

On Some Practical Aspects of Computational Grids Generation for Computational Aerothermodynamics Problems using Elliptic Grid Generator

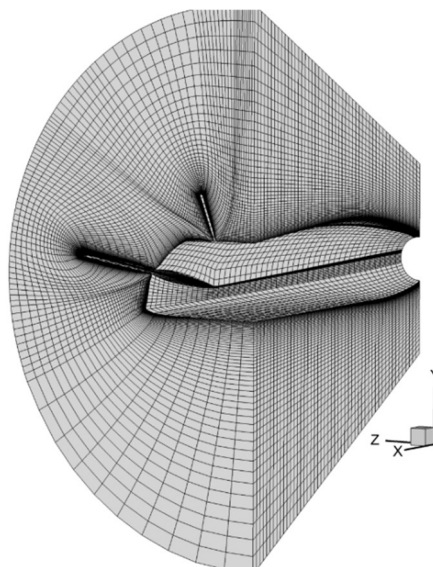
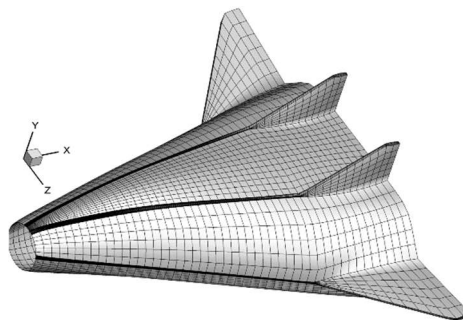
D. S. Yatsukhno

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, 119526, Russia
yatsukhno-ds@rambler.ru*

Abstract

This paper is devoted to a review of grid generation techniques based on the partial differential equations numerical solving. Some methods application to the complex objects grid generation were considered for the purpose of the subsequent numerical investigations conducting by the computer codes. The main questions of the grid generation such as CAD surface reading and its discretization, preliminary grid generation, detailed grid generation, orthogonalization and adaptation of grid.

Keywords: computational aerothermodynamics, partial differential equations, finite-difference grids, finite volume method, transfinite interpolation, grid adaptation, splines



Surface (up) and volume (low) grid for X-33 experimental model [25]

УДК 533.6.011.5

О некоторых практических аспектах построения расчетных сеток для задач вычислительной аэротермодинамики с использованием эллиптического сеточного генератора

Д. С. Яцухно

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,
Россия, Москва, 119526, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1*

yatsukhno-ds@rambler.ru

Аннотация

В рамках данной статьи представлен обзор способов построения расчетных сеток с использованием методов, основанных на численном решении уравнений в частных производных. При этом отдельное внимание уделено вопросам применения некоторых из этих методов к созданию сеточных топологий для объектов сложной геометрической формы с целью проведения последующих расчетов с использованием авторских компьютерных кодов. Обсуждаются ключевые вопросы построения расчетных сеток, такие как работа с электронной поверхностью исследуемого объекта, в том числе ее дискретизация, построение предварительной сетки, увеличение количества узлов, ортогонализация и адаптация построенной сетки.

Ключевые слова: вычислительная аэротермодинамика, уравнения в частных производных, конечно-разностные расчетные сетки, метод контрольного объема, трансфинитная интерполяция, адаптация сеток, сплайны

1. Введение

Построение расчетных сеток для решения задач вычислительной аэротермодинамики является важным этапом численного моделирования. Во многих практически важных случаях именно от качественных и количественных параметров сетки зависит возможность получения достоверного численного решения. Требования к сеткам определяются спецификой задачи. К примеру, для аккуратного определения величины конвективного теплового потока в аэротермодинамических расчетах при больших числах Рейнольдса необходимо обеспечить дискретизацию узкой зоны пограничного слоя, а в идеале – построить достаточно подробную сетку в области между поверхностью исследуемого тела и образующейся при его обтекании ударной волной. Тип создаваемой сеточной топологии определяется особенностями применяемого численного метода. Так в рамках конечно-разностного подхода используются структурированные сетки, представляющие собой набор узлов. Данный вид сеток позволяет получить достаточно точные результаты, хотя генерация сеточной топологии для объектов сложной геометрической формы является трудоемкой задачей, которая требует разбиения исходной расчетной области на отдельные блоки. Конечно-объемные сетки имеют вид совокупности отдельных элементов различной формы (тетраэдры, гексаэдры, призмы, пирамиды). К достоинствам таких сеток (в основном тетраэдральных) относится тот факт, что они могут быть построены практически для любой геометрии в автоматическом режиме. Однако

следует отметить, что в отличие от разностных сеток, основными данными в которых являются исключительно координаты сеточных узлов, конечно-объемные сетки подразумевают необходимость хранения и обработки информации о различных дополнительных параметрах сеточных элементов (объемах, площадях граней и направляющих косинусах вектора нормали к ним, длинам ребер, номерам соседних элементов и т.п.). Таким образом, очевидным преимуществом разностных сеток является их экономичность, в то время как конечно-объемные сетки обладают большей универсальностью и удобством процесса их автоматического построения.

Несмотря на активное развитие и совершенствование коммерческих вычислительных комплексов (CFX, Fluent, SolidWorks Flow Simulation и т.п.), обладающих в том числе высокопроизводительными встроенными сеточными построителями, практические вопросы генерации сеток остаются актуальными в рамках разработки специализированных авторских компьютерных кодов, предназначенных для решения избранных задач с широкой возможностью модификации численных схем и методов расчета. Обзор некоторых подходов к построению расчетных сеток, а также особенностей реализации отдельных этапов процесса генерации сеточных топологий и является целью данной работы.

2. Краткий обзор ключевых публикаций

Численные решения некоторых типов уравнений в частных производных обладают следующими свойствами, позволяющими применять их для построения сеток:

- преобразование координат сеточных узлов из физической области в вычислительную должно являться однозначным;
- должна быть обеспечена возможность управления распределением узлов на границах расчетной области;
- необходимо обеспечивать гладкость линий сетки, а также не допускать их пересечения (самопересечения) с соседними (в одном направлении) линиями;
- важным свойством является ортогональность сеточных линий (прежде всего к внутренней границе расчетной области – поверхности модели);
- существенным фактором является возможность сгущать узлы сетки к ключевым зонам расчетной области (пограничный слой, ударные волны).

По наиболее общей классификации уравнения в частных производных делятся на три основные группы: эллиптические, параболические и гиперболические. К настоящему моменту опубликовано значительное количество работ, посвященных реализации сеточных генераторов на основе перечисленных типов уравнений. Наиболее часто используемым является эллиптический сеточный генератор, в основе которого лежат уравнения Лапласа или Пуассона. В работе [1] численное решение уравнения Пуассона на треугольной сетке позволило получить распределение линий уровня, которые, по сути, и представляют собой линии сетки.

В отличие от однородного уравнения Лапласа, при генерации сеток с помощью численного решения уравнения Пуассона особую важность имеет вид правой части, которая может быть использована как для сгущения линий сетки (к определенной линии или к определенному узлу) [2], так и обеспечения ортогональности к границам расчетной области [3], которые могут быть криволинейными, а сама область – многосвязной. Правая часть может обеспечивать и контроль распределения внутренних узлов сетки [4], в частности таких параметров как расстояние между сеточными линиями, площадь ячеек, величина Якобиана преобразования.

Эллиптический генератор также позволяет выполнять построение подвижных адаптивных сеток. Причем для этих целей подходят как уравнения Лапласа [5], так и уравнения Пуассона [6–8]. Весовые функции, включенные в правую часть уравнения Пуассона, обеспечивают сгущение сетки к физическим особенностям решения – зонам ударных волн и больших градиентов газодинамических параметров.

Использование эллиптического сеточного генератора подразумевает необходимость задания распределения узлов на всех границах расчетной области. Кроме того, должны быть определены предварительные координаты внутренних узлов сетки. Контроль над граничными узлами делает эллиптический генератор пригодным для построения сеток при решении задач, связанных с внутренними течениями в каналах и трактах силовых установок [9–10]. Фундаментальные свойства эллиптических уравнений обеспечивают возможность получения гладких линий сетки, в том числе в окрестности уступов или каверн.

Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона чаще всего выполняется при фиксированных координатах граничных узлов (граничные условия Дирихле). Однако для достижения ортогональности также могут быть использованы условия Неймана [3], которые обеспечивают подвижность узлов на внешней или внутренней границе. К достоинствам подобного подхода следует отнести отсутствие необходимости использовать управляющие функции (т.е. правую часть уравнения Пуассона). Но такой тип граничных условий не подходит для задач, не допускающих существенное изменение формы поверхности исследуемого объекта.

Численное решение уравнений эллиптического генератора сеток требует применения различных итерационных методов [11] (метод Зейделя, методы верхней и нижней релаксации и т.п.). При этом сходимость итерационного процесса существенно снижается при увеличении количества узлов и при уменьшении расстояния между ними (что происходит при сгущении или адаптации сетки). Параболический сеточный генератор сохраняет основные положительные свойства эллиптического построителя сеток, при этом численное решение системы параболических уравнений с трехдиагональной матрицей выполняется маршевым методом, без использования итераций, что значительно ускоряет процесс. Такой подход был предложен в работе [12]. Вопросы ортогональности, управления сгущением сетки, а также обобщения на пространственный случай были исследованы в работе [13]. Повышение гибкости параболического генератора, расширение возможностей по распределению узлов на границах расчетной области, а также практическое обобщение процедуры на трехмерный случай было рассмотрено в работе [14]. В заключение отметим, что по умолчанию для работы параболического генератора требуется распределять узлы только на внутренней границе расчетной области.

Гиперболический сеточный генератор [15] позволяет получать ортогональные сетки исходя из формулировки самих определяющих уравнений. Как и в случае параболического генератора сетка строится маршевым методом, при этом задается размер ближайших к внутренней границе ячеек. Практический опыт построения сеток путем численного решения системы гиперболических уравнений показывает возможность возникновения определенных дефектов сетки, в том числе изломов сеточных линий. Для устранения данной проблемы в уравнения вводятся диссипативные члены [16]. К настоящему моменту разработаны различные модификации гиперболических сеточных генераторов [17–19], в том числе с возможностью обобщения на пространственный случай.

Естественным образом может быть выполнено сочетание различных методов построения сеток, которое приводит к использованию сразу двух типов уравнений в частных производных. К примеру, эллиптико-гиперболический сеточный генератор [20] позволяет совместить ортогональность сетки, безытерационность численного решения, а также применимость к построению сеток для конфигураций со сложными границами. Влияние на итоговую численную схему каждого вида уравнений учитывается при помощи специального коэффициента пропорциональности. Сочетание параболических и гиперболических уравнений [21] обеспечивает автоматическую ортогональность сетки при возможности влиять на распределение узлов на внешней границе расчетной области.

Как правило изначально системы трех упомянутых типов уравнений представлены в двумерной постановке с целью построения сеток на плоскости. Однако возможны и пространственные постановки задач [22–24], которые чаще всего сводятся не столько к решению

трехмерных уравнений, сколько к представлению исходной сложной геометрии в виде последовательности плоских сечений и применению сеточных генераторов меньшей размерности. Именно такой подход применялся в настоящей работе.

3. Особенности реализации и результаты

В данном разделе рассмотрен процесс построения расчетной сетки для экспериментальной модели X-33 [25], упрощенный облик которой представлен на рис. 1.

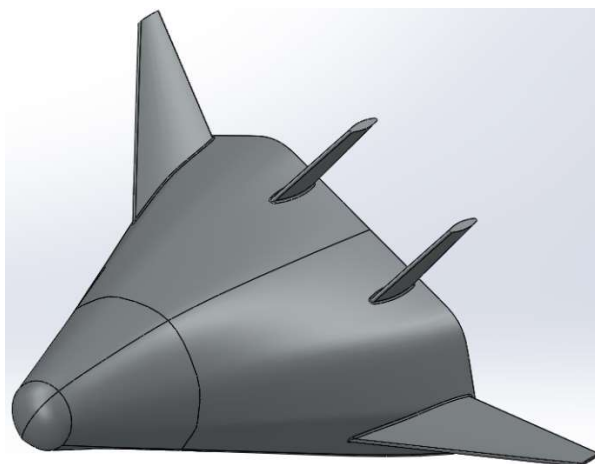


Рис. 1. Экспериментальная модель X-33 [25]

Первым этапом является дискретизация поверхности тела, т.е. определение координат точек в каждом плоском сечении. Реализация этой процедуры выполняется с помощью пакета SolidWorks. Однако извлечение координат поверхности должно быть формализовано определенным образом. Для этого необходимо сгенерировать последовательность плоскостей, которые пересекают искомую поверхность (рис. 2).

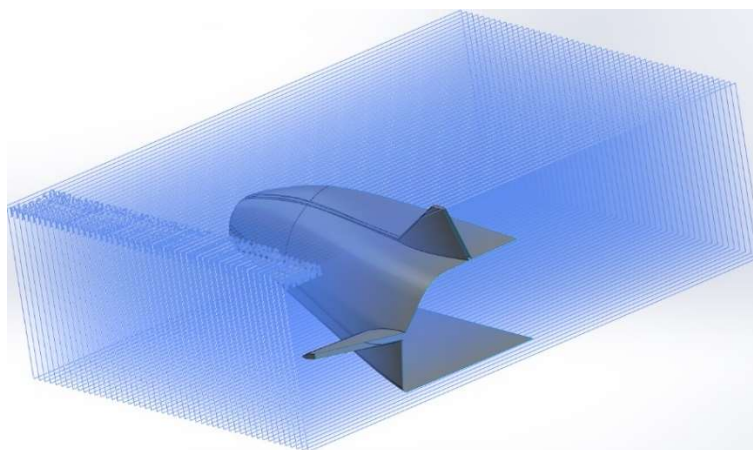


Рис. 2. Плоскости сечений поверхности экспериментальной модели

Затем, в результате пересечения плоскости и тела формируются эскизы линии пересечения, состоящие из различных сегментов (рис. 3). Следующим действием является создание непрерывной поверхностной кривой, которая математически объединяет сегменты эскиза в непрерывную линию (рис. 4). На этой линии выполняется процедура генерации точек, причем ключевой особенностью данного процесса является распределение точек по каждому сегменту кривой. Таким образом, надлежащим способом учитываются все геометрические особенности поверхности, в т.ч. небольшие локальные затупления (рис. 5). На заключитель-

ном этапе выполняется экспорт координат точек в текстовый файл. Для автоматизации выполнения перечисленных этапов был разработан макрос на языке Visual Basic Application (VBA). В качестве исходных данных в этом макросе используется информация о количестве сечений, длине модели и количестве точек на каждом сегменте кривой, которая является результатом пересечения плоскости и поверхности исследуемого тела.

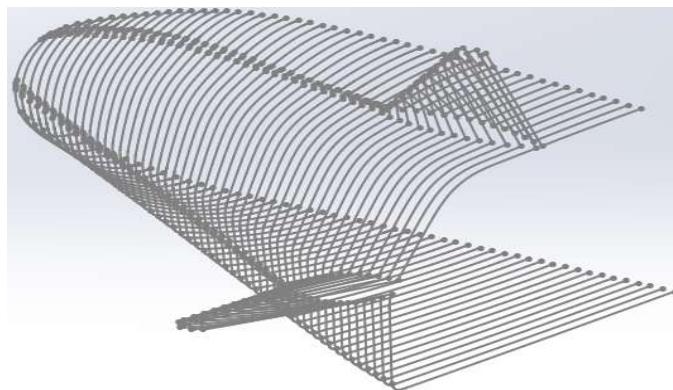


Рис. 3. Отдельные сегменты линий пересечения плоскостей с поверхностью исследуемой модели

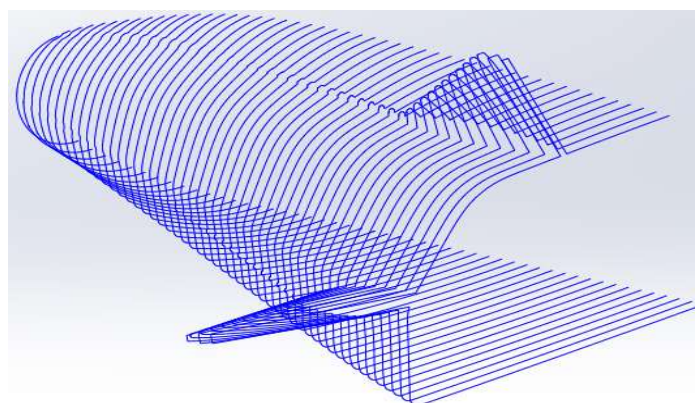


Рис. 4. Непрерывные линии пересечения плоскостей с поверхностью исследуемой модели

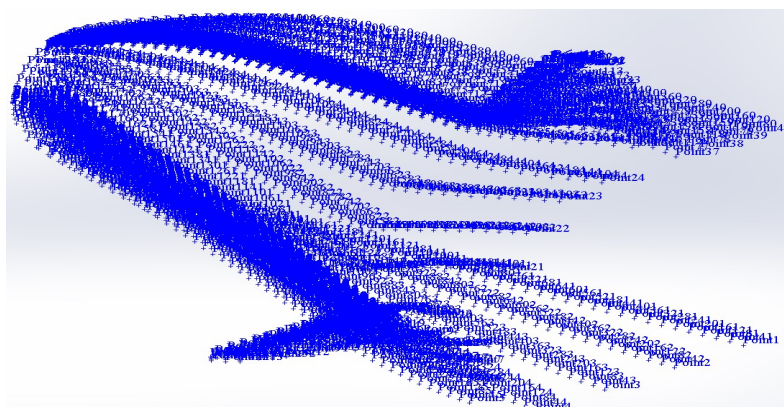


Рис. 5. Распределение точек по поверхности исследуемой модели

Результатом работы макроса является поверхностная сетка (рис. 6). Однако искомая сеточная топология содержит довольно ограниченное количество узлов как в пределах каждого сечения, так и в продольном направлении. Это объясняется тем, что создание большого количества объектов в SolidWorks (плоскости, эскизы, линии, точки) и их визуализация требует выделения значительного количества оперативной памяти компьютера, что возможно, но нецелесообразно.

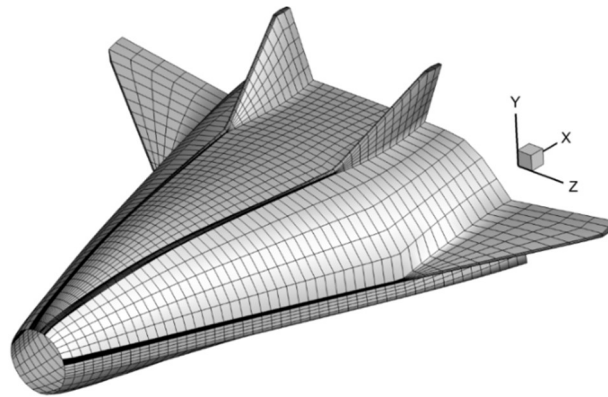


Рис. 6. Изначальная поверхностная сетка для экспериментальной модели X-33

Для более подробной дискретизации поверхности необходимо применение интерполяции. Существуют различные виды интерполяции: линейная, трансфинитная, Эрмитова, сплайн-интерполяция. Однако, необходимо учитывать, что повышение степени подробности поверхностной сетки не должно сопровождаться перемещением уже полученных узлов, поскольку некоторые из них однозначно определяют ключевые элементы модели (крылья, затупленные кромки, места перехода одной поверхности в другую). Одним из наиболее подходящих способов является Catmull-Rom сплайн интерполяция [26], позволяющая гибко управлять количеством узлов в интерполируемом сечении при сохранении неподвижными ключевых узлов. Важным этапом в процедуре Catmull-Rom интерполяции является выбор типа параметризации кривой, т.е. варианту перехода от декартовых координат к параметрическому представлению интерполируемой кривой, что позволяет значительно улучшить контроль над распределением узлов. Сравнительный анализ влияния разной параметризации на результат интерполяции показан на рис. 7.

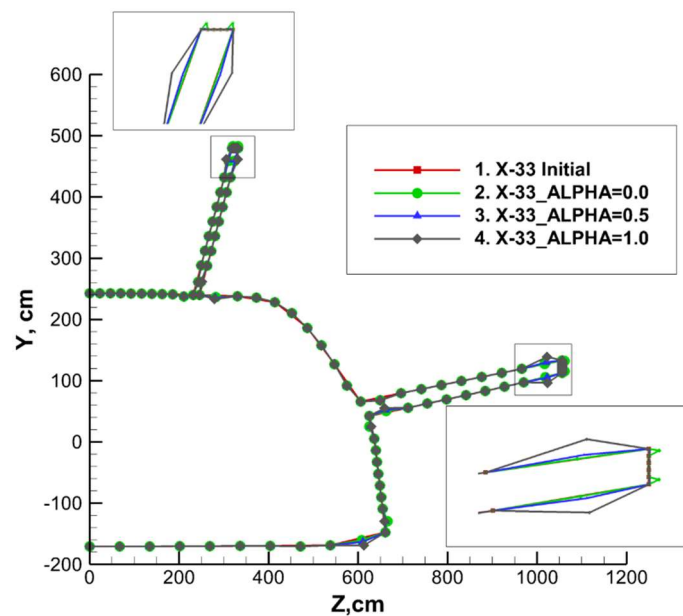


Рис. 7. Форма сечения исследуемой модели для различных типов параметризации вида $s = \left(\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2} \right)^\alpha$, используемых при интерполяции. 1 – исходное сечение, 2 – сечение при $\alpha = 0$, 3 – сечение при $\alpha = 0.5$, 4 – сечение при $\alpha = 1$

В некоторых практически важных случаях имеет смысл проводить адаптацию узлов сетки по кривизне линии сечения [27]. Результаты адаптации показаны на рис. 8.

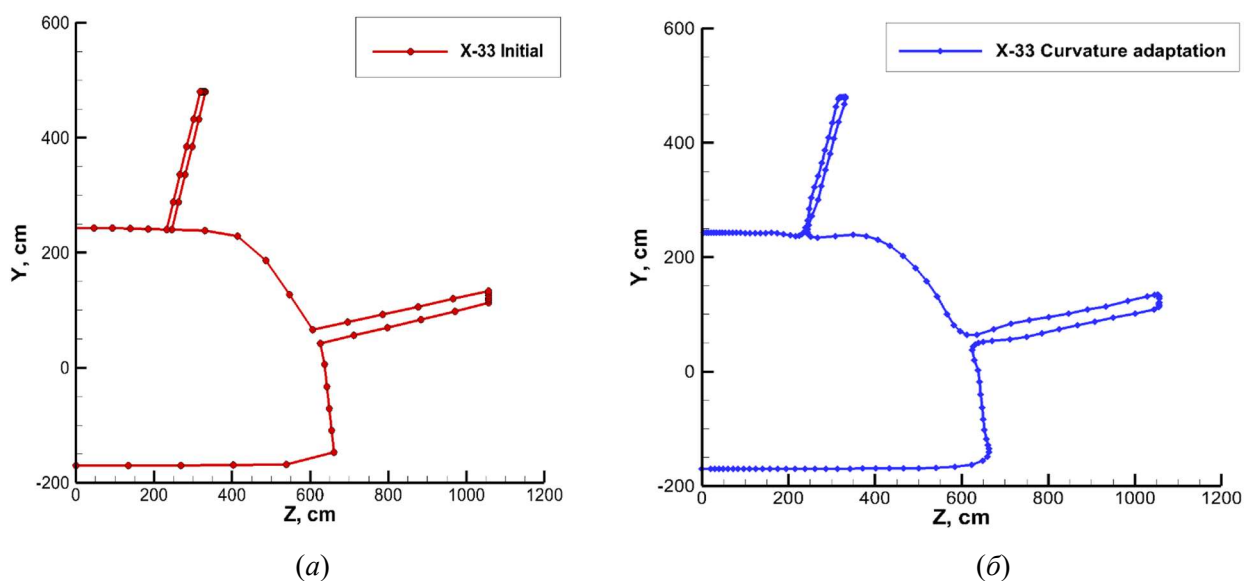


Рис. 8. Форма сечения экспериментальной модели X-33 для различных типов интерполяции: (а) исходное сечение; (б) сечение при интерполяции с учетом адаптации по кривизне

Применение Catmull-Rom интерполяции (с учетом адаптации по кривизне или без) к каждому сечению, а также вдоль поверхности позволяет получить подробную поверхностную сетку (внутреннюю границу расчетной области). Аналогичный подход (включая применение макроса для SolidWorks) применяется для дискретизации и управления распределением узлов по внешней границе расчетной области. Результирующий облик обеих поверхностей показан на рис. 9.

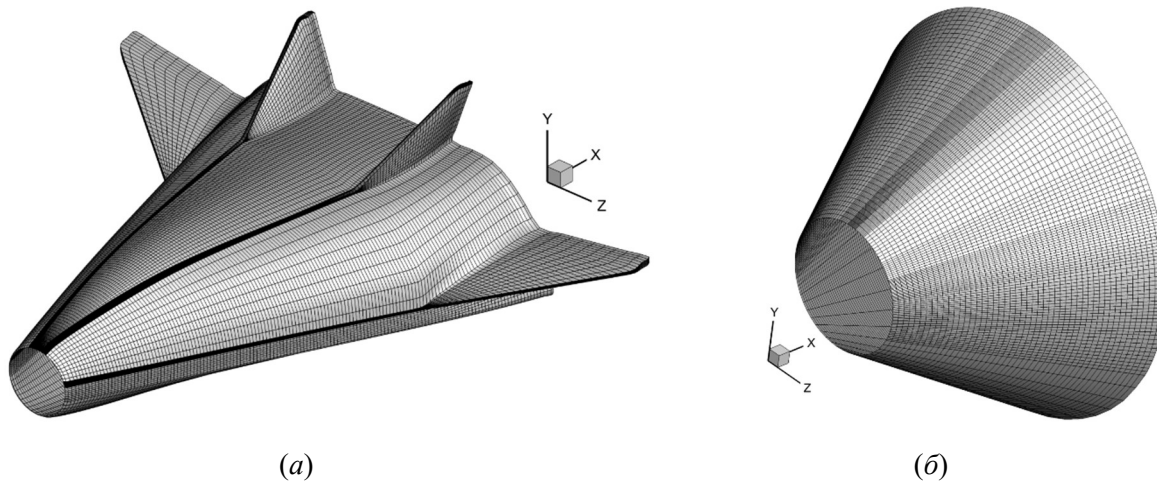


Рис. 9. Форма внутренней (а) внешней (б) границы расчетной области с учетом интерполяции

После распределения узлов по границам расчетной области необходимо обеспечить генерацию предварительной сетки, которая будет использоваться в качестве начального приближения при работе эллиптического сеточного генератора. Для этих целей используется линейная интерполяция (см. например работу [28]). Полученная алгебраическая сетка обладает рядом особенностей. Во-первых, она не является ортогональной. Во-вторых, сетка не является гладкой. В-третьих, для разрешения зоны пограничного слоя было выполнено сгущение сетки к поверхности модели с помощью экспоненциальной управляющей функции [3]. Результаты применения алгебраического подхода к построению предварительной сетки показаны на рис. 10.

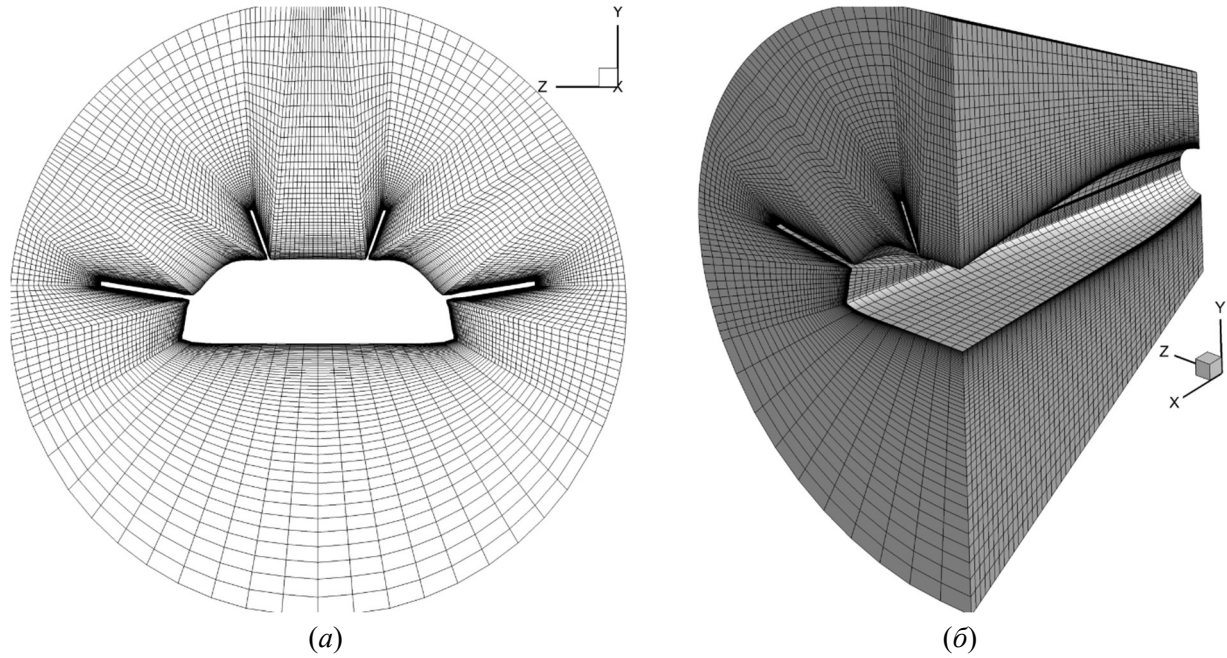


Рис. 10. Поперечное сечение (а) и пространственная алгебраическая сетка (б)

К полученной алгебраической сетке применяется эллиптический генератор. В двумерной постановке система эллиптических уравнений формулируется следующим образом [3]:

$$g_{22}(x_{\xi\xi} + P^x x_{\xi}) - 2g_{12}x_{\xi\eta} + g_{11}(x_{\eta\eta} + Q^x x_{\eta}) = 0, \quad (1)$$

$$g_{22}(y_{\xi\xi} + P^y y_{\xi}) - 2g_{12}y_{\xi\eta} + g_{11}(y_{\eta\eta} + Q^y y_{\eta}) = 0. \quad (2)$$

Здесь x, y – координаты узлов сетки в физической области; ξ, η – координаты узлов в вычислительной области. Параметры g_{11} , g_{12} , g_{22} определяются с помощью следующих соотношений:

$$g_{11} = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2, \quad (3)$$

$$g_{12} = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}, \quad (4)$$

$$g_{22} = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad (5)$$

В данной работе реализуется алгоритм построения пространственных сеток с использованием итерационного подхода к определению управляющих функций на границах расчетной области [29]. Значения данных функций во внутренних узлах сетки определяются путем интерполяции граничных значений. Главным результатом применения управляющих функций является достижение ортогональности линий сетки на границах области. Выражения для определения управляющих функций имеют вид

$$\mathbf{P} = -\frac{\mathbf{x}_{\xi} \cdot \mathbf{x}_{\xi\xi}}{g_{11}} - \frac{\mathbf{x}_{\xi} \cdot \mathbf{x}_{\eta\eta}}{g_{22}}, \quad (6)$$

$$\mathbf{Q} = -\frac{\mathbf{x}_{\eta} \cdot \mathbf{x}_{\eta\eta}}{g_{22}} - \frac{\mathbf{x}_{\eta} \cdot \mathbf{x}_{\xi\xi}}{g_{11}} \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{P} = (P^x, P^y)$. Решение уравнений (1)–(2) осуществляется с использованием итерационных методов, таких как метод Гаусса – Зейделя или метод последовательной ниж-

ней релаксации [11]. Результаты итерационного процесса показаны на рис. 11. Следует отметить, после построения итоговой сетки существует возможность дополнительного увеличения количества сеточных узлов за счет применения Catmull-Rom интерполяции, при этом сохранив ортогональную топологию.

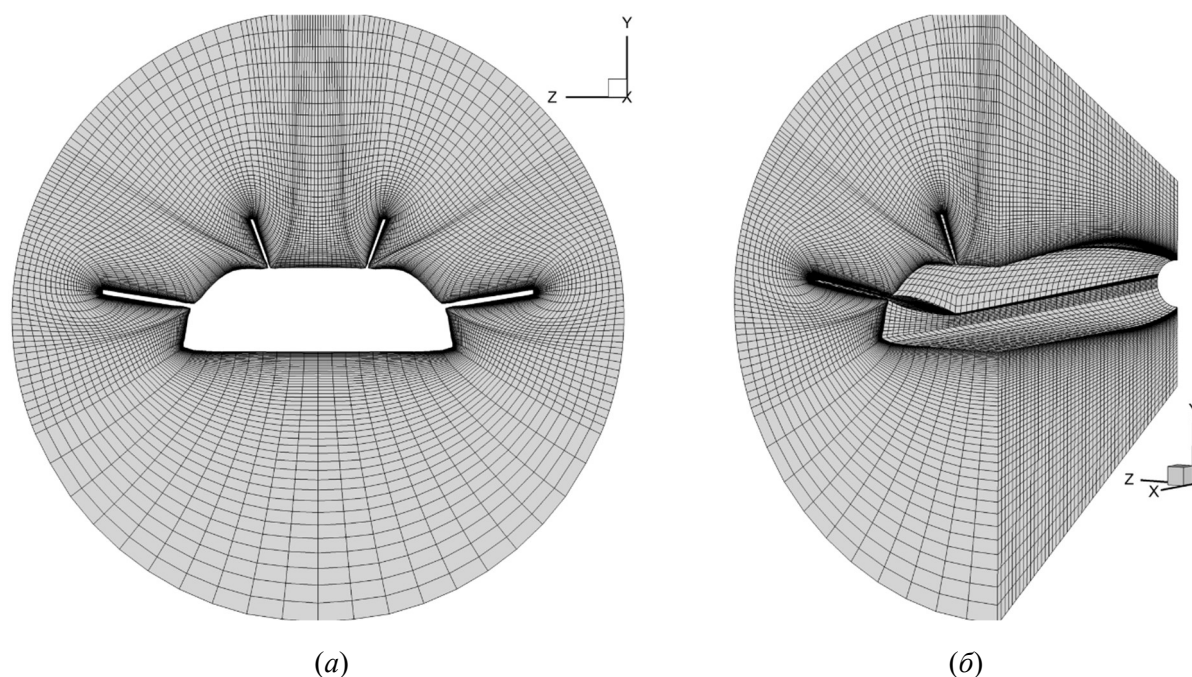


Рис. 11. Поперечное сечение (а) и пространственная ортогональная эллиптическая сетка (б) для исследуемой модели

Заключительным этапом является построение сетки для носовой части модели. Для этого применяется трансфинитная интерполяция. Облик носового блока сетки показан на рис. 12.

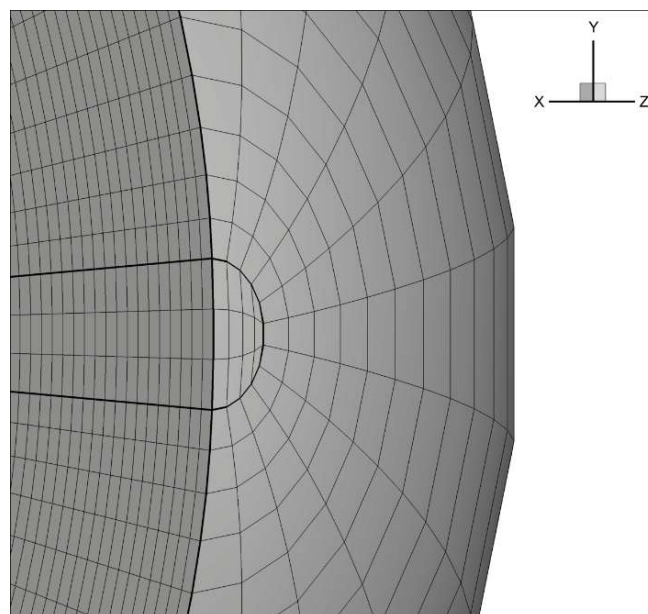


Рис. 12. Результаты генерации сетки с помощью трансфинитной интерполяции для носовой части модели

В целом подобный подход может быть применен к различным конфигурациям. Сложность формы поперечного сечения, обусловленная наличием крыльев может быть преодолена за счет адекватного распределения узлов по внешней границе расчетной области. Результирующая сетка для исследуемой модели представлена на рис. 13.

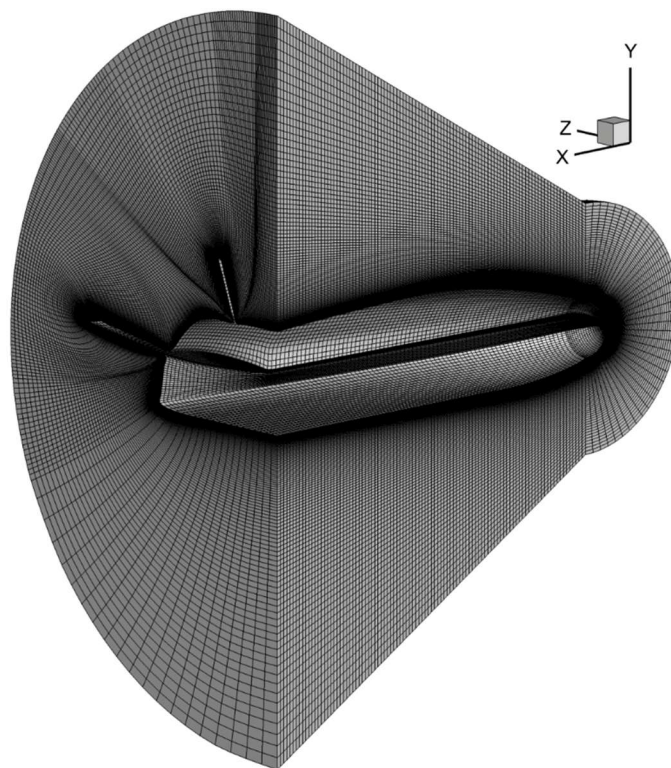


Рис. 13. Сетка для исследуемой модели с носовым блоком

4. Заключение

В данной статье представлено детальное описание способа построения сеток для поверхностей сложной формы с помощью эллиптического сеточного генератора. К основным достоинствам данного типа сеткопостроителей относятся возможности по контролю за распределением внутренних узлов сетки, возможность получения гладких и ортогональных сеток. К относительным недостаткам следует отнести необходимость применения итерационных методов решения, сходимость которых может быть затруднена в некоторых практических случаях. Продемонстрирован подход к интеграции CAD системы SolidWorks с авторским компьютерным кодом, предназначенным для генерации расчетных сеток. На основе предложенного подхода могут быть получены также неструктурированные гексагональные сетки, которые наряду с тетраэдральными сетками (см. например работу [30]) широко применяются в газодинамических расчетах.

Благодарности и ссылка на гранты

Работа выполнена в рамках государственного задания № 123021700057-0.

Литература

1. Winslow A. M. Numerical solution of the quasilinear Poisson equation in a nonuniform triangle mesh // Journal of computational physics. – 1966. – Vol. 1. – No. 2. – Pp. 149–172.
2. Thompson J. F., Thames F. C., Mastin C. W. Boundary-fitted curvilinear coordinate systems for solution of partial differential equations on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. – NASA, 1977. – №. NASA-CR-2729.

3. Thompson J. F., Soni B. K., Weatherill N. P. (ed.). Handbook of grid generation. – CRC press, 1998.
4. Villamizar V., Acosta S. Elliptic grids with nearly uniform cell area and line spacing // *Electronic Transactions on Numerical Analysis*. – 2009. – Vol. 34. – Pp. 59–75.
5. Годунов С. К., Прокопов Г. П. Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 1972. – Т. 12. – № 2. – С. 429–440.
6. Kania L. Elliptic adaptive grid generation and area equidistribution // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 1999. – Vol. 30. – No. 5. – Pp. 481–491.
7. Soni B. K., et al. Solution adaptive grid strategies based on point redistribution // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2000. – Vol. 189. – No. 4. – Pp. 1183–1204.
8. Brown K. G. Adaptive Grid Generation for Numerical Solution of Partial Differential Equations. – AIR FORCE INST OF TECH WRIGHT-PATTERSON AFB OH SCHOOL OF ENGINEERING, 1983.
9. Soni B. Two-and three-dimensional grid generation for internal flow applications of computational fluid dynamics // *7th Computational Physics Conference*. – 1985. – P. 1526.
10. Soni B. K. Grid generation for internal flow configurations // *Computers & Mathematics with Applications*. – 1992. – Vol. 24. – No. 5-6. – Pp. 191–201.
11. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы // М.: Бином. – 2003. – Т. 640.
12. Nakamura S. Marching grid generation using parabolic partial differential equations // *Numerical grid generation; Symposium on Numerical Generation of Curvilinear Coordinate Systems and Their Use in the Numerical Solution of Partial Differential Equations*. – 1982.
13. Edwards T., Noniterative three-dimensional grid generation using parabolic partial differential equations // *23rd Aerospace Sciences Meeting*. – 1985. – P. 485.
14. Крылов А. А., Михалин В. А., Савельев А. Д. Опыт применения параболического генератора сеток в задачах вычислительной газовой динамики // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2003. – Т. 43. – № 7. – С. 1096–1106.
15. Steger J. L., Chaussee D. S. Generation of body-fitted coordinates using hyperbolic partial differential equations // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. – 1980. – Vol. 1. – No. 4. – Pp. 431–437.
16. Kinsey D. W., Barth T. J. Description of a hyperbolic grid generating procedure for arbitrary two-dimensional bodies. – AIR FORCE WRIGHT AERONAUTICAL LABS WRIGHT-PATTERSON AFB OH, 1984.
17. Steger J. L. Generation of three-dimensional body-fitted grids by solving hyperbolic and parabolic partial differential equations. – 1989. – № NASA-TM-101069.
18. Brakhage K. H., Müller S. Algebraic-hyperbolic grid generation with precise control of intersection of angles // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. – 2000. – Vol. 33. – No. 1. – Pp. 89–123.
19. Chan W. M., Steger J. L. Enhancements of a three-dimensional hyperbolic grid generation scheme // *Applied Mathematics and Computation*. – 1992. – Vol. 51. – No. 2–3. – Pp. 181–205.
20. Seki R. Efficient grid generation. – 1989. – № NAS 1.26: 185034.
21. Nakamura S., Suzuki M. Noniterative three-dimensional grid generation using a parabolic-hyperbolic hybrid scheme // *25th AIAA Aerospace Sciences Meeting*. – 1987. – P. 277.
22. Alter S. J., Weilmuenster K. J. Single block three-dimensional volume grids about complex aerodynamic vehicles. – 1993. – № NAS 1.15: 108986.
23. Alter S., Cheatwood F. Elliptic volume grid generation for viscous CFD parametric design studies // *Fluid Dynamics Conference*. – 1996. – P. 1999.

24. Alter S. Complex volume grid generation through the use of grid reusability // 13th Computational Fluid Dynamics Conference. – 1997. – P. 1987.
25. Hollis B. R. et al. X-33 computational aeroheating predictions and comparisons with experimental data // Journal of Spacecraft and Rockets. – 2001. – Vol. 38. – No. 5. – Pp. 658–669.
26. Twigg C. Catmull-rom splines // Computer. – 2003. – Vol. 41. – No. 6. – Pp. 4–6.
27. Rassineux A., et al. Surface remeshing by local hermite diffuse interpolation // International Journal for numerical methods in Engineering. – 2000. – Vol. 49. – No. 1-2. – Pp. 31–49.
28. Суржигов С. Т. Аналитические методы построения конечно-разностных сеток для расчета аэротермодинамики спускаемых космических аппаратов // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия «Машиностроение». – 2004. – № 2. – С. 24–50.
29. Thompson J. F. A General Three-Dimensional Elliptic Grid Generation System Generation on a Composite Block Structure // Comp. Meth. In App. Mech. and Eng. № 64. 1987. Pp. 377–411.
30. Ермаков М. К., Крючкова А. С. Генерация неструктурированных тетраэдральных сеток для обтекания летательных аппаратов на основе открытых пакетов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2020. Т.21, вып. 2. <http://chemphys.edu.ru/issues/2020-21-2/articles/897/>

References

1. Winslow A. M., Numerical solution of the quasilinear Poisson equation in a nonuniform triangle mesh, *Journal of computational physics*, 1966, vol. 1, no. 2. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(66\)90001-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(66)90001-5)
2. Thompson J. F., Thames F. C., Mastin C. W., Boundary-fitted curvilinear coordinate systems for solution of partial differential equations on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies, NASA, 1977, no. NASA-CR-2729.
3. Thompson J. F., Soni B. K., Weatherill N. P. (ed.), *Handbook of grid generation*, CRC press, 1998.
4. Villamizar V., Acosta S., Elliptic grids with nearly uniform cell area and line spacing, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 2009, vol. 34, pp. 59–75.
5. Godunov S. K., Prokopov G. P., The use of moving meshes in gas-dynamical computations, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1972, vol. 12, no. 2, pp. 182–195. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(72\)90176-0](https://doi.org/10.1016/0041-5553(72)90176-0)
6. Kania L., Elliptic adaptive grid generation and area equidistribution, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1999, vol. 30, no. 5, pp. 481–491. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0363(19990715)30:5<481::AID-FLD694>3.3.CO;2-H
7. Soni B. K., et al., Solution adaptive grid strategies based on point redistribution, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, vol. 189, no. 4, pp. 1183–1204.
8. Brown K. G., Adaptive Grid Generation for Numerical Solution of Partial Differential Equations, Air Force Inst. of Tech. Wright-Patteson AFB Oh School of Engineering, 1983.
9. Soni B., Two- and three-dimensional grid generation for internal flow applications of computational fluid dynamics, *7th Computational Physics Conference*, 1985, p. 1526.
10. Soni B. K., Grid generation for internal flow configurations, *Computers & Mathematics with Applications*, 1992, vol. 24, no. 5-6, pp. 191–201.
11. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M., *Computational Methods*, M: Binom, 1987. [in Russian].
12. Nakamura S., Marching grid generation using parabolic partial differential equations // Numerical grid generation; *Symposium on Numerical Generation of Curvilinear Coordinate Systems and Their Use in the Numerical Solution of Partial Differential Equations*, 1982.
13. Edwards T., Noniterative three-dimensional grid generation using parabolic partial differential equations, *23rd Aerospace Sciences Meeting*, 1985. <https://doi.org/10.2514/6.1985-485>

14. Krylov A. A., Mikhailin V. A., Savel'ev A. D., Application of parabolic grid generator to gas dynamic problems, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, no. 7, pp. 1096–1106.
15. Steger J. L., Chaussee D. S., Generation of body-fitted coordinates using hyperbolic partial differential equations, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1980, vol. 1, no. 4, pp. 431–437. <https://doi.org/10.1137/0901031>
16. Kinsey D. W., Barth T. J., Description of a hyperbolic grid generating procedure for arbitrary two-dimensional bodies, Air Force Wright Aeronautical Labs Wright-Patterson AFB Oh, 1984.
17. Steger J. L., Generation of three-dimensional body-fitted grids by solving hyperbolic and parabolic partial differential equations, 1989, no. NASA-TM-101069.
18. Brakhage K. H., Müller S., Algebraic–hyperbolic grid generation with precise control of intersection of angles, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2000, vol. 33, no. 1, pp. 89–123.
19. Chan W. M., Steger J. L., Enhancements of a three-dimensional hyperbolic grid generation scheme, *Applied Mathematics and Computation*, 1992, vol. 51, [https://doi.org/10.1016/0096-3003\(92\)90073-A](https://doi.org/10.1016/0096-3003(92)90073-A)
20. Seki R., Efficient grid generation, 1989, No. NAS 1.26: 185034.
21. Nakamura S., Suzuki M., Noniterative three-dimensional grid generation using a parabolic-hyperbolic hybrid scheme, *25th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 1987. <https://doi.org/10.2514/6.1987-277>
22. Alter S. J., Weilmuenster K. J., Single block three-dimensional volume grids about complex aerodynamic vehicles, 1993, No. NAS 1.15: 108986.
23. Alter S., Cheatwood F., Elliptic volume grid generation for viscous CFD parametric design studies, *Fluid Dynamics Conference*, <https://doi.org/10.2514/6.1996-1999>
24. Alter S., Complex volume grid generation through the use of grid reusability, *13th Computational Fluid Dynamics Conference*, 1997. <https://doi.org/10.2514/6.1997-1987>
25. Hollis B. R., et al., X-33 computational aeroheating predictions and comparisons with experimental data, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2001, vol. 38, no. 5, pp. 658–669.
26. Twigg C., Catmull-rom splines, *Computer*, 2003, vol. 41, no. 6, pp. 4–6.
27. Rassineux A., et al. Surface remeshing by local hermite diffuse interpolation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, vol. 49, no. 1-2, pp. 31–49. [https://doi.org/10.1002/1097-0207\(20000910/20\)49:1/2<31::AID-NME921>3.0.CO;2-6](https://doi.org/10.1002/1097-0207(20000910/20)49:1/2<31::AID-NME921>3.0.CO;2-6)
28. Surzhikov S. T., Analytical Methods of Building Finite-Difference Mesh for Computation of Aerothermodynamics of Descending Spacecrafts, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. «Mechanical Engineering»*, 2004, no. 2, pp. 24–50. [in Russian].
29. Thompson J. F., A General Three-Dimensional Elliptic Grid Generation System Generation on a Composite Block Structure, *Comp. Meth. In App. Mech. and Eng.*, 1987, no. 64, pp. 377–411. DOI: 10.1016/0045-7825(87)90047-8
30. Ermakov M., Kryuchkova A., Generation of unstructured tetrahedral meshes for flow past flight vehicles based on open packages, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2020, vol. 21, no. 2. [in Russian]. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.21.2.897>

Статья поступила в редакцию 24 января 2023 г.