

Godunov – Kolgan Method for Calculating Viscous Gas Flows

Yu. V. Tunik

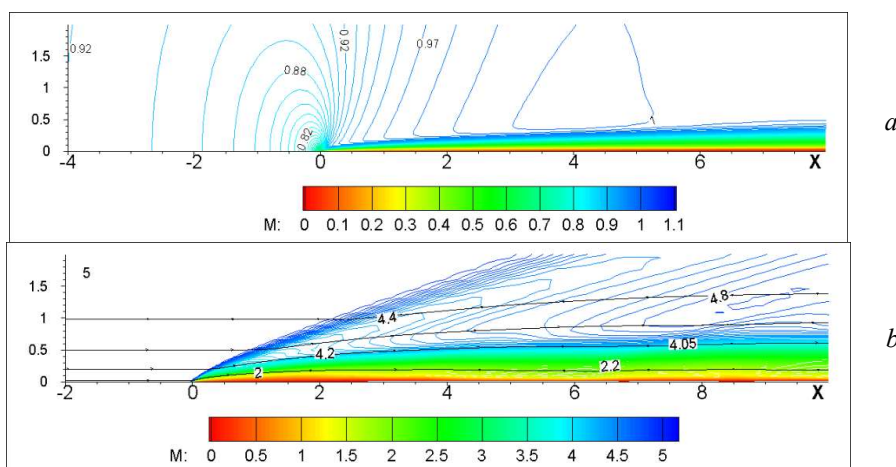
*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119192, Russia*

tunik@imec.msu.ru

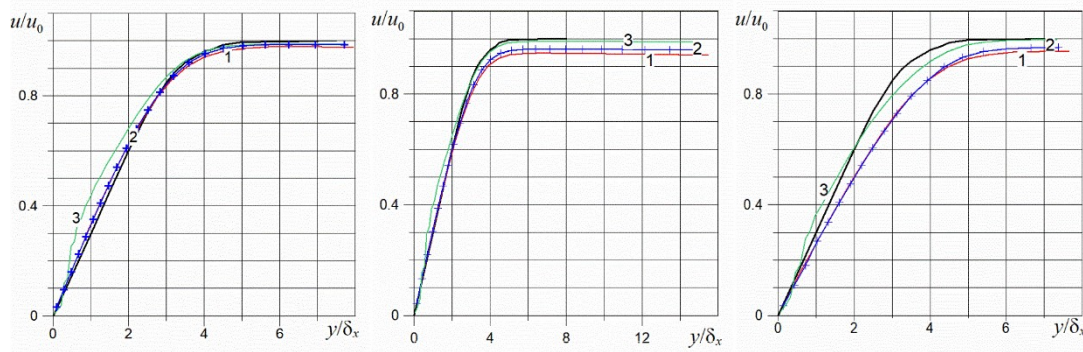
Abstract

For numerical simulation of viscous gas flows based on the Navier – Stokes equations, it is proposed to use the generalized Godunov – Kolgan scheme of the second order of approximation in spatial variables. The calculation technique is presented on the example of the problem of subsonic, trans and supersonic air flow around an infinitely thin heat-insulated plate (Fig. 1). It is shown that the proposed approach does not introduce significant complications in the construction of a numerical algorithm in comparison with the calculation of inviscid gas flows. Primary validation and verification are carried out on the basis of comparing the obtained longitudinal velocity distribution along the normal to the plate with the Blasius solution (Fig. 2). The results give hope for the acceptability of the method for solving problems of gas dynamics with complex flow geometry.

Keywords: numerical simulation, the Navier – Stokes equations, the Godunov – Kolgan scheme.



Typical patterns of transonic (a) and supersonic (b) air flow around a plate: constant Mach number lines



Longitudinal velocity distribution along the plate normal in three sections (1, 2, 3) at free flow Mach number $M_0 = 0.5, 1.01$ and 2. The black curve is the Blasius solution

УДК533.6.01+519.6

Метод Годунова – Колгана для расчета течений вязкого газа

Ю. В. Туник

*НИИ Механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,
Россия, Москва, 119192, Мичуринский проспект 1*

tunik@imec.msu.ru

Аннотация

Для численного моделирования течений вязкого газа на основе уравнений Навье – Стокса предлагается использовать обобщенную схему Годунова – Колгана второго порядка аппроксимации по пространственным переменным. Методика расчетов излагается на примере задачи обтекания бесконечно тонкой теплоизолированной пластины дозвуковым, транс и сверхзвуковым потоком воздуха. Показано, что предлагаемый подход не вносит существенных осложнений в построение численного алгоритма по сравнению с расчетом течений невязкого газа. Первичная валидация и верификация осуществляются на основе сравнения полученного распределения продольной скорости по нормали к пластине с решением Блазиуса. Результаты позволяют надеяться на приемлемость метода для решения задач газодинамики со сложной геометрией течения.

Ключевые слова: численное моделирование, уравнения Навье – Стокса, схема Годунова – Колгана.

1. Введение

Можно указать несколько подходов к расчету течений вязкого газа на основе уравнений Навье – Стокса. В работе [1], например, подробно описано численное моделирование в приближении “тонкого” слоя на основе схемы «предиктор-корректор», с вычислением конвективных членов по односторонним, а диссипативных – по симметричным разностям. В работе [2] используется комбинация метода траекторий и конечного объема, что приводит к трудоемкому процессу формирования сеточного аналога дифференциальных уравнений Навье – Стокса. Однако наиболее распространенными являются разностные схемы, основанные на методе С. К. Годунова [3–4]. Основные достоинства метода – это наглядность построения алгоритма, монотонность и неубывание энтропии. Этому подходу посвящена докторская диссертация М. В. Абакумова [5]. За основу выбрана модификация Роу – Эйнфильдта – Ошера второго порядка аппроксимации [6–7]. В диссертации справедливо отмечено, что для расчета вязких течений потоки невязкого газа на границах расчетных ячеек достаточно дополнить вязкими членами. Выписаны довольно громоздкие соотношения для расчета тензора вязких напряжений, которые зависят как от значений параметров в центрах ячеек, так и на границах расчетных ячеек (параграфы 1.2.5 и 1.2.6). Модификация Роу – Эйнфильдта – Ошера используется в [8] для решения задачи обтекания пластины потоком вязкого газа с параллеливанием на графических процессорных устройствах. В работе [9] решение задачи Римана на границах между расчетными ячейками находится по схеме AUSM (Advection Upstream Splitting Method) [10]. Отличительной чертой схемы является возможность построения второго порядка пространственной аппроксимации производных, а также выбор минимального ограничителя для каждой грани, значение которого зависит от разности параметра

на грани и в центре ячейки. В то же время, можно отметить недостаточно прозрачное описание процедуры определения параметров и пространственных производных в центральных точках боковых граней.

В данной работе для расчета течений невязкого газа предлагается использовать модификацию [11–12] схемы С. К. Годунова, разработанную на основе подхода В. П. Колгана [13]. Суть модификации заключается в том, что в пределах расчетной ячейки используется линейная интерполяция газодинамических функций, а задача Римана о распаде разрыва решается для значений параметров в промежуточной точке между центром и границей ячейки. Положение этой промежуточной точки определяется автоматически параметром α , который зависит от приращения искомой функции в расчетной ячейке: $\alpha = 0.5 \exp(-|\Delta\varphi/\varphi_0|)$. Здесь φ_0 – значение функции в центре ячейки, $\Delta\varphi$ – приращение функции φ на длине Δl , равном половине расстояния от центра до центральной точки на границе ячейки: $\Delta\varphi = \varphi' \Delta l$. При высоких значениях градиента, когда $\Delta\varphi \gg \varphi_0$ и $\alpha \approx 0$, промежуточная точка совпадает с центром ячейки, что соответствует схеме Годунова первого порядка. При малом приращении ($\Delta\varphi \ll \varphi_0$) $\alpha = 0.5$, и промежуточная точка совпадает с центральной точкой на границе ячейки, что соответствует схеме второго порядка Колгана. Отличие параметра α от 0.5 эквивалентно внесению в схему диссипативной добавки. В [13] показана монотонность схемы Колгана для одномерного по пространству линейного дифференциального уравнения. Однако в случае системы дифференциальных уравнений, описывающих распространение плоских звуковых волн в покоящейся газовой среде, монотонность схемы Колгана ($\alpha = 0.5$) не гарантирована [11]. Более того, схема Колгана не обеспечивает неубывание энтропии численного решения соответствующей системы дифференциальных уравнений при положительном шаге интегрирования по времени, что может привести к физически неоправданным результатам при численном решении задач газовой динамики. Введение промежуточной точки в пределах расчетной ячейки позволяет сохранить диссипативные свойства схемы в области высоких градиентов, обеспечить монотонность и неубывание энтропии при достаточно малом шаге по времени [11].

В двумерном случае в качестве центра наиболее распространенной ячейки в виде выпуклого четырехугольника удобно принимать точку пересечения диагоналей параллелограмма с вершинами в серединах сторон четырехугольника. В ячейке прямоугольной формы это пересечение диагоналей ромба с вершинами на серединах противоположных сторон прямоугольника. Если стороны прямоугольника параллельны осям прямоугольной системы координат, то длина диагоналей равна шагу расчетной сетки по координатным осям Δx и Δy . Четыре градиента функции по направлениям, связывающим центр четырехугольной ячейки с центрами соседних ячеек, в общем случае определяют шесть пар производных (число сочетаний из 4 по два) вдоль каждой диагонали параллелограмма. На регулярной прямоугольной сетке это число уменьшается до четырех. В соответствии с основным требованием схемы Колгана приращение функции по каждому из этих двух направлений рассчитывается по наименьшей по модулю производной. Затем определяется параметр α и значение функции в промежуточной точке на каждой из двух диагоналей параллелограмма в четырехугольной ячейке $\varphi = \varphi_0 + \alpha \Delta\varphi$. Именно это значение используется при решении задачи Римана о распаде разрыва. Исключением являются пристеночные ячейки и ячейки на границе расчетной области, для которых продольное приращение и приращение по нормали определяется по двум парам производных, поскольку известна только одна производная по нормали к стенке или границе. Для расчетной сетки все расстояния между центрами ячеек, длины сторон и диагоналей, а также углы между различными направлениями могут быть рассчитаны и сохранены до решения газодинамической задачи.

В [11] дополнительно вводится параметр β , который усиливает или ослабляет зависимость α от приращения функции: $\alpha = \exp(-\beta|\Delta\varphi/\varphi_0|)$. При малом β влияние схемной вяз-

кости снижается, но это приводит к необходимости уменьшать шаг интегрирования по времени, чтобы обеспечить неубывание энтропии численного решения. С увеличением β роль схемной вязкости возрастает, что может существенно сказаться на корректности результатов.

Несложным представляется обобщение описанной процедуры по расчету параметров, участвующих в задаче Римана, на случай нерегулярных и трехмерных сеток. В качестве центра ячейки, вообще говоря, может рассматриваться любая точка в пределах ячейки, в частности «центр масс».

2. Методика расчета на примере двумерного течения вязкого газа

Суть предлагаемой методики излагается на примере двумерных плоских и осесимметричных течений вязкого газа. Соответствующие уравнения Навье – Стокса в ортогональной системе координат (X, Y) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u^g}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u^g}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u^g}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u u^g}{\partial t} + \frac{\partial y^g [\rho u^2 + p - \tau^{xx}]}{\partial x} + \frac{\partial y^g [\rho v u - \tau^{xy}]}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho v u^g}{\partial t} + \frac{\partial y^g [\rho v u - \tau^{yx}]}{\partial x} + \frac{\partial y^g [\rho v^2 + p - \tau^{yy}]}{\partial y} &= p^g, \\ \frac{\partial \rho E u^g}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u^g [H - \tau^{xx}/\rho] - v y^g \tau^{yx} + q^x y^g - \vartheta \rho \eta v}{\partial x} + \\ + \frac{\partial \rho v u^g [H - \tau^{yy}/\rho] - u y^g \tau^{xy} + q^y y^g - \vartheta \rho \eta v^2}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\vartheta = 0$ и 1 в плоском и осесимметричном случае, соответственно; $H = h + 0.5(u^2 + v^2)$, $E = H - p/\rho$; p, ρ и h – давление, плотность и энтальпия газа; u и q^x – скорость и тепловой поток по оси абсцисс (X) , а v и q^y по оси ординат Y . Тепловой поток $\vec{q} = -\lambda \text{grad} T$, λ – коэффициент теплопроводности, T – температура: $T = \psi p/\rho$, ψ – молекулярный вес газа; τ^{xx} , τ^{yy} и $\tau^{xy} = \tau^{yx}$ – компоненты тензора напряжений, связанные с тензором скоростей деформации соотношениями $\tau^{ij}/\rho = \eta \text{div} \vec{u} + 2\nu e^{ij}$, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\tau^{xx}}{\rho} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \vartheta \cdot \frac{v}{y} \right) + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\tau^{yy}}{\rho} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \vartheta \cdot \frac{v}{y} \right) + 2\nu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\tau^{xy}}{\rho} &= \frac{\tau^{yx}}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости, а $\eta = -2\nu/3$ – второй коэффициент вязкости.

Чтобы по схеме Годунова найти величины $\rho, \rho u, \rho v$ и ρE на верхнем временном слое, в случае вязкого газа необходимо определить компоненты тензора напряжений и тепловые потоки на границах расчетных ячеек. Удобство описанной выше обобщенной схемы Годунова – Колгана обусловлено тем, что она предполагает вычисление производных всех газодинамических параметров по любым двум направлениям в расчетной ячейке, в частности, по

х и у. Предполагая непрерывность этих производных при сквозном счете, естественно считать, что значение каждой из них на границе между соседними ячейками равно сумме значений производных в центрах ячеек с весовыми коэффициентами, которые пропорциональны расстоянию от центра соседней ячейки до середины общей границы. Коэффициенты переноса λ и ν рассчитываются при температуре и плотности, значения которых на границе между ячейками получены в результате решения задачи о распаде разрыва для невязкого газа с учетом описанной выше коррекции, зависящей от приращения этих величин в пределах ячейки. Вычисленные таким образом коэффициенты переноса и производные определяют компоненты тензора напряжений и тепловые потоки на границах расчетных ячеек.

Таким образом, предлагаемый подход не вносит существенных осложнений в построение численного алгоритма для расчета вязких течений по сравнению с расчетом течений невязкого газа по обобщенной схеме Годунова – Колгана второго порядка аппроксимации [6].

Для первичной валидации и верификации предлагаемого численного метода решается задача об обтекании теплоизолированной пластины различными потоками воздуха.

3. Постановка задачи обтекания теплоизолированной пластины

Бесконечно тонкая теплоизолированная пластина мгновенно помещается в поток воздуха под нулевым углом атаки и скольжения. Длина пластины по потоку $L = 6$ см, в поперечном направлении пластина считается бесконечно тонкой. задается число Маха M_0 набегающего потока, давление p_0 и температура T_0 . Коэффициенты удельной теплоемкости воздуха C_P и C_V , а, следовательно, показатель адиабаты γ рассчитываются с использованием приведенных функций Гиббса для кислорода и азота, т.е. эти величины зависят от температуры

$$C_P = \mu^{-1} \sum_k \xi_k C_{Pk}, \quad C_V = \mu^{-1} \sum_k \xi_k C_{Vk}, \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad (3)$$

Здесь μ – молекулярный вес воздуха; ξ_k – относительная молярная концентрация k -й компоненты воздуха. Аналогично по данным для каждой из компонент рассчитываются коэффициенты кинематической вязкости ν и температуропроводности воздуха χ

$$\nu = \sum_k \xi_k \nu_k, \quad \chi = \sum_k \xi_k \chi_k \quad (4)$$

Коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности кислорода и азота ν_k и χ_k рассчитываются по коэффициентам диффузии и соответствующим числам Шмидта Sc_k и Прандтля Pr_k , значения которых приводятся в таблице 1

$$\nu_k = Sc_k D_k, \quad \chi_k = \frac{\nu_k}{Pr_k}, \quad D_k = \frac{1}{3} \langle v_k^T \rangle l \gg \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8R_0 T}{\pi \mu_k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n\sigma}} \quad (5)$$

Здесь R_0 – универсальная газовая постоянная; μ_k – молекулярный вес; $\langle v_k^T \rangle$ – осредненная тепловая скорость k -й газовой компоненты; $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул в смеси, которая определяется средней по составу площадью сечения столкновений $\sigma = \sum_k \xi_k \sigma_k = \sum_k \xi_k d_k^2 \pi/4$, d_k – эффективные диаметры столкновений для молекул k -й компоненты (табл. 1).

В расчетах, в тексте и на рисунках давление нормировано по давлению в набегающем потоке, плотность – по плотности воздуха $\rho_0 = \mu p_0 / R_0 T_0$, все длины даются в миллиметрах ($l_0 = 1$ мм), скорость отнесена к $U_0 = \sqrt{p_0 / \rho_0}$, время t – к $t_0 = l_0 / U_0$. Анализ размерности параметров набегающего воздушного потока показывает, что решение определяется зада-

нием давления p_0 , температуры T_0 и числа Маха M_0 . При этом однозначно определяется число Прандтля Pr в набегающем потоке и Рейнольдса $Re_{x=1}$ на единичной длине l_0 .

Таблица 1

Диаметр столкновений, числа Шмидта и Прандтля для компонент воздуха

Компонента	d_k (мм)	Sc_k	Pr_k
O ₂	0.3×10^{-6}	0.74	0.72
N ₂	0.3×10^{-6}	0.98	0.72

Интерес представляет картина течения, складывающаяся в процессе формирования вязкого слоя у пластины, а также возникающая сила аэродинамического сопротивления, или сила трения.

3.1. Расчетная область, граничные и начальные условия

Задача решается в прямоугольной декартовой системе координат (X, Y): ось X лежит в плоскости пластины и указывает направление набегающего потока, ось Y перпендикулярна пластине (рис. 1). Пластине на оси абсцисс соответствует отрезок $[0, 60]$. Слева на входе расчетная область ограничена прямой $x = -x_1$. Правая граница расчетной области задана прямой $x = x_2 = 90$. В силу симметрии задача решается в полуплоскости $y \geq 0$. Верхняя граница задается прямой $y = y_N$, при этом $y_N = x_1 = 15$.

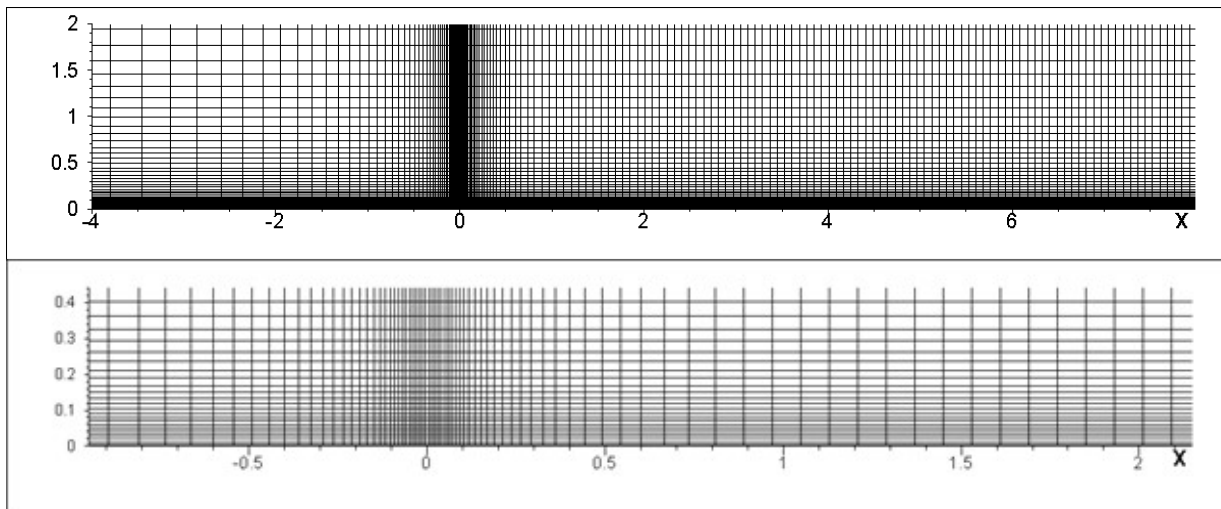


Рис. 1. Фрагмент расчетной сетки в окрестности начальной точки пластины $x = 0$ при различном увеличении

На входе в расчетную область параметры набегающего дозвукового потока могут меняться из-за идущих вверх по потоку возмущений, обусловленных формированием вязкого слоя на пластине. Поэтому продольная скорость при $x = -x_1$ определяется по заданному давлению p_0 из условия сохранения инварианта Римана на характеристике, идущей навстречу потоку. На выходе скорость истечения из расчетной области также определяется по давлению p_0 из условия сохранения соответствующего инварианта Римана. На верхней границе задаются нулевые производные параметров по оси ординат. На пластине обеспечиваются условия нулевого потока тепла и нулевой скорости. В результате на пластине, то есть при

$0 \leq x \leq 60$ и $y = 0$, появляются отличные от нуля градиенты продольной и поперечной скорости. Градиенты скорости на поверхности пластины определяют силу трения

$$F = \int_0^L \tau_{y=0}^{xy} dx = \int_0^L \tau_w dx = \int_0^L \left[\rho v \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_{y=0} dx \quad (5)$$

При расчете коэффициента вязкости на пластине учитываются изменения температуры и плотности газа, обусловленные торможением до нулевой скорости. Эти изменения рассчитываются при давлении, полученном в результате решения задачи распада разрыва на пластине, и сохранении полной энтальпии в пристеночной ячейке.

3.2. Расчетная сетка

По вертикали расчетная область разбита на $N = 60$ ячеек. Расчеты проводятся на прямоугольной сетке со сгущением по оси ординат к пластине. Ближайшие к оси абсцисс 6 ячеек имеют равный шаг по y , размер остальных ячеек растет в геометрической прогрессии при удалении от оси абсцисс. Выбранное сгущение обеспечивает попадание не менее трех ячеек в вязкий пристеночный слой с толщиной автомодельного пограничного слоя $\delta_x = x/\sqrt{\text{Re}_x} = x/\sqrt{ux/\nu}$ при $x = 1$, т.е. на единичном расстоянии от головной точки пластины. В процессе решения проверяется выполнение базового требования к расчетной сетке, связанное с тем, что коэффициент схемной вязкости в ближайших к пластине ячейках не должен по порядку величины превышать коэффициент вязкости газа ν . В [9] показано, что кинематический коэффициент схемной вязкости при звуковых возмущениях покоящейся газовой среды $\nu_N \sim 0.5(1 - 2\alpha)a_0\Delta y$, где a_0 – скорость звука в набегающем потоке. Следовательно, размер ячеек около пластины должен удовлетворять неравенству $\Delta y \leq 2\nu/[a_0(1 - 2\alpha)]$. С учетом того, что $\alpha = 0.5 \exp(-\beta|\Delta\varphi/\varphi_0|)$, это условие при малой величине нормированного приращения $\beta|\Delta\varphi/\varphi_0|$ эквивалентно неравенству

$$\beta \left| \frac{\Delta\varphi}{\varphi_0} \right| \Delta y \leq \frac{\nu}{a_0} = \frac{M_0}{\text{Re}_{x=1}} \quad (6)$$

В расчетах $\beta = 0.1$. По оси абсцисс расчетная сетка имеет такое же, как по оси ординат, сгущение от сечения входа $x = -x_1$ к головной точке пластины $x = 0$. При $x > 0$ размер первых $N/2$ ячеек симметрично увеличивается, а далее шаг Δx сохраняет свое значение.

4. Результаты и обсуждение

Поставленная задача не является автомодельной из-за конечной длины пластины. Однако можно ожидать, что полученное решение будет совпадать с известным автомодельным решением Блазиуса для пограничного слоя на полубесконечной пластине в окрестности начальной точки пластины. Сравнение полученного в этой области численного решения с решением Блазиуса можно рассматривать как один из способов валидации и верификации предлагаемой методики расчета вязких течений.

4.1. Дозвуковое обтекание пластины

В [4] такое сравнение проводится для очень длинной пластины в потоке, имеющем скорость $u_0 = 10$ м/с. В условиях нормальной атмосферы этой скорости соответствует число Маха $M_0 \approx 0.0289$, коэффициент кинематической вязкости воздуха, рассчитанный в данной работе по соотношениям (4–5), $\nu \approx 1.5 \times 10^{-5}$ м²/с, что практически совпадает с известным табличным значением, число Рейнольдса $\text{Re}_{x=1} \approx 665.4$, толщина автомодельного пограничного слоя на единичной длине $\delta_{x=1} \approx 0.039$. В отличие от [4] в данной работе рассматривается

динамика формирования вязкого слоя. Его толщина нарастает постепенно (рис. 2) и плавно (Video_U = 10). Вязкость оказывает заметное влияние на течение перед пластиной. В целом картина течения напоминает распространение звуковых возмущений от точечного источника. Распространяющиеся возмущения меняют параметры набегающего на пластину потока. В результате решение не выходит на стационарный режим в обозримых временных пределах, о чем можно судить по изменению силы трения F (рис. 3) и по распределению трения τ_w на пластине в последовательные моменты времени (рис. 4). Тем не менее, на начальном участке пластины распределение продольной скорости со временем приближается к распределению Блазиуса (рис. 5). На шаге Δu приращение $|\Delta u/u_0| < 0.1$ (рис. 5, б), что соответствует условию (6) при указанных выше значениях чисел Маха и Рейнольдса.

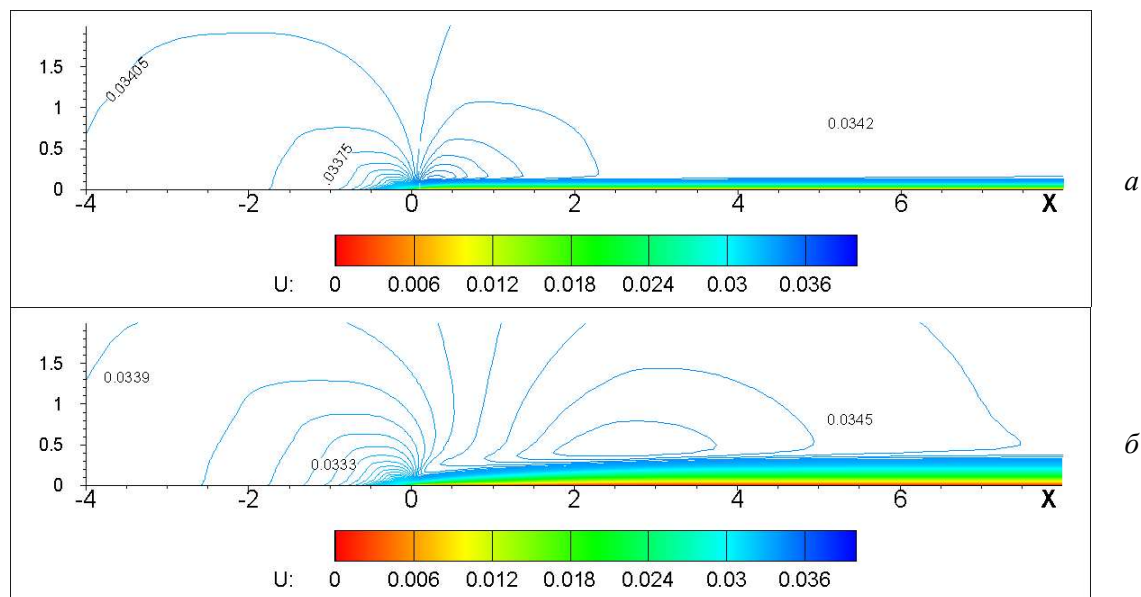


Рис. 2. Линии постоянного значения продольной скорости (u/U_0) в области головной точки пластины при числе Маха набегающего потока $M_0 \approx 0.0289$, $t = 25$ (а) и $t = 200$ (б)

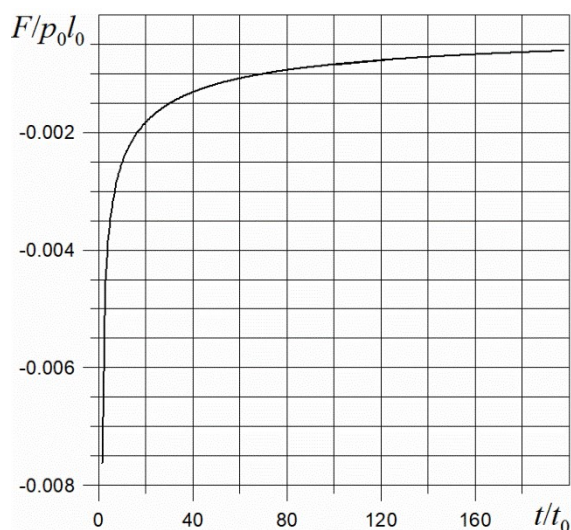


Рис. 3. Изменение силы трения в потоке с числом Маха набегающего потока $M_0 \approx 0.0289$

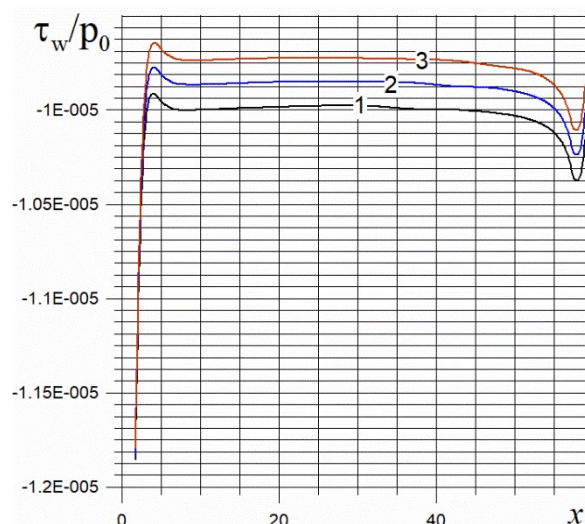


Рис. 4. Распределение вязких напряжений по длине пластины при $t = 190$, 195 , 200 (кривые 1, 2, 3, соответственно)

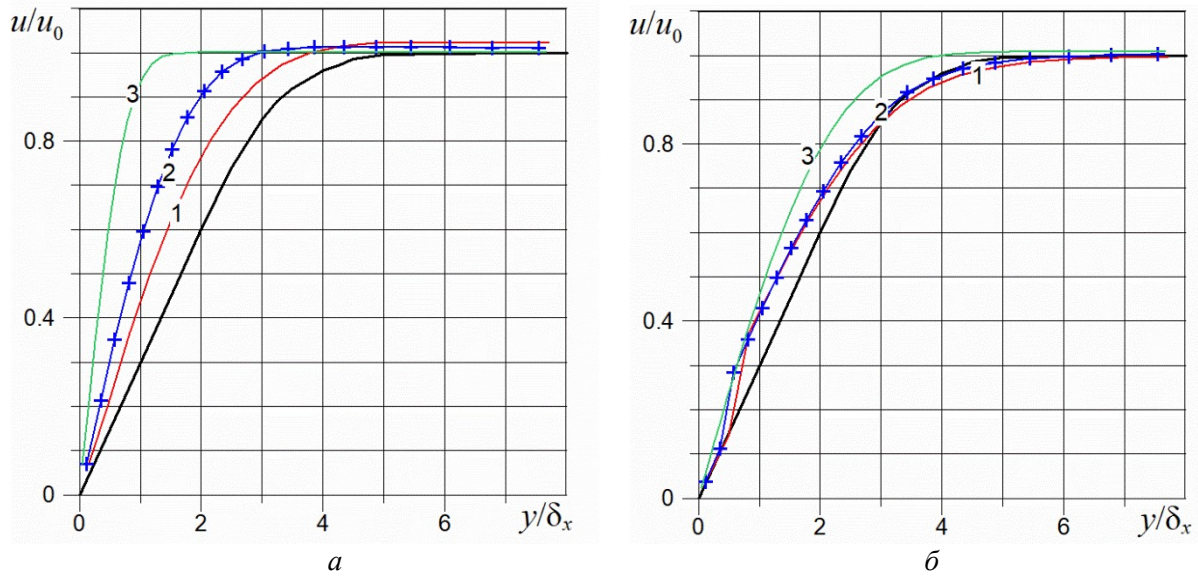


Рис. 5. Изменение продольной скорости по оси ординат в сечениях $x = 0.5, 1.0$ и 5 , (кривые 1, 2, 3, соответственно) при $t = 25$ (а) и 200 (б). Жирная кривая черного цвета – решение Блазиуса

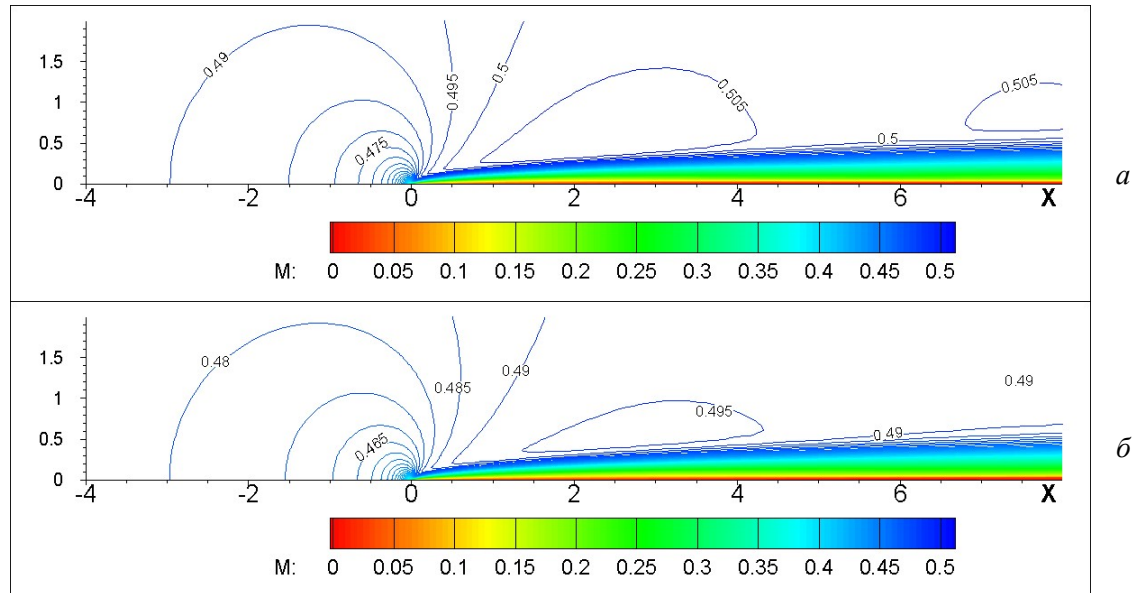


Рис. 6. Линии постоянного число Маха в области головной точки пластины при $M_0 = 0.5$, $t = 25$ (а) и 200 (б)

Аналогичная картина формирования вязкого слоя складывается и в потоке с числом Маха $M_0 \approx 0.5$ в условиях атмосферного воздуха на высоте 24 км, то есть при давлении $p_0 \approx 0.0293$ атм и температуре $T_0 \approx 220.6$ К. На этой высоте коэффициент кинематической вязкости воздуха, рассчитанный по соотношениям (4–5), $\nu \approx 3.268 \times 10^{-4}$ м²/с, т.е. не более, чем на 6 % отличается от табличного значения, число Рейнольдса $Re_{x=1} \approx 456$, толщина автомодельного пограничного слоя $\delta_{x=1}$ возрастает до 0.0468. Утолщение вязкого слоя заметно и в расчетах (см. рис. 2 и 6). На расстоянии порядка единицы распределение продольной скорости по оси ординат мало отличается от решения Блазиуса (рис. 7, а). Из-за падения скорости звука медленнее меняются параметры потока перед пластиной, поэтому изменение силы трения напоминает выход на стационарный режим обтекания пластины (рис. 8, кривая 1). Однако взаимодействие пограничного слоя с набегающим потоком периодически генерирует практически звуковые возмущения (Video_M = 05), которые приводят к низко амплитудной хаотизации вязких напряжений на пластине (рис. 9, кривая 1).

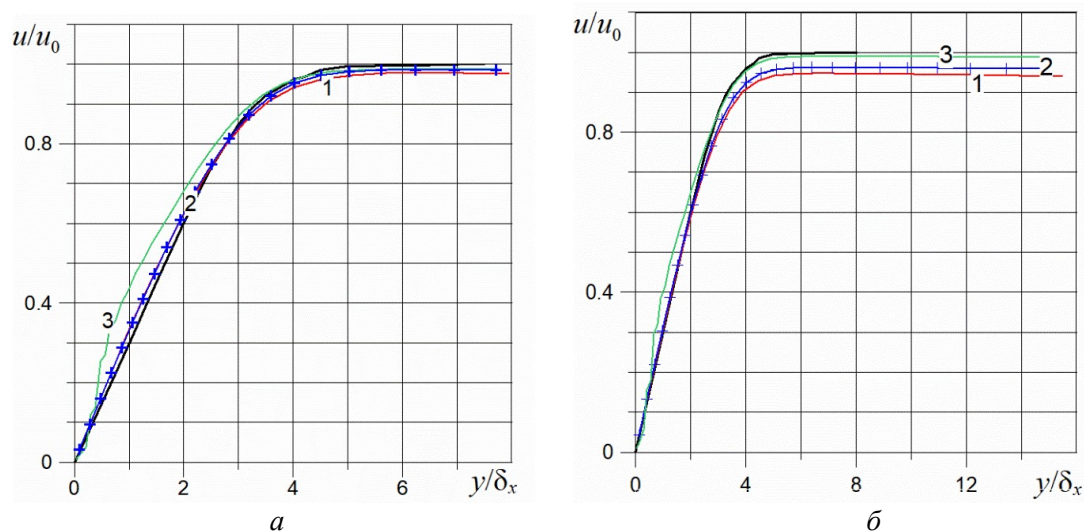


Рис. 7. Изменение продольной скорости по оси ординат в сечениях $x=0.5$, 1.0 и 5 , (кривые 1, 2, 3, соответственно) на высоте $H=24$ км при $M_0=0.5$ и $t=200$ (а), а также при $M_0=1.01$ и $t=200$ (б). Жирная кривая черного цвета – решение Блазиуса

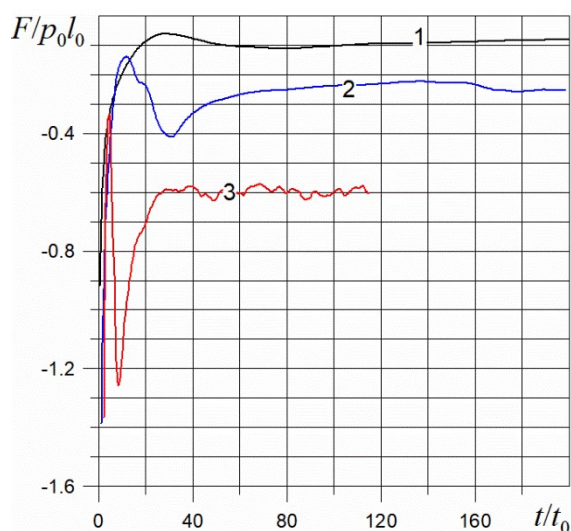


Рис. 8. Сила трения на высоте $H=24$ км при $M_0=0.5$, 1.01 , 2 (кривые 1, 2, 3, соответственно)

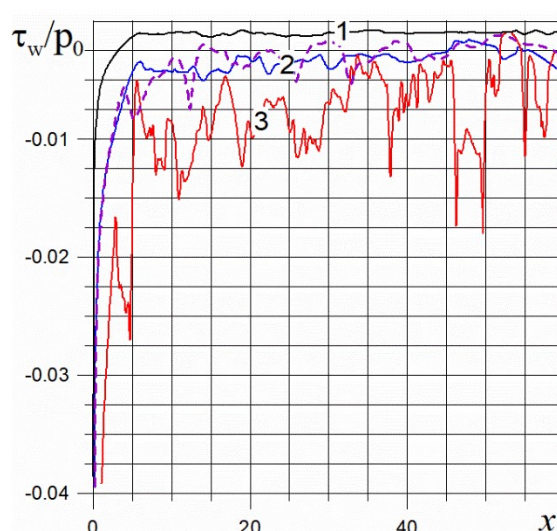


Рис. 9. Распределение вязких напряжений по длине пластины на высоте $H=24$ км при $M_0=0.5$ ($t=200$), 1.01 ($t=200$), 2 ($t=115$), кривые 1, 2, 3, соответственно

4.2. Обтекание пластины транс и сверхзвуковым потоком воздуха

При трансзвуковой скорости набегающего потока, в частности, при $M_0=1.01$ (см. рис. 8, кривая 2) число Рейнольдса $Re_{x=1} \approx 921$, толщина автомодельного пограничного слоя $\delta_{x=1}$ уменьшается 0.03295 . Вверх по потоку распространяется уже волна сжатия Римана, а слабая ударная волна (рис. 10, а). В результате на пластину набегают дозвуковой поток (рис. 10, б). Распределение продольной скорости по оси ординат на начальном участке пластины практически совпадает с решением Блазиуса (см. рис. 7, б). Благодаря практически неменяющимся параметрам потока непосредственно перед пластиной (Video_M=1i01) сила трения со временем выходит на постоянное значение (рис. 8, кривая 2). Распределение напряжений по длине пластины имеет хаотичный вид, но с более высокой амплитудой пульсаций, чем при $M_0=0.5$ (см. рис. 9, кривые 1, 2). Эти пульсации сохраняются и в расчетах по схеме Годунова первого порядка ($\alpha=0$, рис. 9, пунктирная кривая). На этом основании можно предположить, что возникающие пульсации являются проявлением развития турбулентности в вязком слое.

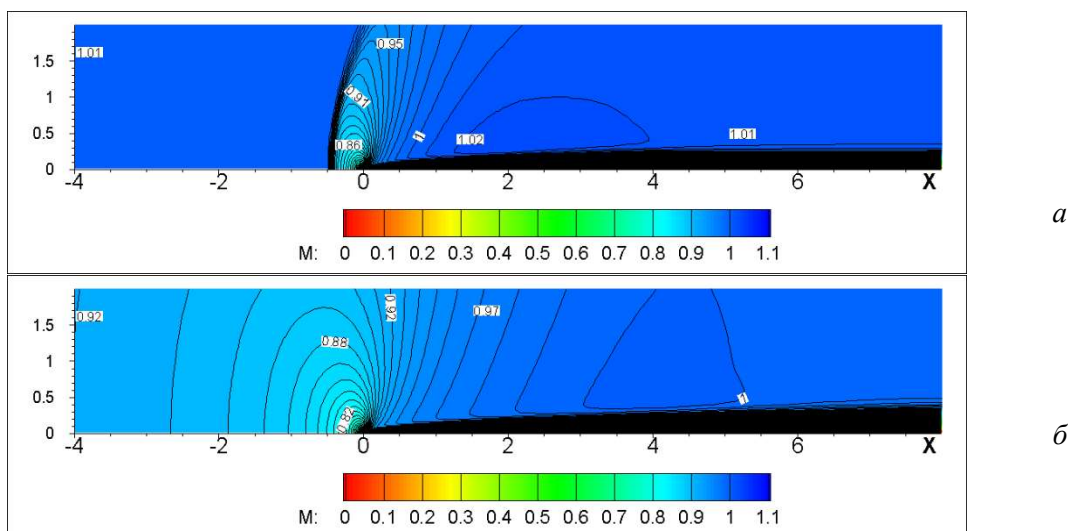


Рис. 10. Линии постоянного числа Маха в области головной точки пластины при $M_0 = 1.01$, $t = 25$ (а) и 200 (б)

Картина течения принципиально меняется при обтекании пластины сверхзвуковым потоком с числом Маха $M_0 = 2$. В этом случае число Рейнольдса, вычисленное по скорости набегающего потока на единичном расстоянии от начальной точки пластины $Re_{x=1} \approx 1824$, толщина автомодельного пограничного слоя $\delta_{x=1} = 0.0234$. Торможение потока приводит к формированию установившейся наклонной, слегка искривленной ударной волной, идущей практически от начальной точки пластины (рис. 11). Картина течения здесь напоминает стационарное обтекание сверхзвуковым потоком невязкого газа заостренного плоского тела. Разница заключается в том, что вязкий слой генерирует возмущения (Video_M=2), которые в виде хаотичных пульсаций отражаются на силе трения (см. рис. 8, кривая 3) и вязких напряжениях на поверхности пластины (см. рис. 9, кривая 3). Изменение скорости, температуры и плотности газа за ударной волной приводит к изменению числа параметров потока, который фактически набегаем на пластину. В результате распределение продольной скорости отклоняется от решения Блазиуса (рис. 12, а). Уменьшив значение числа Рейнольдса примерно на 45 %, можно совместить распределение продольной скорости при $x = 0.5$ и 1 с решением Блазиуса.

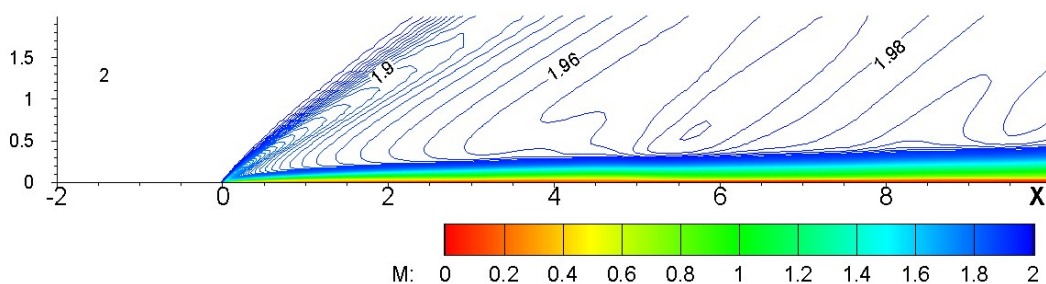


Рис. 11. Линии постоянного число Маха в области головной точки пластины на высоте 24 км при $M_0 = 2$ и $t = 92.5$

В случае набегающего воздушного потока с числом Маха $M_0 = 5$ на высоте 32 км аналогичное совмещение численного решения для распределения продольной скорости по оси ординат (рис. 12, б) с решением Блазиуса происходит при уменьшении числа Рейнольдса, вычисленного по параметрам невозмущенного потока, в четыре раза.

На указанной высоте давление в набегающем потоке воздуха $p_0 = 8.7733 \times 10^{-3}$ атм, температура $T_0 = 228.5$ К, коэффициент кинематической вязкости $\nu = 1.15 \times 10^{-3}$ м²/с, число Рейнольдса в невозмущенном потоке $Re_{x=1} \approx 1317$, $\delta_{x=1} = 0.0276$. В целом картина течения

подобна той, что наблюдается при $M_0 = 2$ на высоте $H = 24$ км (рис. 13). Вязкий слой генерирует возмущения, сила трения и амплитуда пульсаций напряжения на пластине возрастают более, чем на порядок (рис. 14).

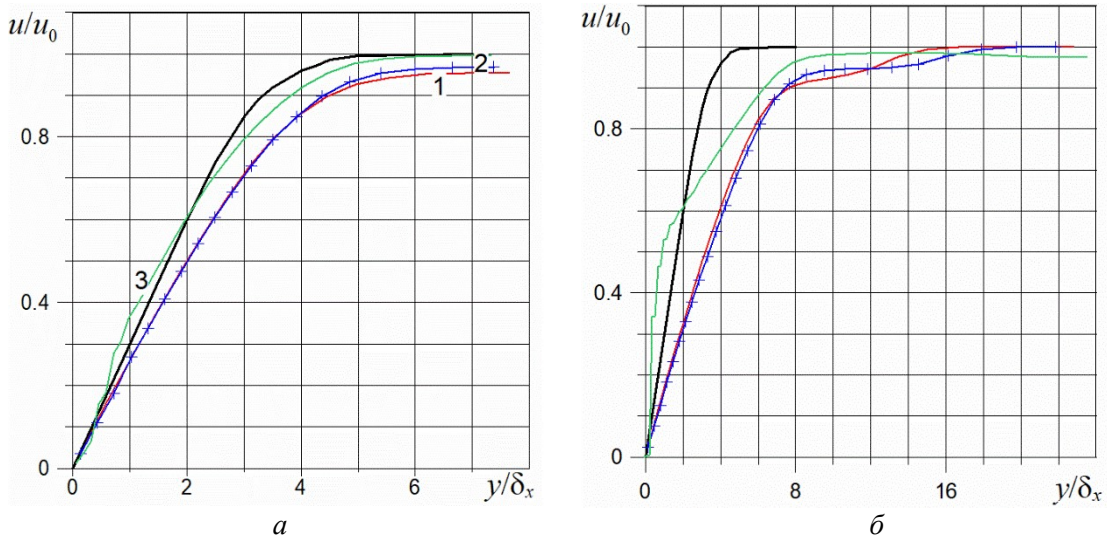


Рис. 12. Изменение продольной скорости по оси ординат в сечениях $x = 0.5, 1.0$ и 5 , (кривые 1, 2, 3, соответственно) на высоте $H = 24$ км при $M_0 = 2$ и $t = 115$ (а), а также на высоте 32 км при $M_0 = 5$ и $t = 120$ (б). Жирная кривая черного цвета – решение Блазиуса

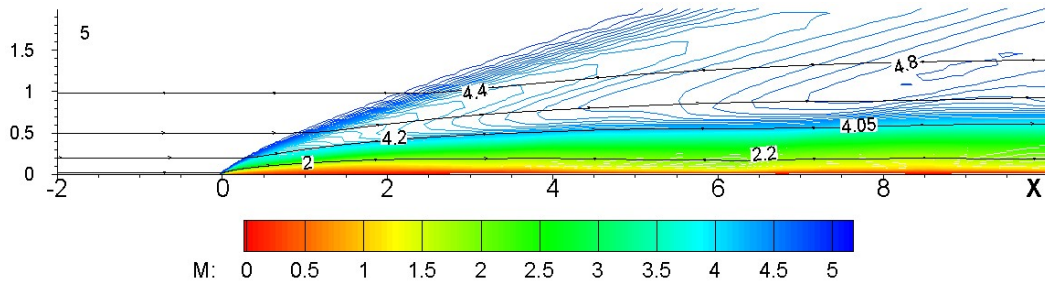


Рис. 13. Линии постоянного числа Маха вначале пластины на высоте 32 км при $M_0 = 5$ и $t = 120$

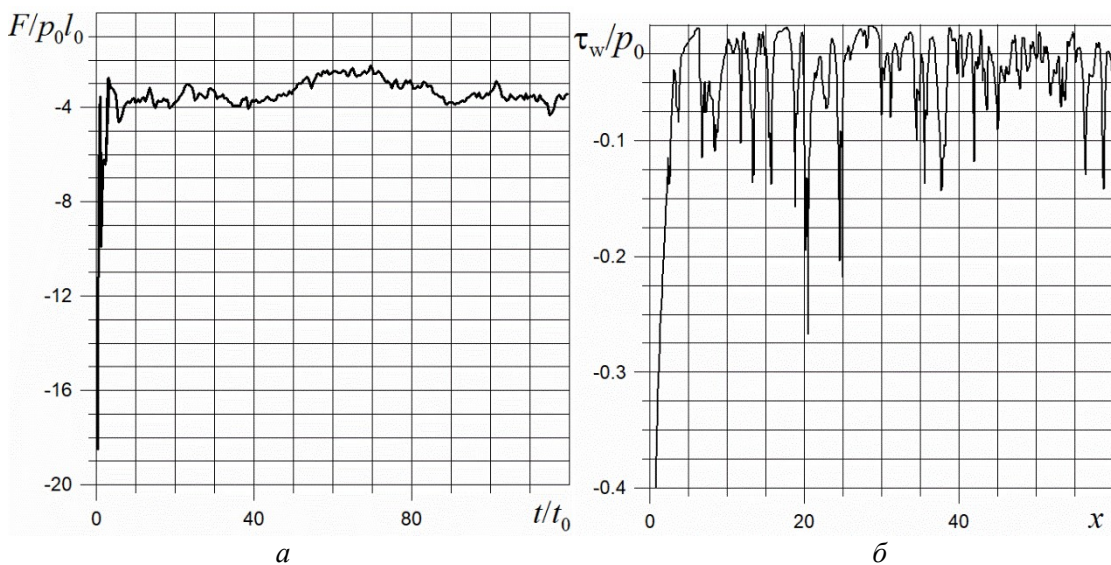


Рис. 14. Сила трения (а) и распределение вязких напряжений по длине пластины (б) на высоте $H = 32$ км при $M_0 = 5$

5. Заключение

1. Результаты расчета обтекания бесконечно тонкой теплоизолированной пластины конечной длины подтверждают приемлемость разработанной методики численного моделирования течений вязкого газа на основе уравнений Навье – Стокса. Предлагаемый подход не вносит существенных осложнений в построение численного алгоритма по сравнению с расчетом течений невязкого газа по обобщенной схеме Годунова – Колгана второго порядка аппроксимации.

2. При дозвуковой скорости набегающего потока течение напоминает распространение звуковых возмущений от точечного источника. Распространяющиеся возмущения меняют параметры набегающего на пластину потока. В результате решение не выходит на стационарный режим. Распределение продольной скорости в поперечном к потоку направлении на начальном участке пластины мало отличается от автомодельного решения Блазиуса для полубесконечной пластины. Со временем отклонение уменьшается.

3. При трансзвуковой скорости навстречу потоку распространяется слабая ударная волна, течение остается неустановившимся, но сила трения со временем выходит на постоянное значение. Распределение продольной скорости в поперечном к потоку направлении на начальном участке пластины практически совпадает с автомодельным решением Блазиуса для полубесконечной пластины. Вязкий слой генерирует возмущения, напряжение трения на пластине приобретает пульсирующий, стохастический характер.

4. При натекании сверхзвукового потока течение напоминает обтекание заостренного тела с криволинейной ударной волной, присоединенной к начальной точке пластины. Изменение параметров потока за ударной волной приводит к заметному отклонению продольной скорости от распределения Блазиуса. Однако простое аффинное преобразование, связанное с изменением числа Рейнольдса, устраняет это отклонение. Пульсирующий характер приобретает не только напряжение трения на пластине, но и сила трения. Со временем средняя величина силы трения выходит на постоянное значение. С ростом числа Маха набегающего потока растет и сила трения, и амплитуда пульсаций силовых напряжений на пластине, и отклонение от распределения Блазиуса, но при сохранении подобия.

Литература

1. Максимов Ф.А., Чураков Д.А., Шевелев Ю.Д. Разработка математических моделей и численных методов для решения задач аэродинамического проектирования на многопроцессорной технике // ЖВММФ. 2011. Т. 51. № 2. С. 303–328.
2. Шайдуров В.В., Щепановская Г.И., Якубович М.В. Численное моделирование течений вязкого теплопроводного газа в канале // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18. № 4. С. 77–89.
3. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47(89). № 3. С. 271–306.
4. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н, Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука. 1976. 400 с.
5. Абакумов М.В. Методика моделирования течений вязкого газа в ортогональных криволинейных координатах // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 05.13.18. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова. 2020. 348 с.
6. Roe P. L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comput. Phys. 1981. Vol. 43. Pp. 357–372.
7. Osher S. Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximation // SIAM J. Numer. Anal. 1984. Vol. 21, No. 2. Pp. 217–235.
8. Карпенко А.Г. Численное решение задач гидроаэромеханики на графических процессорах. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.05. Санкт-Петербург, СПГУ. 2013, 178 с.

9. Котов Д.В., Суржииков С.Т. Расчет течений вязкого и невязкого газа на неструктурированных сетках с использованием схемы AUSM //Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Т. 4. № 1. С. 36–54.
10. Liou M.-S., Steffen C. A new flux splitting scheme // *J. Comput. Phys.* 1993. Vol. 107. Pp. 23–39.
11. Туник Ю.В. Численное решение тестовых задач на основе модифицированной схемы С.К. Годунова // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2018. Т. 58. № 10. С. 1629–1641.
12. Туник Ю.В. Проблемы численного моделирования на основе некоторых модификаций схемы Годунова//*Физико-химическая кинетика в газовой динамике.* 2018. Т. 19, вып. 1. <http://chemphys.edu.ru/issues/2018-19-1/articles/701/>. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.19.1.701>
13. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики// *Ученые записки ЦАГИ.* 1972. Т. III. № 6. С. 68–77.

References

1. Maksimov F. A., Churakov D. A., Shevelev Yu. D., Development of mathematical models and numerical methods for solving aerodynamic design problems on multiprocessor technology, *ZhVMMF*, 2011, vol. 51, no. 2, pp. 303–328. [in Russian]
2. Shaidurov V. V., Shchepanovskaya G. I., Yakubovich M. V., Numerical simulation of viscous heat-conducting gas flows in a channel, *Computational technologies*, 2013, vol. 18, no. 4, pp. 77–89. [in Russian]
3. Godunov S. K., Differential method for numerical calculation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations, *Mathematical Digest*, 1959, vol. 47(89), no. 3, pp. 271–306. [in Russian]
4. Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Kraiko A. N., Prokopov G. P., *Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics*, Moscow: Nauka, 1976, 400 p. [in Russian]
5. Abakumov M. V., *A technique for modeling viscous gas flows in orthogonal curvilinear coordinates*, Ph. Doctor’s thesis, Moscow, Lomonosov MSU, 2020, 348 p. [in Russian]
6. Roe P. L., Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, *J. Comput. Phys.*, 1981, vol. 43, pp. 357–372.
7. Osher S., Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximation, *SIAM J. Numer. Analys.*, 1984, vol. 21, no. 2, pp. 217–235.
8. Karpenko A. G., Numerical solution of hydroaeromechanics problems on graphic processors, Doctor’s thesis, St. Petersburg, SPbU, 2013, 178 p. [in Russian]
9. Kotov D. V., Surzhikov S. T., Calculation of viscous and nonviscous gas flows on unstructured grids using the AUSM scheme, *Computational Continuum Mechanics*, 2011, vol. 4, no. 1, pp. 36–54. [in Russian]
10. Liou M.-S., Steffen C., A new flux-splitting scheme, *J. Comput. Phys.*, 1993, vol. 107, pp. 23–39.
11. Tunik Yu. V., Numerical solution of test problems based on the modified of Godunov’s scheme, *ZhVMMF*, 2018, vol. 58, no. 10, pp. 1629–1641. [in Russian]
12. Tunik Yu. V., Problems of numerical modeling on the basis of some modifications of the Godunov’s scheme, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2018, vol. 19, no. 1 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2018-19-1/articles/701/>. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.19.1.701>
13. Kolgan V. P., Application of the principle of minimum derivative values to the construction of finite-difference schemes for calculating discontinuous solutions of gas dynamics, *Scientific Notes TsAGI*, 1972, vol. III, no. 6, pp. 68–77. [in Russian]

Статья поступила в редакцию 6 ноября 2022 г.