta} = 1.10$ м, в отличие от аналогичного профиля в плоскости $\eta = 0$ м. Далее поведение величины $\bar{k}(\bar{\zeta})$ аналогично: максимум уменьшается и смещается к внешней границе слоя с увеличением $\bar{\zeta}$. Профили диссипации $\bar{\varepsilon}(\bar{\zeta})$ ведут себя как на рис. 7, б.

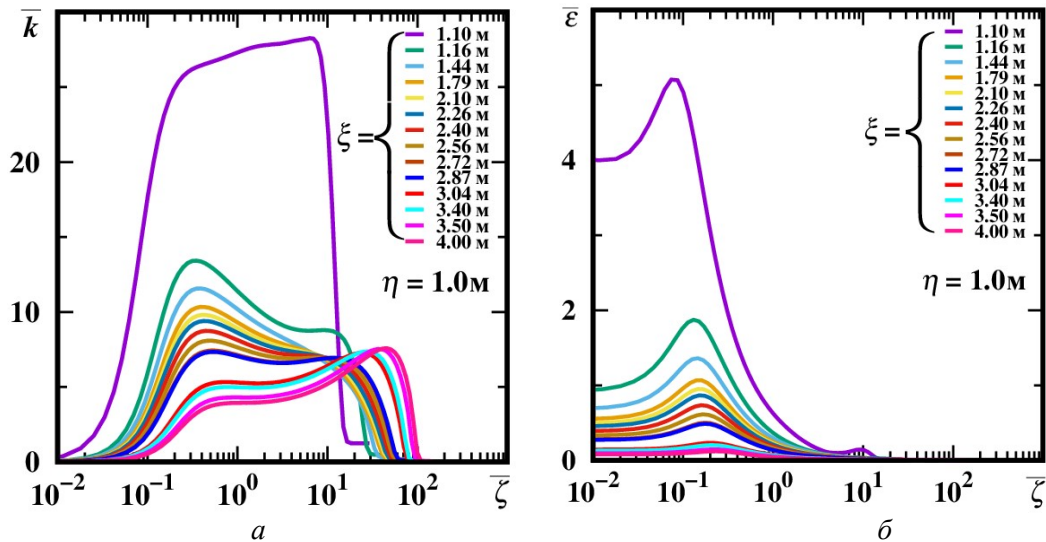


Рис. 10. Распределения поперек пограничного слоя в различных сечениях вниз по потоку ($\eta = 1.0$ м): (а) кинетической энергии турбулентности $\bar{k}(\bar{\zeta})$; (б) скорости диссипации $\bar{\varepsilon}(\bar{\zeta})$. Обозначения такие же как на рис. 7

5. Заключение

Низкорейнольдсовая модель Myong – Kasagi [1] ранее успешно применялась в [2] при исследовании влияния параметров турбулентности набегающего потока (степени турбулентности Tu_∞ и масштаба L_∞) на ламинарно–турбулентный переход для течения над плоской пластиной при большой степени интенсивности турбулентности. Важное значение при этом для конечных результатов отводится изменениям характеристик турбулентности в пристеночной области пограничного слоя.

В данной работе с использованием дифференциальной пристеночной k – ε модели турбулентности проведен расчет течений в диффузоре, для которого получены экспериментальные данные [9, 10]. Достигнуто хорошее согласие результатов расчета с экспериментальными данными по профилям средней скорости, кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации, что свидетельствует о пригодности используемой в расчетах модели турбулентности [1].

С помощью алгоритма Левенберга – Марквардта для нелинейного метода наименьших квадратов получены аналитические зависимости основных величин.

Найденные характерные свойства внутренней структуры пограничного слоя при развитом турбулентном режиме с продольным градиентом давления отражают закономерности изменений характеристик течения, установленные в эксперименте. Численно получено подтверждение ранее сделанных экспериментальных исследований [20, 21], что в течении с продольным НГД профиль средней скорости отходит от классической логарифмической зависимости Клаузера и описывается более сложной формулой.

Благодарности и ссылки на гранты

Исследование выполнено по теме госзадания № FFGN-2023-003.

Статья посвящена светлой памяти Великого Ученого, Моего Учителя, Человека и Гражданина, Академика Горимира Горимировича Чёрного (22.01.1923–06.11.2012), 100–летию со дня его рождения.

Литература

1. Myong H.K., Kasagi N. Prediction of anisotropy of the near-wall turbulence with anisotropic low-Reynolds-number $k-\varepsilon$ turbulence model//Transaction. ASME. Journal Fluids Eng. 1990. Vol. 112. No. 12. Pp. 521–524. DOI: 10.1115/1.2909437
2. Зубарев В.М. Влияния параметров сильно турбулизированного потока жидкости на пристенные переходные течения в пограничном слое // Уч. зап. Казан. ун. Сер. Физ.–мат. науки. Изд. Казанский (Приволжский) фед. унив. (Казань), 2020. Т. 162. № 1. С. 38–51. DOI: 10.26907/2541-7746.2020.1.38-51
3. Зубарев В.М. Численное моделирование турбулентного несжимаемого течения с увеличивающимся положительным градиентом давления // ИФЖ. 2019. Т. 92. № 3. С. 654–663.
4. Пейтел В.К., Роди В., Шойерер Г. Модели турбулентности для течений в пристеночной области с малыми числами Рейнольдса (обзор) // Аэрокосм. техн. 1986. № 1. С. 183–197.
5. Фундаментальные проблемы моделирования турбулентных и двухфазных течений: в 2 т. / под ред. акад. РАН А.А. Саркисова, Г.А. Филиппова. – М.: Наука, 2010 – Т. 2 : Численное моделирование. – 368 с.
6. Sana A, Ghumman A.R., Tanaka H. Modification of the damping function in the $k-\varepsilon$ model to analyse oscillatory boundary layers // Ocean Engineering. 2007. Vol. 34. Pp. 320–326. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2005.11.018
7. Hattori H., Nagano Y. Nonlinear two-equation model taking into account the wall-limiting behavior and redistribution of stress components // Theoret. Comput. Fluid Dyn. 2004. Vol. 17. Pp. 313–330. DOI: 10.1007/s00162-004-0120-x
8. Rouhi A., Endrikat S., Modesti D., Sandberg R.D., Oda T., Tanimoto K., Hutchins N., Chung D. Riblet-generated flow mechanisms that lead to local breaking of Reynolds analogy // J. Fluid Mech. 2022. Vol. 951. A45. Pp.1–31. DOI: 10.1017/jfm.2022.880
9. Samuel A.E., Joubert P.N. The 1980–81 AFOSR–HTTM–Stanford Conference on Complex Turbulent Flows: Comparison of Computation and Experiment (S.J. Kline, B.J. Cantwell, G.M. Lilley, eds.). Vol. 1. Proc. of the 1980 Conference Stanford Univ., Stanford, California, Sept. 3–6, 1980. Mech. Eng. Dept. Stanford University. 1981. Tech. Rep. AFOSR–TR–83–1001. Pp. 259–261.
10. Samuel A.E., Joubert P.N. A boundary layer developing in an increasingly adverse pressure gradient // J. Fluid Mech. 1974. Vol. 66. Pt 3. Pp. 481–505. DOI: 10.1017/S0022112074000322
11. Хиршель Э. Х., Кордулла В. Сдвиговое течение сжимаемой жидкости. Численный расчёт пограничного слоя. М.: Мир. 1987. – 248 с.
12. Hirschel E.H., Cousteix J., Kordulla W. Three-dimensional attached viscous flow. Basic principles and theoretical foundations. Berlin–Heidelberg: Springer. 2014. – XIII+391 p. DOI: 10.1007/978-3-642-41378-0
13. Шевелев Ю.Д. Пространственные задачи вычислительной гидродинамики. – М.: Наука, 1986. – 368 с.
14. Хинце И.О. Турбулентность ее механизм и теория. Москва: Физ–мат. лит., 1963. – 680с.
15. Launder B.E., Spalding D. B. Lectures in mathematical models of turbulence. London, New York: Academic Press, 1972, – VII+169p. Corpus ID: 117983616
16. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений. Учебное пособие. СПб.: Балт. гос. техн. ун–т. 2001. – 108с.
17. Jones W. P., Launder B. E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence // Int. J. Heat Mass Transfer. 1972. Vol. 15. Pp. 301–314. DOI: 10.1016/0017-9310(72)90076-2
18. Глушко Г. С., Иванов И. Э., Крюков И. А. Моделирование турбулентности в сверхзвуковых струйных течениях // Физико–химическая кинетика в газовой динамике. 2010. Т. 9. <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2010-01-12-023.pdf>

19. Hanjalic K., Launder B.E. Contribution towards a Reynolds–stress closure for low–Reynolds–number turbulence // *J. Fluid Mech.* 1976. Vol. 74. No 4. Pp. 593–610. DOI: 10.1017/S0022112076001961
20. Nagano Y., Tsuj T., Houra T. Structure of turbulent boundary layer subjected to adverse pressure gradient//*Int. J. Heat and Fluid Flow.* 1998. Vol. 19. Pp. 563–572. DOI: 10.1016/S0142-727X(98)10013-9
21. Spalart P.R., Watmuff J.H. Experimental and numerical study of a turbulent boundary layer with pressure gradients // *J. Fluid Mech.* 1993. Vol. 249. Pp. 337–371. DOI: 10.1017/S002211209300120X

References

1. Myong H. K., Kasagi N., Prediction of anisotropy of the near–wall turbulence with anisotropic low–Reynolds–number k – ε turbulence model, *Transaction. ASME. J. Fluids Eng.*, 1990, vol. 112, no. 12, pp. 521–524. DOI: 10.1115/1.2909437
2. Zubarev V. M., The influence of strongly turbulized liquid flow parameters on the near–wall transitional flows in the boundary layer, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko–Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 1, pp. 38–51.
3. Zubarev V. M., Numerical simulation of turbulent incompressible flow with increasing adverse pressure gradient, *J. Eng. Phys. Thermophys*, 2019, vol. 92, no. 3, pp. 631–639. DOI: 10.1007/s10891-019-01972-0
4. Patel V. C., Rodi W., Scheuerer G., Turbulence models for near–wall and low–Reynolds–number flows: *A review. AIAA Journal*, 1984, vol. 23, no. 9, pp. 1308–1319. DOI: 10.2514/3.9086
5. *Fundamental problems in modeling of turbulent and two–phase flows: 2nd vol.: Numerical Modeling*, Ed. by A.A. Sarkisov and G.A. Filippov, Moscow: Nauka, 2010, 368 p.
6. Sana A., Ghumman A. R., Tanaka H., Modification of the damping function in the k – ε model to analyse oscillatory boundary layers, *Ocean Engineering*, 2007, vol. 34, pp. 320–326. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2005.11.018
7. Hattori H., Nagano Y., Nonlinear two–equation model taking into account the wall–limiting behavior and redistribution of stress components, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 2004, vol. 17, pp. 313–330. DOI: 10.1007/s00162-004-0120-x
8. Rouhi A., Endrikat S., Modesti D., Sandberg R. D., Oda T., Tanimoto K., Hutchins N., Chung D., Riblet–generated flow mechanisms that lead to local breaking of Reynolds analogy, *J. Fluid Mech.*, 2022, vol. 951 A45, pp.1–31. DOI: 10.1017/jfm.2022.880
9. Samuel A. E., Joubert P. N., The 1980–81 AFOSR–HTTM–Stanford Conference on Complex Turbulent Flows: Comparison of Computation and Experiment (S.J. Kline, B.J. Cantwell, G.M. Lilley, eds.), vol. 1., Proc. of the 1980 Conference Stanford Univ., Stanford, California, Sept. 3–6, 1980, Mech. Eng. Dept. Stanford University, 1981. Tech. Rep. AFOSR–TR–83–1001, pp. 259–261.
10. Samuel A. E., Joubert P. N., A boundary layer developing in an increasingly adverse pressure gradient, *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 66, pt. 3, pp. 481–505. DOI: 10.1017/S0022112074000322
11. Hirschel E. H., Kordulla W., Shear flow in surface–oriented coordinate, *Notes on Numer. Fluid Mech.*, vol. 4, Braunschweig, Wiesbaden: Friedr. Vieweg&Sohn, 1986, X+266 p. DOI: 10.1007/978-3-663-05276-0
12. Hirschel E. H., Cousteix J., Kordulla W., *Three–dimensional attached viscous flow. Basic principles and theoretical foundations.* Berlin–Heidelberg: Springer. 2014, XIII+391 p. DOI: 10.1007/978-3-642-41378-0
13. Shevelev Ju. D., *Spatial problems of computational fluid dynamics*, M.: Nauka, 1986, 368 p.
14. Hinze J. O., *Turbulence an introduction to its mechanism and theory*, New York, Toronto, London: McGraw–Hill Book Comp., 1959, X+790 p. Corpus ID: 118995196
15. Launder B. E., Spalding D. B., *Lectures in mathematical models of turbulence*, London, New York: Academic Press, 1972, VII+169p. Corpus ID: 117983616

16. Belov I. A., Isaev S. A., *Modeling of Turbulent Currents. Tutorial*, SPb.: Balt. gos. tekhn. un-t, 2001, 108 p.
17. Jones W. P., Launder B. E., The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1972, vol. 15, pp. 301–314. DOI: 10.1016/0017-9310(72)90076-2
18. Glushko G., Ivanov I., Kryukov I., Turbulence modeling for supersonic jet flows, *Physical–Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2010, vol. 9. <http://chemphys.edu.ru/issues/2010-9/articles/142/>
19. Hanjalic K., Launder B. E., Contribution towards a Reynolds–stress closure for low–Reynolds–number turbulence, *J. Fluid Mech.*, 1976, vol. 74, no. 4, pp. 593–610. DOI: 10.1017/S0022112076001961
20. Nagano Y., Tsuj T., Houra T., Structure of turbulent boundary layer subjected to adverse pressure gradient, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 1998, vol. 19, pp. 563–572. DOI: 10.1016/S0142-727X(98)10013-9
21. Spalart P. R., Watmuff J. H., Experimental and numerical study of a turbulent boundary layer with pressure gradients, *J. Fluid Mech.*, 1993, vol. 249, pp. 337–371. DOI: 10.1017/S002211209300120X

Статья поступила в редакцию 18 ноября 2022 г.