

# Experience in Using Algebraic Turbulence Models within the 2D-RANS Model for Calculating the Heating of Bodies of the Simplest Shapes in a Supersonic Flow

Sergey T. Surzhikov

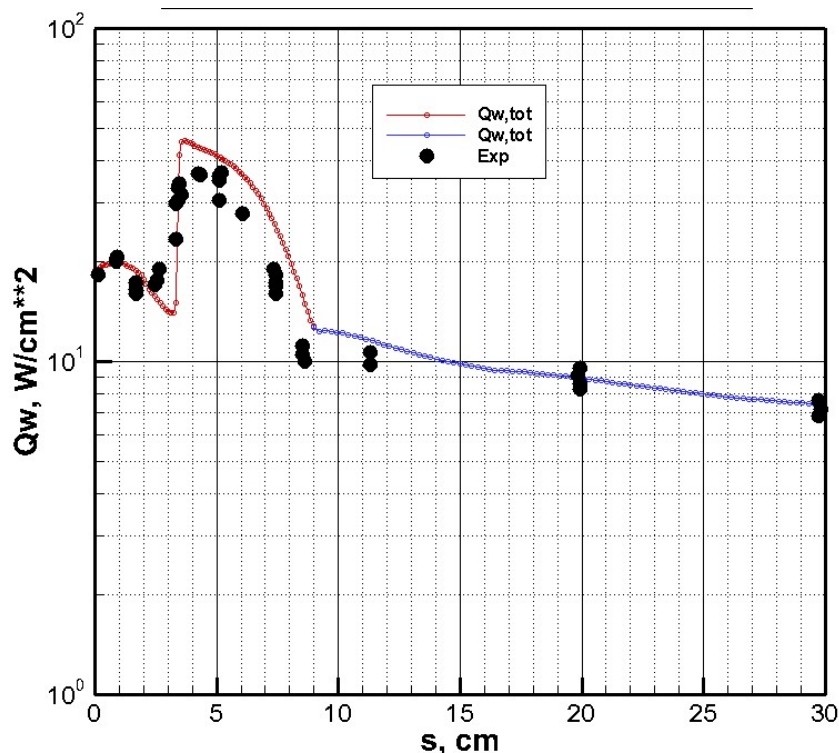
*Ishlinskyi Institute for Problems in Mechanics Russian Academy of Sciences (IPMech RAS),  
Moscow, 119526, Russia*

surg@ipmnet.ru

## Abstract

A two-dimensional model of heating the surface of cone-shaped bodies is presented, based on the Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) equations together with algebraic turbulence models. The problem of choosing the boundary of a turbulent boundary layer when solving a problem using the RANS model is discussed. A comparison was made of the intensity of convective heating of surfaces up to 400 cm long at  $M \sim 6 \div 20$  and Reynolds numbers up to  $Re \sim 4 \times 10^7$ .

Keywords: algebraic models of turbulence, RANS model, supersonic flow around cone-shaped bodies.



Distribution of convective heat flux density along the surface of the experimental model. Model of turbulent mixing BLM when specifying a smooth laminar-turbulent transition at  $Re_T = (2 \div 5) \times 10^6$

УДК 533.92:533.6.01

# Опыт использования алгебраических моделей турбулентности в рамках 2D-RANS модели для расчета нагрева тел простейших форм в сверхзвуковом потоке

С. Т. Суржиков

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук  
Россия, Москва, 119526, проспект Вернадского, д. 101-1*

[surg@ipmnet.ru](mailto:surg@ipmnet.ru)

## Аннотация

Представлена двухмерная модель нагрева поверхности конусообразных тел, основанная на усредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье – Стокса (RANS) совместно с алгебраическими моделями турбулентности. Обсуждается проблема выбора границы турбулентного пограничного слоя при решении задачи с использованием RANS-модели. Выполнено сравнение интенсивности конвективного нагрева поверхностей протяженностью до 400 см при  $M \sim 6 \div 20$  и числа Рейнольдса до  $Re \sim 4 \times 10^7$ .

Ключевые слова: алгебраические модели турбулентности, RANS модель, сверхзвуковое обтекание конусообразных тел.

## 1. Введение

Моделирование турбулентных потоков остается актуальным в настоящее время несмотря на то, что детальный анализ сопутствующих проблем был выполнен уже более 30 лет назад (см., например, [1–5]). В значительном числе работ по изучению нагрева поверхности затупленных и удлиненных гладких тел в гиперзвуковых потоках показано, что алгебраические модели турбулентного смешения [3, 4, 6–11] дают хорошее согласие с экспериментальными данными. Эти модели хорошо себя зарекомендовали и при анализе более сложных течений, таких как трехмерное (пространственное) обтекание лобовых поверхностей спускаемых космических аппаратов [12–14]. Важным достоинством алгебраических моделей является использование исходной гипотезы Прандтля о локальной зависимости интенсивности турбулентного смешения от функции вихря скорости вблизи поверхности, эвристически построенной теории, а затем и экспериментально установленных данных по трехзонной структуре пограничного слоя. Связь между аппроксимациями зависимостей скоростей в указанных зонах на базе феноменологической теории пограничного слоя позволяет определить незначительное число констант, входящих в указанные модели усредненного турбулентного движения [2, 3, 15, 16].

Сложившееся на практике мнение о достоинствах наиболее простого класса моделей теории усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса (далее – RANS моделей), ни в коей мере не снижает важности дальнейшего развития RANS моделей, а также более сложных классов моделей [17]. К другим, более сложным, так называемым дифференциальным моделям, относится семейство моделей, берущих свое начало от теории Колмогорова [18, 19] и гипотезы Буссинеска 1877 года о структуре «турбулентной» вязкости, описываемой тензором напряжений, компоненты которого порождаются частными производными усредненных ско-

ростей. Имеются свидетельства использования таких моделей для расчета теплообмена в пограничных слоях гиперзвуковых течений [1], причем, не всегда столь же успешных, как алгебраических моделей. Отметим для примера лишь наиболее распространенные из них: модель Спаларта – Аллмараса (SA-модель) [20], низко- и высоко-рейнгольдсовы  $k-\varepsilon$  модели [21, 22],  $q-\omega$  модель [23],  $k-\omega$  SST модели [24, 25]. Нет смысла даже из перечисленных RANS моделей (их число измеряется многими десятками) отдавать предпочтение априори той или иной модели и, тем более ожидать, что более сложные модели окажутся более успешными. Каждая из моделей рождалась при анализе специфических свойств разнообразных течений и нет оснований ожидать их успешного обобщения на более широкий класс течений. Углубленный анализ современного состояния данного вопроса приведен в работах [19, 26]. Тем не менее, неоспоримым фактом сегодняшнего дня является то, что наиболее успешного описания и, в особенности, успешного предсказания теплообмена в пограничных слоях гиперзвуковых течений удается достичь именно с использованием алгебраических моделей. Очевидно, что именно алгебраические модели в лучшей степени отвечают условиям гиперзвуковых течений вблизи развитой поверхности при отсутствии разных изменений кривизны, уступов, каверн и т.п.

Важным элементом построения моделей численного интегрирования усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса учет конечных размеров областей, занятых турбулентным пограничным слоем. Мотивацией такой постановки, ранее сформулированной в работе [11], могут служить задачи валидации компьютерных кодов на примере анализа экспериментальных данных о структуре области сжатого сверхзвукового потока между поверхностью тела и фронтом ударной волны и об интенсивности конвективного нагрева поверхности. Как уже отмечалось в [11] экспериментальные данные по структуре сверхзвукового течения у поверхностей моделей свидетельствуют о локализации турбулентных пограничных слоев вблизи поверхности, что создает определенные трудности численного решения задач на основе полных уравнений Навье – Стокса. На фотографиях работ [27, 28] (рис. 1 и 2) хорошо виден локализованный турбулентный пограничный слой вблизи обтекаемой поверхности.

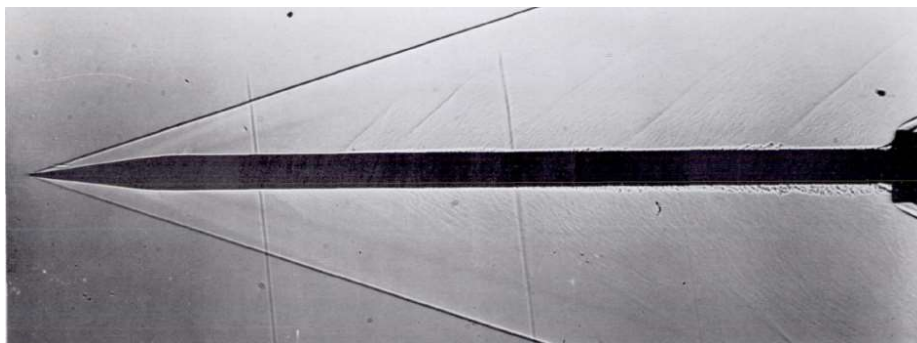


Рис. 1. Турбулентный пограничный слой при сверхзвуковом обтекании модели в аэродинамической трубе [27]

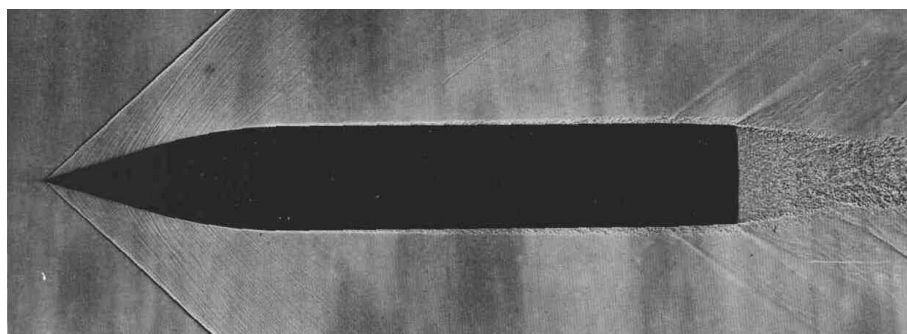


Рис. 2. Структура течения при сверхзвуковом движении осесимметричной модели в баллистическом эксперименте [28]

При этом, несомненно, следует учесть, что экспериментальные данные по структуре турбулентных пограничных слоев в сверхзвуковых потоках крайне ограничены и закономерности их развития на протяженных поверхностях слабо изучены. В одной из достаточно часто цитированных работ по анализу экспериментальных данных по турбулентному нагреву экспериментального гиперзвукового аппарата протяженностью 4 м [7] показано, что на расстоянии примерно 2.2 м от сферической головной части аппарата фиксируется резкое возрастание интенсивности нагрева поверхности. Очевидно, что это связывается с ламинарно-турбулентным переходом. Используемые в цитированной работе алгебраические модели турбулентного смешения совместно с RANS-моделью показывают хорошее количественное согласие по плотности конвективного теплового потока. В указанных расчетах использовался компьютерный код SACCARA, созданный в Национальной Лаборатории Sandia. Однако они не отвечают явно на вопрос о закономерности развития турбулентного пограничного слоя на протяженных телах (при относительно больших числах Рейнольдса). Заметим, что хорошо известные теоретические соотношения для толщины ламинарного и турбулентного пограничного слоя на плоской пластине [29]

$$\delta_L = \frac{4.64x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad \text{и} \quad \delta_T = \frac{0.37x}{\sqrt[5]{\text{Re}_x}} \quad (1.1)$$

дают для указанной протяженности обтекаемой поверхности зависимости, показанные на рис. 3.

На расстоянии 300 ÷ 400 см от переднего среза пластины толщина турбулентного пограничного слоя достигает 3 ÷ 4 см. Оставляя в стороне вопрос о достоверности такой оценки для экспериментального аппарата [7] заметим, что ударная волна отходит от поверхности на этих расстояниях примерно на 10 см, то есть пограничный слой занимает более, чем треть сжатого слоя. Такая оценка делает еще более актуальной задачу использования RANS-моделей.

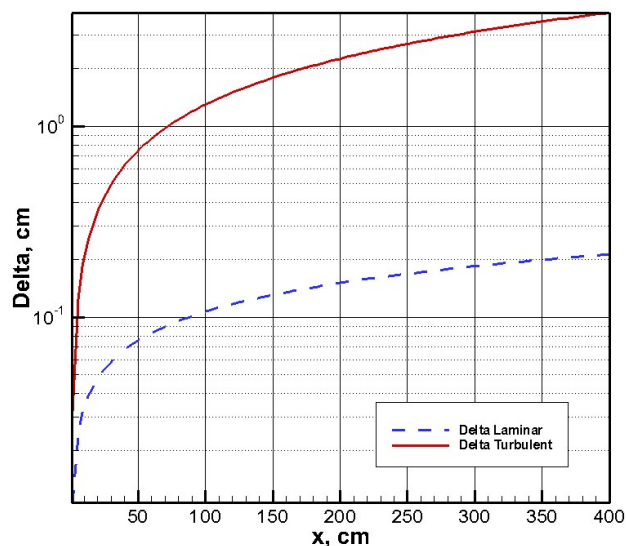


Рис. 3. Толщина ламинарного и турбулентного пограничного слоя на пластине. Расчет по теоретическим соотношениям (1.1)

Данная работа является логическим продолжением исследований, начатых в [11], и посвящена применению RANS - моделей к исследованию нагрева поверхностей конусообразных тел в сверхзвуковых газовых потоках. Форма обтекаемых тел, подобная показанным на рис. 1 и 2, была принята для исследования в данной работе. В работе рассмотрены методы численного интегрирования двумерной системы RANS - уравнений в расчетной области без выделения фронта ударной волны от невозмущенного набегающего сверхзвукового потока до обте-

каемой криволинейной поверхности. При решении задачи изучаются разные алгоритмы выделения области турбулентного пограничного слоя, вне которой вихревая вязкость полагается исчезающе малой. В некоторых задачах учитывается область отрывного течения.

Практика решения указанных задач обозначила три проблемы, которые необходимо решать в едином комплексе. Это: определение (назначение) зоны ламинарно-турбулентного перехода, специальный выбор конечно-разностной расчетной сетки у обтекаемой поверхности и задание внешней границы турбулентного пограничного слоя. В данной работе проблема ламинарно-турбулентного перехода специально не исследовалась. Использовалось два простых алгоритма: «включение» турбулентной вязкости при  $Re_s = \frac{\rho_\infty V_\infty s}{\mu_\infty} > Re_T$  и плавный учет пере-

хода от ламинарного к турбулентному характеру течения в пограничном слое в диапазоне критических чисел Рейнольдса  $Re_T$  (вводился аналог «функции прерывистости перехода»  $\Gamma$  из работы [4]). Здесь:  $\rho_\infty$ ,  $V_\infty$ ,  $\mu_\infty$ ,  $s$  – плотность, скорость и динамический коэффициент вязкости в набегающем потоке, а также продольная координата вдоль обтекаемой поверхности. Некоторые модели ламинарно-турбулентного перехода, успешно применявшиеся при решении аналогичных задач, приведены в работах [8–10].

Все решенные в данной работе задачи требовали тщательного подбора используемых конечно-разностных сеток. Главным «эмпирически-расчетным» критерием было условие малости рассчитываемой турбулентной вязкости в приповерхностном слое по сравнению с молекулярной вязкостью. При этом, классические критерии приемлемости расчетной сетки типа  $y^+ \leq 1$  безусловно контролировались.

Для задания внешней границы турбулентного пограничного слоя в алгебраических моделях турбулентности задавалась экспоненциальная функция уменьшения функции вихря скорости при достижении определенного расстояния отхода от поверхности обтекаемого тела. Выбор этого расстояния также варьировался в численных экспериментах. Алгоритм расчета состоял в следующем. В исходных данных задается наибольший узел конечно-разностной сетки вдоль радиальной переменной  $i_{MaxBL}$  такой, что при  $i < i_{MaxBL}$  рассчитываемая по двухслойной алгебраической модели смешения Прандтля (PMM) [2] и по модели Болдуина – Ломакса (BLM) [15] турбулентная вязкость  $\mu_T$  учитывается в RANS уравнениях, а при  $i > i_{MaxBL}$  функция ротора скорости рассчитывается по нижеследующей формуле в каждом слое вдоль продольной координаты с индексом  $j$

$$\Omega_{i,j} = \Omega_{i_{MaxBL},j} \exp \left[ -\frac{(\eta_{i,j} - \Delta_j)^2}{\Delta_j^2} \right], \quad (1.2)$$

где:  $\Omega_{i_{MaxBL},j}$  – значение модуля ротора скорости при  $i = i_{MaxBL}$ ;  $\eta_{i,j}$ ,  $\Delta_j$  – текущее расстояние по нормали к поверхности и расстояние от поверхности до узла  $i, j$ , в котором выполняется условие  $i = i_{MaxBL}$ . Как правило, значение  $i_{MaxBL}$  коррелировало с традиционно задаваемыми критериями условной границы динамического или температурного пограничных слоев.

Это означает, что за определенной таким образом границей турбулентного пограничного слоя, функция  $|\Omega|$  экспоненциально уменьшается от своего значения на границе. Задание функции вида (1.2) позволило изучить эффект исчезновения вихревой вязкости на внешней границе пограничного слоя.

## 2. Математическая модель

Вычислительная модель NERAT-2D реализует интегрирование системы уравнений вязкого сжимаемого газа методом установления, составными частями которой являются: система уравнений неразрывности и усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса, выражающее закон сохранения энергии (в рассматриваемом случае – уравнение теплопроводности)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu_{eff} \operatorname{div} \mathbf{V}) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_{eff} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right], \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu_{eff} \operatorname{div} \mathbf{V}) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu_{eff} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right], \quad (2.3)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{V} \operatorname{grad} T = \operatorname{div}(\lambda_{eff} \operatorname{grad} T) + \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \operatorname{grad} p + \Phi_\mu, \quad (2.4)$$

где:  $u, v, w$  – проекции вектора скорости потока  $\mathbf{V}$  на оси прямоугольной декартовой системы координат  $x, y, z$ ;  $p, \rho, T$  – давление, плотность и температура газа;  $\mu, \lambda, \mu_t, \lambda_t$ ,  $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$ ,  $\lambda_{eff} = \lambda + \lambda_t$  – молекулярная, турбулентная и эффективная вязкость и теплопроводность;  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении;

$$\Phi_\mu = \mu_{eff} \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] - \text{диссипативная функция.}$$

Использовалось термическое уравнение состояния идеального газа и калорическое уравнение состояния совершенного газа

$$p = \rho \frac{R_0}{M} T, \quad (2.5)$$

$$e = c_v T,$$

где:  $c_v$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме;  $R_0$  – универсальная газовая постоянная;  $M = 29$  г/моль – молекулярный вес.

Замыкающие термодинамические и теплофизические характеристики задавались следующим образом:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4, \quad c_v = \frac{R_0}{(\gamma - 1)M}, \quad \mu = \frac{1.45 \times 10^{-5} T^{1.5}}{110.4 + T} \text{ г/(см} \times \text{с)},$$

$$\lambda = \frac{\mu c_p}{Pr}, \quad \lambda_t = \frac{\mu_t c_p}{Pr_t}, \quad Pr = 0.7, \quad Pr_t = 1.0$$

В качестве граничных условий для системы уравнений (2.1)–(2.4) использовались условия в невозмущенном набегающем потоке, условия прилипания на поверхности и условия Дирихле в выходном сечении расчетной области, где течение всегда было сверхзвуковым (кроме малой области пограничного слоя). Температура поверхности  $T_w$  полагалась постоянной в разных расчетных вариантах.

Использовались две алгебраические модели турбулентного смешения в пограничном слое.

1) В модели смешения Прандтля [2] турбулентная вязкость определяется по хорошо известному феноменологическому соотношению

$$\mu_t = \rho L_m^2 |\Omega|, \quad (2.6)$$

где  $L_m$  – длина смешения Прандтля;  $|\Omega|$  – функция вихря скорости, для двухмерного случая

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Рассматривается двухслойная модель, в соответствии с которой длина пути смешения Прандтля определяется по формуле

$$L_m^{in} = \chi y \left[ 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right], \quad \text{при } \frac{y}{\delta} < 0.2, \quad (2.7)$$

$$L_m^{out} = 0.085\delta, \quad \text{при } \frac{y}{\delta} > 0.2,$$

где:  $y^+ = \frac{y}{\nu_w} u_\tau$ ,  $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}$ ,  $\tau_w = \mu_w \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w$ ;  $\delta$  – толщина динамического пограничного слоя;  $\chi = 0.43$  – эмпирическая константа;  $A^+ = 26$ ;  $\nu_w$  – кинематическая вязкость вблизи поверхности;  $\mu = \rho\nu$ ;  $y^+ = \frac{y}{\mu_w} \rho_w u_\tau = \frac{y}{\mu_w} \sqrt{\rho_w \tau_w} = y \sqrt{\frac{\rho_w}{\mu_w} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w}$ .

2) В модели Болдуина – Ломакса [15], также рассматривается двухслойная структура пограничного слоя. В каждом слое определяется своя турбулентная вязкость. Во внутреннем, прилегающем к поверхности слое

$$\mu_{t,in} = \rho (\chi y D)^2 |\Omega|, \quad (2.8)$$

где  $\chi = 0.4$ ;  $D$  – демпфирующая функция Ван-Дрифта

$$D = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right),$$

где, в случае пограничного слоя у конической поверхности, компоненты скорости следует рассчитывать вдоль и по нормали к поверхности.

Во внешнем слое

$$\mu_{t,out} = K C_{cp} \rho F_{wake} F_{kleb}(y), \quad (2.9)$$

$$F_{kleb}(y) = \left[ 1 + 5.5 \left( y \frac{C_{kleb}}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1}, \quad C_{kleb} = 0.3,$$

$$F_{wake} = y_{max} F_{max}, \quad F(y) = y |\Omega| D,$$

где  $K = 0.018$ ,  $C_{cp} = 1.6$ ;  $y_{max}$  – определяется локальной координатой нормальной к поверхности  $y$ , где  $|\Omega|$  достигает своего максимума, а  $F_{max} = F(y_{max})$ .

Турбулентная вязкость, подставляемая в уравнения (2.2)–(2.4), находится следующим образом:

$$\mu_{t,in}, \quad y \leq y_{cross},$$

$$\mu_{t,out}, \quad y > y_{cross},$$

где  $y_{cross}$  – координата  $y$ , при которой  $\mu_{t,in} = \mu_{t,out}$  (первый раз по мере увеличения  $y$ ).

### 3. Результаты расчетов

С использованием разработанной компьютерной модели выполнены валидирующие расчеты при анализе 6-ти тестовых экспериментальных задач, для которых имеются хорошо документированные экспериментальные данные. Первые две задачи подробно обсуждались в работе [4], где также выполнены валидирующие расчеты с использованием кода на основе параболизированных уравнений Навье – Стокса (ПУНС) совместно с двумя алгебраическими моделями турбулентного смешения: моделью Себечи – Смита [30] и моделью Болдуина – Ломакса [15]. В [4] подробно обсуждается вопрос о выборе внешней границы турбулентного пограничного слоя при использовании ПУНС модели, когда продольная скорость потока может иметь максимум в пограничном слое.

В первой тестовой задаче анализировались экспериментальные данные [31] по обтеканию конуса протяженностью  $L \sim 34$  см затупленного по сфере радиусом  $R_n = 6.35$  см сверхзвуковым потоком при  $M = 5$  под нулевым углом атаки. Температура поверхности полагалась равной  $T_w = 103$  К. Расчеты показали хорошее совпадение с экспериментальными данными по плотности конвективного теплового потока ниже по течению от точки сопряжения сферы с конусом (см. Fig. 4 в [4]). Расчеты сферического затупления не проводились.

В работе [10] выполнен расчетный анализ экспериментальных данных [31] с использованием RANS-модели с выделением фронта ударной волны. Совместно с уравнениями Навье – Стокса использовалась алгебраическая модель Себечи – Смита. Также, как и в [4], анализируется проблема выбора условной границы пограничного слоя. Авторы [4] и [10] используют критерий малости отличия полной энтальпии от постоянного значения  $H_\infty$  в невязком потоке и невозмущенном течении.

В работе [10] показано хорошее совпадение с экспериментальными данными не только на конической поверхности, но и на сфере, где хорошо идентифицируется ламинарно-турбулентный переход.

Экспериментальные данные [31] также анализировались в работе [8], где использовалась погранслоинная модель совместно с алгебраической моделью Себечи – Смита, а также метод эффективной длины Авдеевского. В указанной работе выполнен расчет ламинарно-турбулентного перехода на сферической части обтекаемой модели с использованием так называемого критерия PANT [32]. Авторами получено хорошее совпадение с экспериментальными данными только при оптимизации набора констант в модели Себечи – Смита.

Во второй тестовой задаче анализировались экспериментальные данные [39] по обтеканию конуса протяженностью  $L \sim 89$  см, затупленного по сфере радиусом  $R_n = 1.25$  см при  $M = 8$  под нулевым углом атаки. Экспериментальные данные представлены для конической поверхности от продольной координаты примерно 12.7 см.

Расчетные и экспериментальные данные по плотности конвективного теплового потока представлены в виде зависимости от продольной координаты числа Стантона

$$St = \frac{q_w}{\rho_w V_\infty [h(T_r) - h(T_w)]},$$

где энтальпии  $h(T_r)$ ,  $h(T_w)$  определяются по температуре из таблиц термодинамических данных для воздуха;  $T_w$  – температура поверхности;  $T_r$  – так называемая температура восстановления

$$T_r = T_\infty \left( 1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right),$$

где коэффициент восстановления для турбулентного пограничного слоя принят в [10] равным 0.89.

Плотность рассчитанного конвективного нагрева на конической поверхности хорошо совпадает с экспериментальными данными для расчетных моделей [4] и [10]. Заметим, что



согласно [10] плотность конвективного теплового потока для ламинарного течения примерно в 4 раза ниже.

Третья тестовая задача, включающая два расчетных случая, была выбрана по результатам опытных и расчетных данных международной исследовательской программы HIFiRE-1 (Hypersonic International Flight Research and Experimentation), специально ориентированной на изучение проблем аэротермодинамики и термогазодинамики гиперзвукового полета. Результаты хорошо документированных стендовых и (частично) летных испытаний приведены в работах [34–37]. Особенностью этих работ является выполненное расчетно-теоретическое исследование по ламинарно-турбулентному переходу на протяженной конической поверхности при двух скоростях ( $M = 6.58$  и  $7.16$ ), а также анализ экстремального теплового и силового воздействия на поверхность кормовой юбки, расположенной на расстоянии примерно 170 см от носовой затупленной части сферической формы с радиусом  $R_n = 0.25$  см.

Анализ указанных экспериментальных данных был выполнен также в работе [38], где использовалась RANS модель с двумя алгебраическими моделями турбулентного смешения (Прандтля и Болдуина – Ломакса). В данной работе применялся алгоритм ограничения толщины пограничного слоя по критерию малости функции  $|\text{rot}\mathbf{V}|$  относительно своего максимального значения, а также был введен пристеночный слой с очень подробной расчетной сеткой. Было получено хорошее совпадение с экспериментальными данными по ламинарному и турбулентному нагреву, а также по распределению давления. Выполнено сравнение результатов расчетов по турбулентному и ламинарному нагреву.

В качестве пятой тестовой задачи выбраны результаты экспериментальных и расчетных исследований ламинарного и турбулентного нагрева протяженной поверхности затупленного по сфере конуса при числе Маха  $M = 20$  [39, 40].

В статье [7] значительное внимание уделяется анализу экспериментальных данных [39, 40]. Экспериментальный гиперзвуковой аппарат REENTRY-F – это затупленный с малым радиусом конус с углом полураствора  $\varphi = 5^\circ$ , испытанный в летных условиях в широком диапазоне чисел Маха. Указанные экспериментальные данные обсуждались также в [39, 41–43]. В эксперименте были получены данные по распределению плотностей конвективных тепловых потоков вдоль поверхности. Большинство расчетов выполнено для угла атаки  $\alpha = 0^\circ$ . Отмечается, что много деталей этих экспериментальных данных определены слабо. В [7] в качестве объекта исследования выбрана RANS модель, как более общая по сравнению с приближением пограничного слоя. Отмечается, что так как большинство (для того времени) моделей турбулентности было разработано для несжимаемых течений, где плотность и теплофизические функции постоянны, поэтому выполнена модификация модели Спаларта – Аллмараса для сжимаемого потока [7]. Использование в [7] компьютерном коде SACCARA (Sandia Advanced Code for Compressible Aerothermodynamics Research) кроме моделей Болдуина – Барса (см. анализ этой модели в [24]) и Спаларта – Аллмараса позволило испытать еще 3 модели: низкорейнольдсовая модель  $k - \varepsilon$  и две  $k - \omega$  модели. Низкорейнольдсовая  $k - \varepsilon$  модель [44] позволяет выполнять интегрирование вплоть до твердой поверхности. Из исследованных, первая  $k - \omega$  модель – это гибридная модель Ментера [45], сочетающая возможности  $k - \omega$  модели вблизи твердой поверхности и  $k - \varepsilon$  модели в слое смешения и свободного потока. Вторая  $k - \omega$  модель – это модель Вилкокка [5].

Анализируемые экспериментальные данные получены в летном эксперименте с гиперзвуковым аппаратом конической формы при  $M = 20$  на высоте 24.4 км. Особенностью течения являются важные эффекты реального газа в пограничном слое и в небольшой невязкой области вблизи сферического затупления. Тем не менее, отмечается, что эффектами неравновесности пренебрегали. Исследование было ограничено областью пограничного слоя. Численное решение получено после двукратного измельчения сеток. Граничные условия для каждой из моделей у поверхности детально обсуждаются в [7]. В области невозмущенного течения в модели Спаларта – Аллмараса полагается  $\mu_T / \mu \sim 10^{-4}$ , а в дифференциальных моделях  $\mu_T / \mu = 0.1$ .

Расчетная интерпретация экспериментальных данных REENTRY-F преследовала несколько целей. Во-первых, требовалось убедиться в том, что используемые модификации моделей турбулентности позволяют предсказать уровень конвективного нагрева для весьма жестких экспериментальных условий. Причем, речь идет не столько о различных моделях турбулентного смешения как таковых, сколько о способах их интеграции в модели Навье – Стокса и численной интерпретации возмущенной области течения, определяемого как турбулентный пограничный слой. В [7] отмечалось, что в расчетах была принята модель равновесного пограничного слоя. Нельзя не согласиться с необходимостью использования модели реальной среды в сжатом слое при скорости  $M = 20$ . Однако в [7,39] отсутствуют подробности реализованной расчетной модели, а ниже будет показано, что достаточно хорошего совпадения с представленными экспериментальными данными удастся достичь при использовании модели совершенного газа. На самом деле здесь нет ничего удивительного, поскольку на очень удлиненных телах, как в эксперименте [39, 40], температура сжатого слоя между поверхностью и фронтом ударной волны весьма быстро падает от лобового затупления вдоль обтекаемой поверхности, так что уже на расстоянии порядка 10 см различие между данными, полученными с использованием моделей реального и совершенного газа оказываются не столь высокими.

Еще одной целью исследования было получение определяющих функций алгебраических и дифференциальных моделей турбулентного смешения для специфических условий данного летного эксперимента (высокие числа Маха и обтекание удлиненного тонкого тела длиной  $L \sim 400$  см).

Необходимо иметь в виду, что при  $M = 20$  на высоте  $H = 24.4$  км наблюдалась частичная абляция носовой части. Начальный радиус затупления конуса составлял  $R_n = 0.343$  см. Аблирующая носовая часть была выполнена из графита, а на расстоянии 19 см стыковалась с бериллиевым корпусом конуса.

Для выполнения расчетов задавались температура поверхности  $T_w = 500$  К и интенсивность турбулентных пульсаций в набегающем потоке  $Tu = 0.01$  %, которая вводилась в расчет с целью определения исходной кинетической энергии турбулентности для дифференциальных моделей турбулентности. Экспериментальное значение угла атаки  $\alpha = 0.14^\circ$ , поэтому течение полагалось осесимметричным. В расчетах использовались следующие геометрические параметры: конус с полууглом раствора  $\theta = 5^\circ$  затупленный по сфере с радиусом  $R_n = 0.343$  см.

Как уже отмечалось, использование моделей турбулентности совместно с уравнениями Навье – Стокса имеет ряд ограничений. В частности, в [7] обсуждается формулировка консервативных уравнений турбулентного перекося, а также модификация некоторых моделей турбулентного смешения для сжимаемых течений. Известно, что задача ламинарно-турбулентного перехода, в особенности для рассматриваемых условий, не решена до настоящего времени. Поэтому в [7] задавалось расстояние, на котором в уравнениях Навье – Стокса учитывалась турбулентная вязкость. Авторы [7] определили эту модель как ступенчатую модель перехода. Такой подход представляется весьма разумным, т.к. предсказание ЛТП в условиях летного эксперимента может носить лишь вероятностный характер. Решение этой задачи в настоящее время находится на начальном этапе, когда исследуется взаимосвязь нелинейного акустического взаимодействия в пограничных слоях, а также накапливается информация для последующей систематизации. Большие надежды возлагаются на решение задач ЛТП с использованием суперкомпьютерных вычислений и моделей прямого моделирования турбулентности (DNS-моделей). Однако, следует иметь в виду, что в реальных условиях обтекания существует ряд факторов, которые невозможно отразить в расчетных моделях.

В результате выполненных в [7] исследований установлено, что модели Спаларта – Аллмараса и обе  $k - \varepsilon$ -модели дают удовлетворительное согласие для тепловых потоков, полученных в эксперименте. Модели Болдуина – Ломакса и низкорейнольдсовая модель  $k - \varepsilon$  дают завышение примерно в 2 раза.

Оценивая в целом цикл исследований, отраженный в работах [7, 39–43] заметим, что главным важным итогом является обсуждение уникальных экспериментальных и расчетных данных для ламинарно-турбулентного нагрева протяженного экспериментального аппарата при больших числах Маха  $M \sim 20$ . Обратим внимание также на исключительно полезные для анализа данные по ламинарно-турбулентному переходу (Fig. 8 в работе [39]), где видна закономерность смещения зоны ЛТП по потоку при увеличении высоты полета  $H = 22.6, 24.4, 25.5$  и  $29.6$  км.

В шестой тестовой задаче анализировались экспериментальные данные [46]. В ударной трубе экспериментально исследовано гиперзвуковое обтекание модели с целью определения степени ее нагрева и давления на ее поверхности. Эксперименты выполнены при числе Маха  $M = 6.5$  и полной энтальпии  $1.2$  мДж/кг. Толкающим газом был гелий, а рабочим газом – воздух. Эффективное время эксперимента в ударной трубе составляло  $3.5$  мс. Степень нагрева испытуемой модели определялась при помощи датчиков, металлизированных методом вакуумного напыления. Геометрия испытанной модели характеризуется радиусом затупления конуса  $R_n = 0.12$  см, длиной конуса  $L = 36.75$  см и углом полураствора  $\varphi = 11.38^\circ$ .

Во всех расчетных задачах данной работы использовался одинаковый способ задания геометрии испытуемой модели. Использовалась 4-х блочная расчетная сетка, которая строилась при помощи встроенного генератора неоднородной сетки со сгущениями к поверхности и к участкам поверхности с изломами. Расчетный код позволяет удваивать число узлов конечно-разностной сетки произвольное число раз (для оценки скорости сходимости по сетке оказалось достаточным двухкратное перестроение).

### 3.1. Тестовая задача турбулентного нагрева поверхности затупленного по сфере конуса. (Шифр задачи ST-WH)

Рассматривается обтекание затупленного по сфере радиусом  $R_n = 6.35$  см с углом полураствора  $\theta = 9^\circ$  сверхзвуковым потоком совершенного газа при  $M = 5$  [31].

В эксперименте измерения плотности конвективных тепловых потоков проводились до расстояния  $L \sim 30$  см. Эти опытные данные представляют особый практический интерес, поскольку ламинарно-турбулентный переход наблюдается на сферическом затуплении на расстоянии нескольких сантиметров от критической точки. Представлены также экспериментальные данные по турбулентному нагреву конической поверхности. Геометрия расчетной модели, для которой проводилось сравнение с опытными данными [31] показана на рис. 4.

Для турбулентного режима течения проводится сравнение расчетных и экспериментальных данных представленных в [34] при следующих исходных данных, приведенных в табл. 1.

В качестве численного эксперимента при отработке расчетной модели и компьютерного кода, используемая аэродинамическая модель задавалась более сложной, а именно с кормовой юбкой, что позволяло параллельно моделировать закономерности течения и теплообмена в окрестности излома образующей, а также в зоне отрывного течения. Геометрия модифицированной модели показана на рис. 5. Аэродинамическая модель с указанной особенностью была выбрана по аналогии с тестовой моделью в экспериментальной программе HiFiRE-1 [34–37].

Таблица 1

Исходные данные для расчета первой тестовой задачи [31]

Тест 1	$\rho_\infty, \text{г/см}^3$	$p_\infty, \text{эрг/см}^3$	$V_\infty, \text{см/с}$	$T_\infty, \text{К}$	$T_w, \text{К}$	$\mu_\infty, \text{г/(см}\cdot\text{с)}$
ST-WH	$0.340 \times 10^{-3}$	$7.300 \times 10^4$	$0.870 \times 10^5$	73.9	102.	$0.503 \times 10^{-4}$

Численная интерпретация экспериментальных данных [31] выполнена на сетках  $281 \times 81$  (1й блок),  $281 \times 281$  (2й блок),  $281 \times 97$  (3й блок),  $81 \times 97$  (4й блок). Здесь и далее конечно-разностная сетка в каждом блоке характеризуется двумя числами  $NI \times NJ$ , соответственно

число узлов по нормали и вдоль поверхности. В каждом блоке используются неоднородные сетки со сгущением к поверхности. Как уже отмечалось, допускается кратное автоматическое удвоение узлов конечно-разностной сетки.

Поля газодинамических функций, показанные на рис. 4, являются типичными для сверхзвукового обтекания сферического затупления, переходящего в коническую поверхность: образование сжатого слоя за отошедшей ударной волной (рис. 4, а, в) с областью дозвукового течения у критической линии тока (рис. 4, а, б). Плотность и коэффициенты молекулярной и турбулентной вязкости отнесены к значениям в невозмущенном потоке

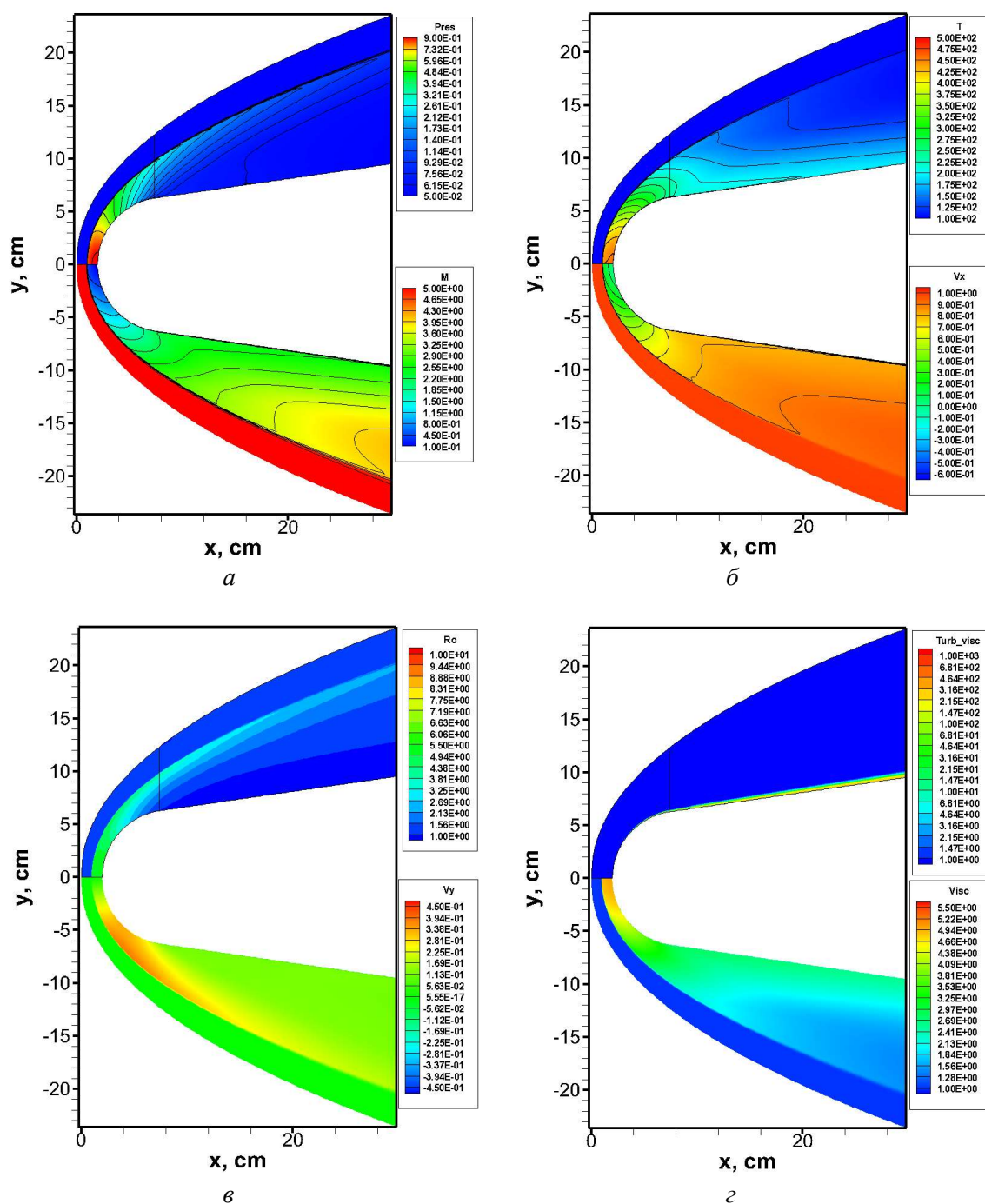


Рис. 4. Поля чисел Маха и давления ( $Pres = p/(\rho_{\infty}V_{\infty}^2)$ ), температуры ( $T$ , в K) и продольной скорости ( $V_x = u/V_{\infty}$ ), плотности ( $\rho/\rho_{\infty}$ ) и поперечной компоненты скорости ( $V_y = v/V_{\infty}$ ), молекулярной ( $\mu/\mu_{\infty}$ ) и турбулентной ( $\mu_t/\mu_{\infty}$ ) вязкости в окрестности экспериментальной модели для опытных данных [31]

Заметим, что газ в сжатом слое вблизи критической линии тока нагревается практически до температуры торможения  $T_0 = 440$  К. В распределении плотности наблюдаются две характерные зоны в сжатом слое. В сжатом слое от фронта ударной волны до пограничного слоя  $\rho_{SL}$  и в пограничном слое в непосредственной близости к поверхности  $\rho_{BL}$ . Значение плотности в сжатом слое близко к теоретическому значению плотности за прямой ударной волной. Повышение плотности вблизи поверхности обусловлено пограничным слоем, где температура падает.

На рис. 4,  $\nu$  показаны поля молекулярной и турбулентной вязкости, которая локализована вблизи поверхности.

На рис. 5 отчетливо видны особенности сверхзвукового обтекания тела с юбкой: возрастание давления и температуры в кормовой части, а также некоторые особенности отрывного течения у задней поверхности, переходящего в след.

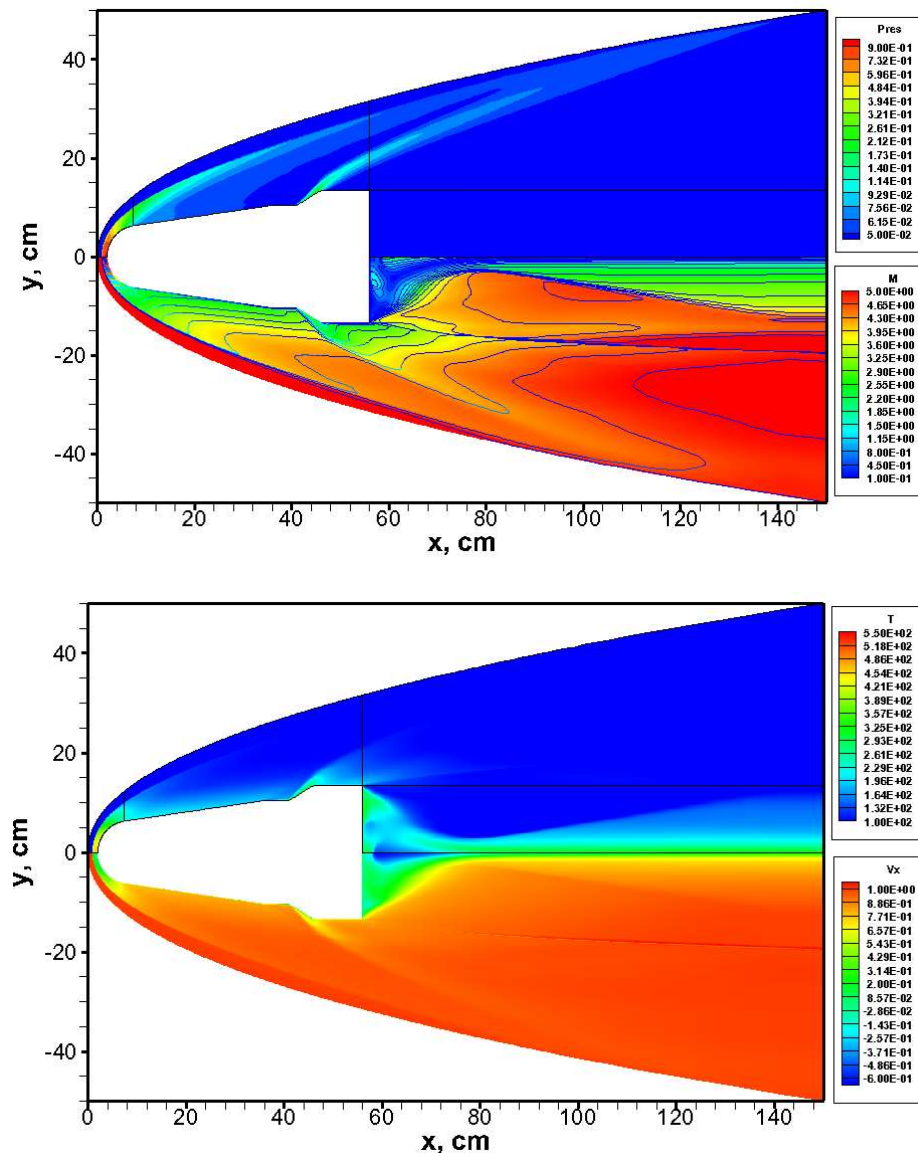


Рис. 5. Поля чисел Маха и давления ( $Pres = p/(\rho_\infty V_\infty^2)$ ), температуры ( $T$ , в К) и продольной скорости в окрестности экспериментальной модели для опытных данных [31]

На рис. 6 показаны результаты расчета плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности сферы и конуса в сравнении с экспериментальными данными. Здесь использовалась модель ламинарного течения. До начала ламинарно-турбулентного перехода ( $s < 3$  см) отмечается хорошее совпадение с экспериментальными данными. После начала турбулизации

течения в пограничном слое различие экспериментальных и расчетных данных достигает одного порядка.

Результаты расчета с использованием RANS-модели совместно с BLM-моделью турбулентного смешения показанные на рис. 7 демонстрируют хорошее совпадение с экспериментальными данными на всей поверхности. В данном случае использовалась модель плавного перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения в диапазоне чисел Рейнольдса  $2 \times 10^6 < Re_T < 5 \times 10^6$ .

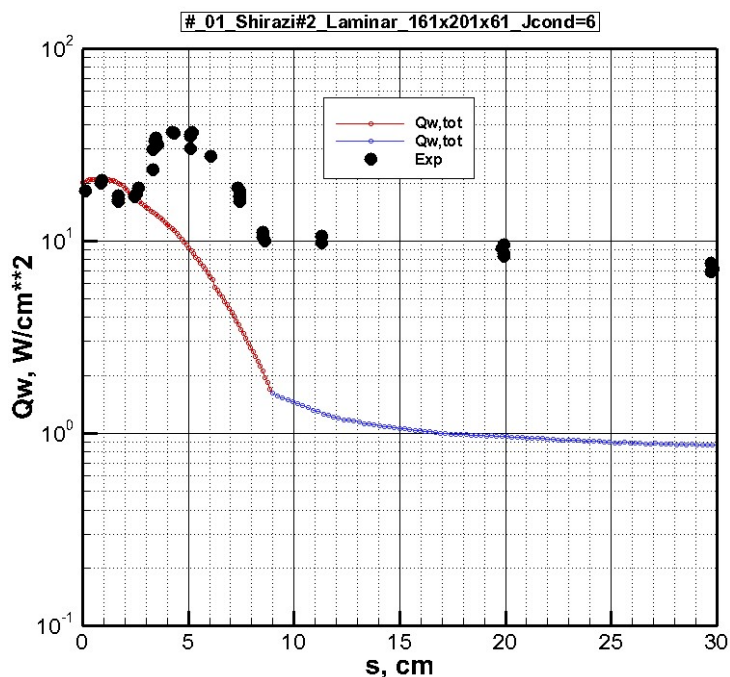


Рис. 6. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности экспериментальной модели для опытных данных [31]. Модель ламинарного обтекания

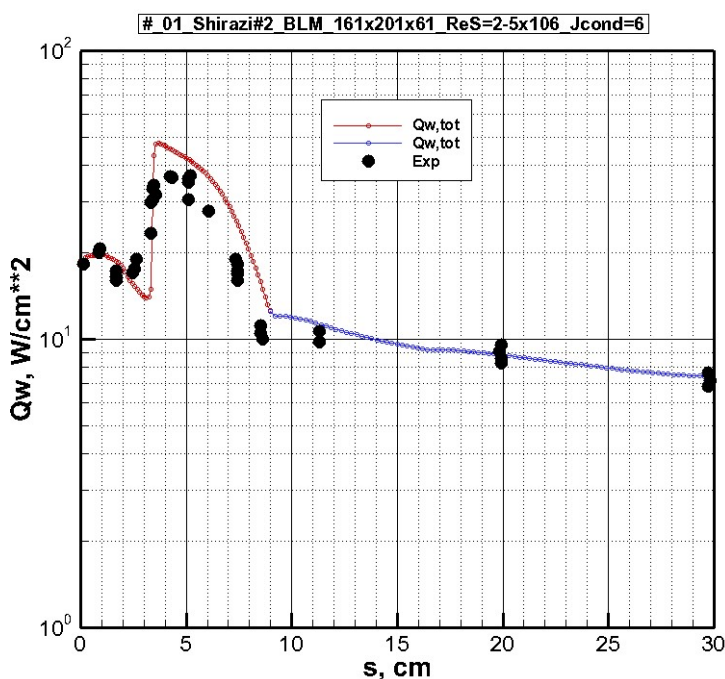


Рис. 7. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности экспериментальной модели для опытных данных [31]. Модель турбулентного смешения BLM при задании плавного ламинарно-турбулентного перехода при  $Re_T = (2 \div 5) \times 10^6$

Радиальные распределения (от поверхности к фронту ударной волны) молекулярной и турбулентной вязкости в разных сечениях вдоль оси  $x$  показаны на рис. 8 (координаты показаны на рисунке). Обратим внимание на строгое выполнение оговоренного выше условия малости расчетных значений турбулентной вязкости по сравнению с молекулярной вязкостью в пристеночной области, а также на экспоненциальное падение турбулентной вязкости во внешней части пограничного слоя. Примечательны также радиальные профили температуры (рис. 9), дающие представление о распределении температуры в сжатом слое у боковой поверхности.

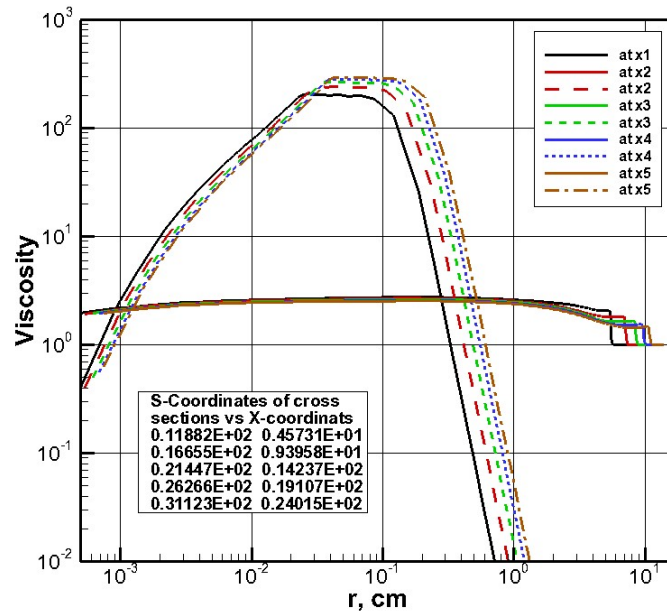


Рис. 8. Распределение молекулярной  $\mu/\mu_\infty$  и турбулентной  $\mu_t/\mu_\infty$  вязкости по радиусу от поверхности экспериментальной модели для опытных данных [31] в 5-ти сечениях вдоль оси  $x$ :  $x_1 = 4.57$  см,  $x_2 = 9.39$  см,  $x_3 = 14.2$  см,  $x_4 = 19.1$  см,  $x_5 = 24.0$  см. Расчет с использованием модели BLM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 5.5 \times 10^6$

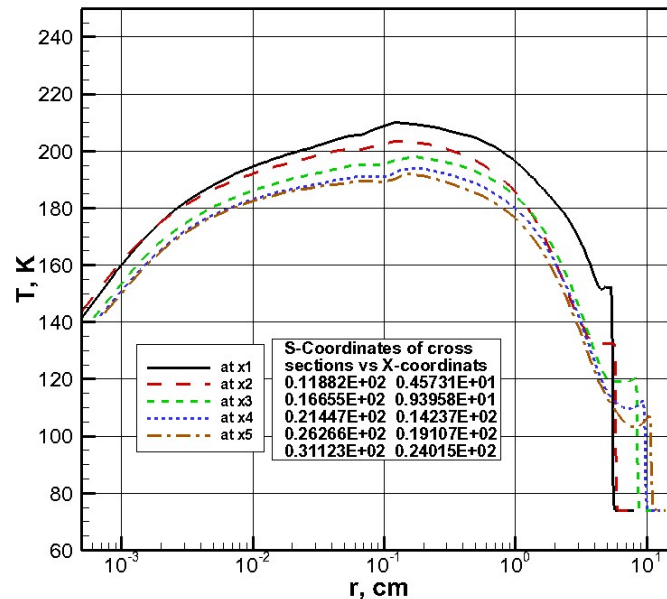


Рис. 9. Распределение температуры по радиусу от поверхности экспериментальной модели для опытных данных [31] в 5-ти сечениях вдоль оси  $x$ :  $x_1 = 4.57$  см,  $x_2 = 9.39$  см,  $x_3 = 14.2$  см,  $x_4 = 19.1$  см,  $x_5 = 24.0$  см. Расчет с использованием модели BLM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 5.5 \times 10^6$

О расчетном качестве полученного решения можно судить по распределению числа Маха, продольной скорости и температуры вдоль критической линии тока (рис. 10–12, соответственно).

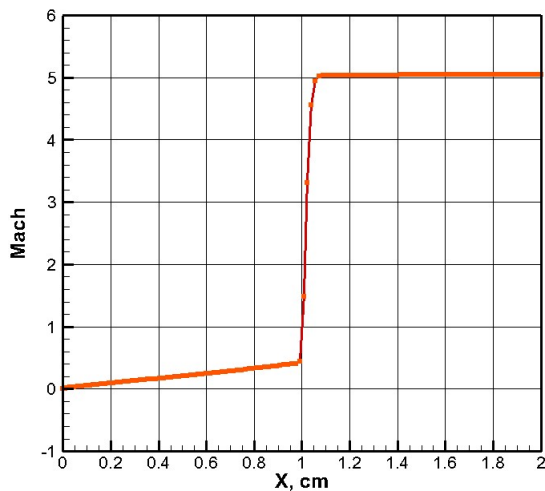


Рис. 10. Распределение числа Маха вдоль критической линии тока у поверхности экспериментальной модели для опытных данных [31]

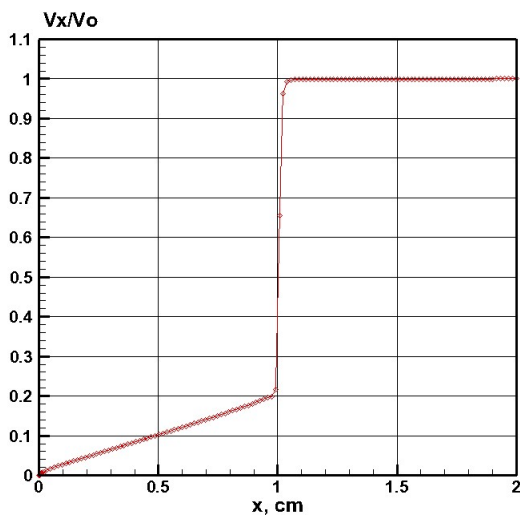


Рис. 11. Распределение продольной скорости вдоль критической линии тока у поверхности экспериментальной модели для опытных данных [31]

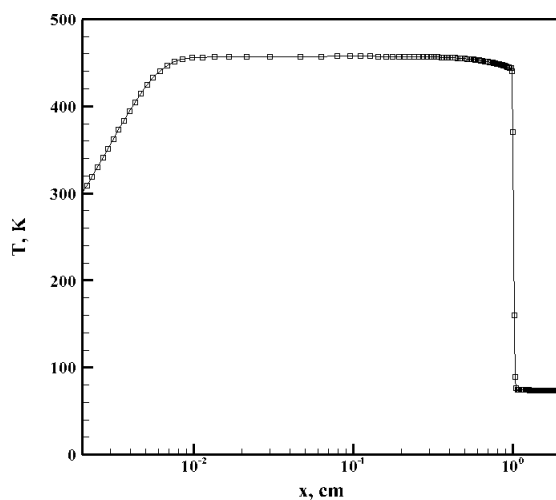


Рис. 12. Распределение температуры скорости вдоль критической линии тока у поверхности экспериментальной модели для опытных данных [31]



Данные, представленные на последующих рисунках, показывают некоторые результаты вычислительных экспериментов, отражающие свойства разработанной RANS модели. На рис. 13 и 14 показаны распределения плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности при  $Re_T = 1 \times 10^6$  и  $4 \times 10^6$  соответственно. Очевидно сильное влияние величины  $Re_T$  на плотность конвективного потока в окрестности сферического затупления. Влияние на плотность конвективного потока на конической поверхности – минимальное.

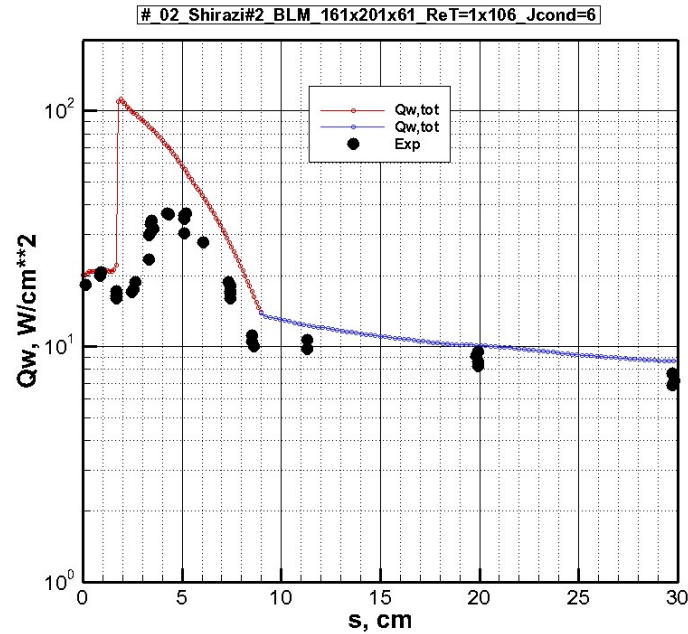


Рис. 13. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности экспериментальной модели для опытных данных [31]. Модель турбулентного смешения BLM при задании критического числа ламинарно-турбулентного перехода при  $Re_T = 10^6$

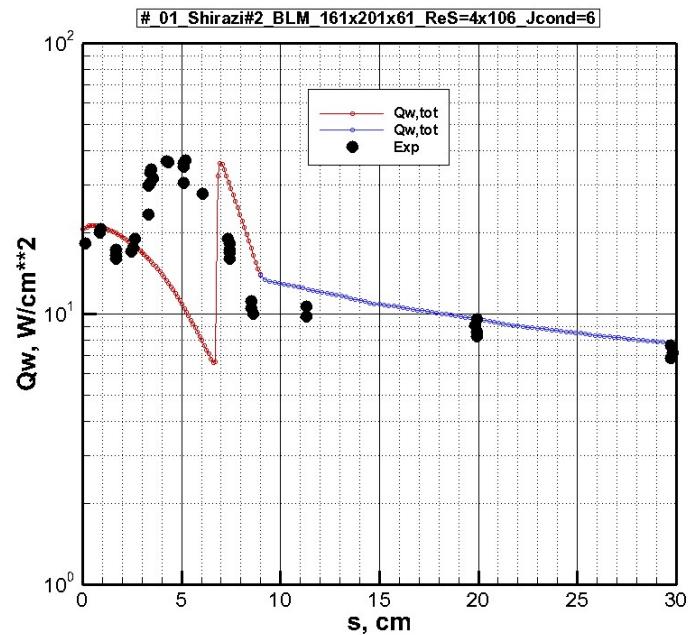


Рис. 14. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности экспериментальной модели для опытных данных [31]. Модель турбулентного смешения BLM при задании критического числа ламинарно-турбулентного перехода при  $Re_T = 4 \times 10^6$

На рис. 15–17 показаны аналогичные данные, полученные при использовании РММ модели турбулентного смешения. Выводы о способе задания  $Re_T$  остаются прежними. Отметим хорошую корреляцию расчетных данных для моделей ВЛМ и РММ.

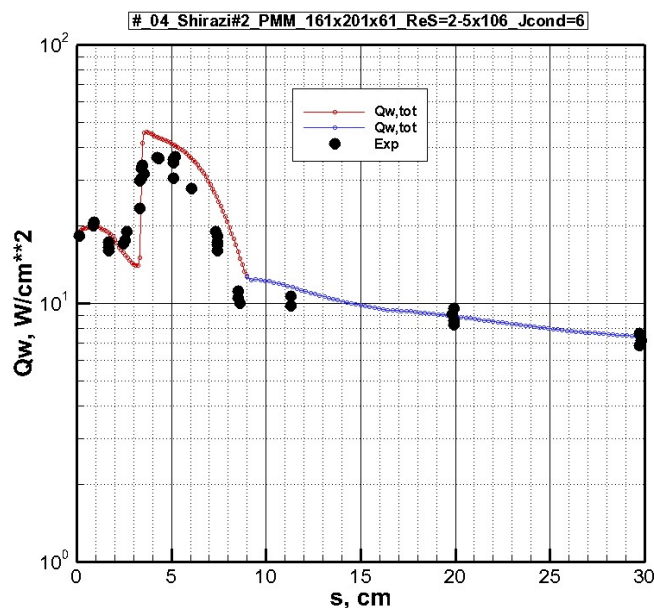


Рис. 15. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности экспериментальной модели для опытных данных [31]. Модель турбулентного смешения РММ при задании плавного ламинарно-турбулентного перехода при  $Re_T = (2 \div 5) \times 10^6$

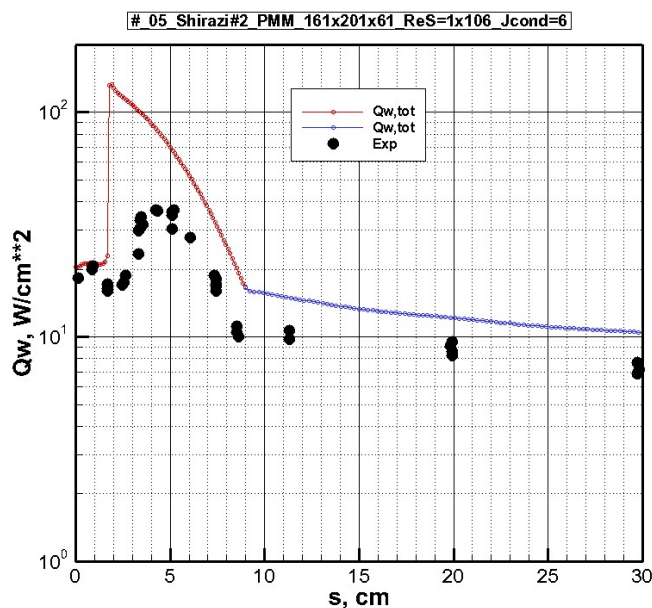


Рис. 16. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности экспериментальной модели для опытных данных [31]. Модель турбулентного смешения РММ при задании критического числа ламинарно-турбулентного перехода при  $Re_T = 10^6$

На заключительном рисунке данной расчетной серии, рис. 18, показано распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности с юбкой. На этом распределении хорошо идентифицируются особенности конвективного нагрева обтекаемой поверхности на сферическом затуплении, конусе, цилиндрическом участке, конической поверхности юбки и ее цилиндрической части.

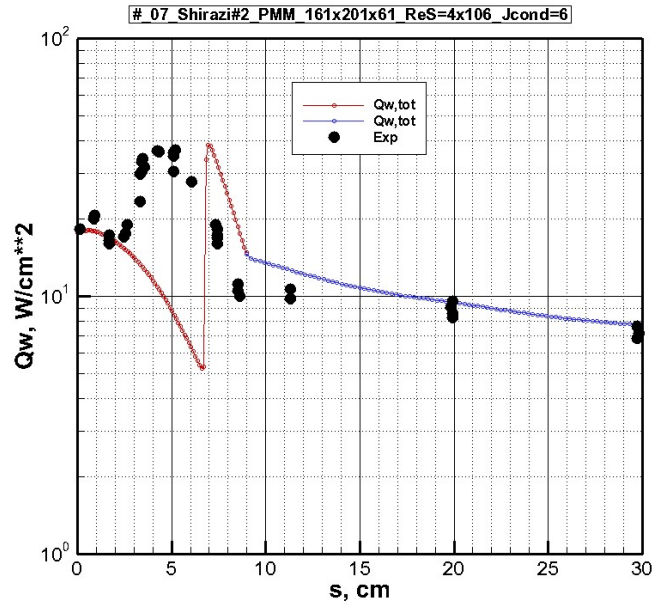


Рис. 17. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности экспериментальной модели для опытных данных [31]. Модель турбулентного смешения PMM при задании критического числа ламинарно-турбулентного перехода при  $Re_T = 4 \times 10^6$

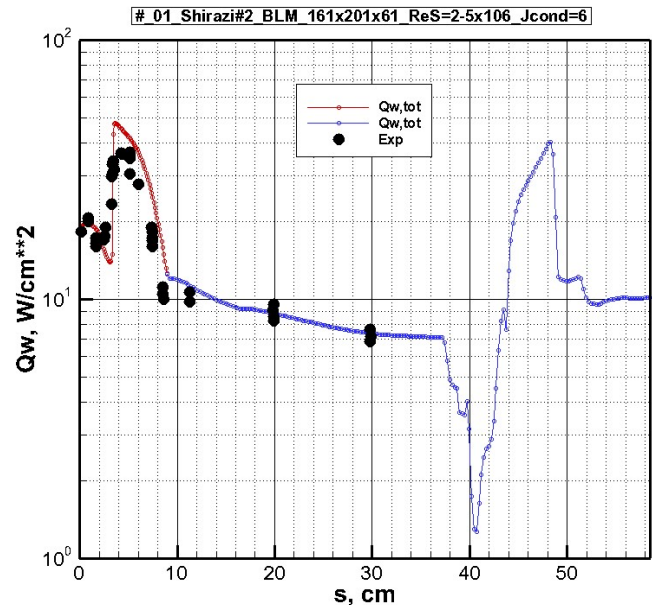


Рис. 18. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности экспериментальной модели для опытных данных [31]. Модель турбулентного смешения PMM при задании плавного ламинарно-турбулентного перехода при  $Re_T = (2 \div 5) \times 10^6$

### 3.2. Тестовая задача турбулентного нагрева поверхности затупленного по сфере конуса. (Шифр задачи ST-C-CALSPAN)

В данной тестовой задаче [33] рассматривается обтекание затупленного по сфере радиусом  $R_n = 1.27$  см конуса с углом полураствора  $\theta = 7^\circ$  сверхзвуковым потоком совершенного газа со скоростью  $M = 8$  при исходных данных указанных в табл. 2. В работах [4, 33] представлены результаты измерения плотности конвективных тепловых потоков на конической поверхности до расстояния  $L \sim 90$  см. Экспериментальные данные по распределению конвективных тепловых потоков по сферической части отсутствуют.

Таблица 2

## Исходные данные второй тестовой задачи [33]

Тест	$\rho_\infty$ , г/см <sup>3</sup>	$p_\infty$ , эрг/см <sup>3</sup>	$V_\infty$ , см/с	$T_\infty$ , К	$T_w$ , К	$\mu_\infty$ , г/(см·с)
ST-C-CALSPAN	$0.360 \times 10^{-4}$	$0.560 \times 10^5$	$1.180 \times 10^5$	54.4	300.	$0.355 \times 10^{-4}$

Геометрия расчетной модели, в соответствии с работой [43], показана на рис. 19. Здесь показаны распределения основных газодинамических функций. Обратим внимание на начальную область течения (до  $x \sim 20$  см), характеризующуюся ярко выраженным режимом вязко-невязкого взаимодействия.

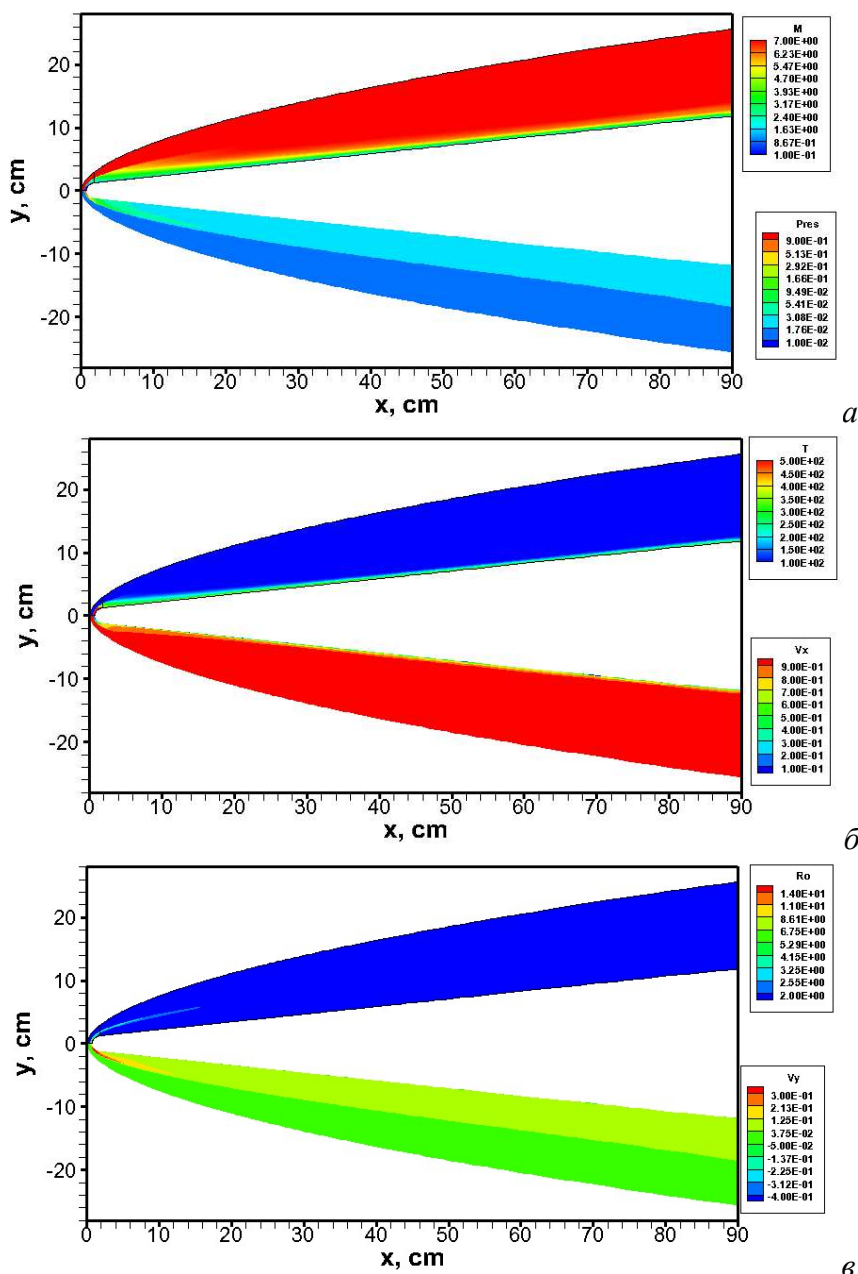


Рис. 19. Поля чисел Маха и давления ( $Pres = p/(\rho_\infty V_\infty^2)$ ), температуры ( $T$ , в К) и продольной скорости ( $V_x = u/V_\infty$ ), плотности ( $\rho/\rho_\infty$ ) и поперечной компоненты скорости ( $V_y = v/V_\infty$ ) в окрестности экспериментальной модели для опытных данных [33]

В целом, как видно из рис. 19, *а*, толщина сжатого слоя возмущенного течения не превосходит  $\sim 4$  см, а головная ударная волна, отходящая вдоль поверхности конического тела, располагается на расстоянии менее  $\sim 8$  см от поверхности (рис. 19, *б*). Хорошо видна корреляция распределения давления (рис. 19, *а*) и радиальной составляющей скорости (рис. 19, *в*).

К сожалению, из опытных данных [33] невозможно определить координаты ламинарно-турбулентного перехода. Поэтому на рис. 20 представлены результаты расчетов плотности конвективных потоков с использованием RANS модели совместно с алгебраическими моделями BLM (рис. 20, *а*) и PMM (рис. 20, *б*).

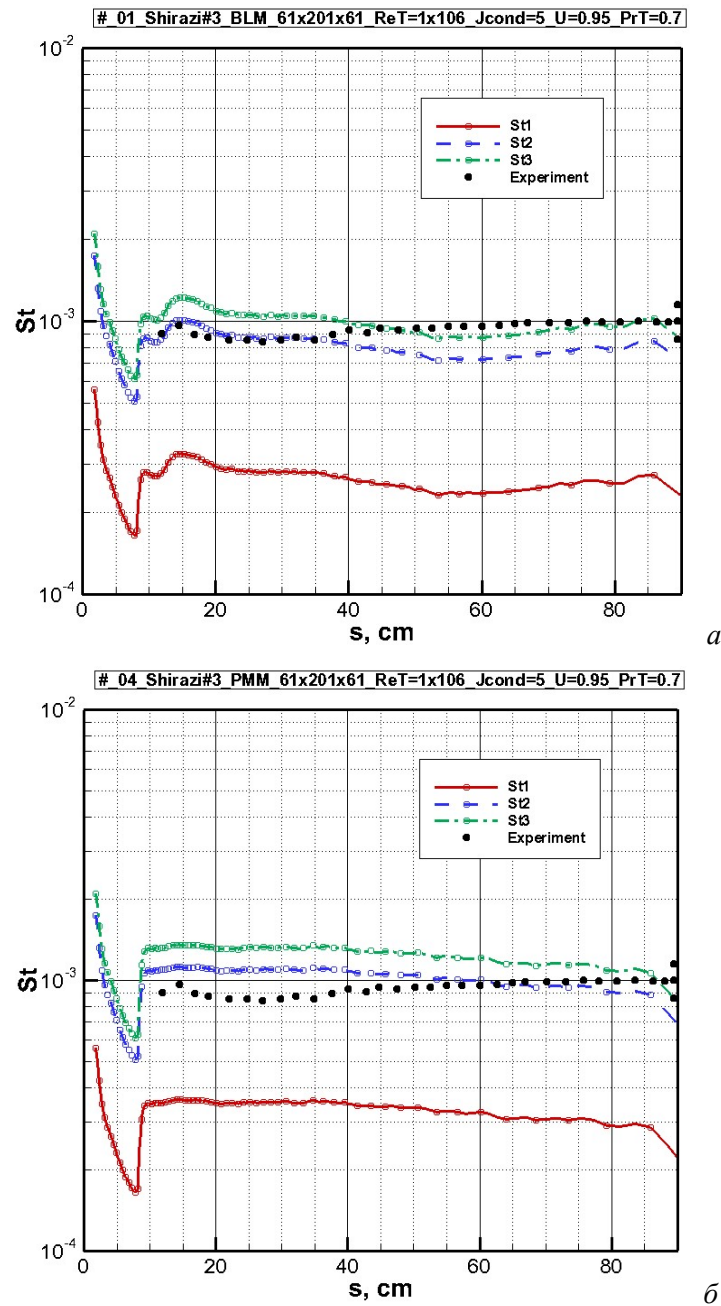


Рис. 20. Распределение чисел Стантона потока вдоль поверхности экспериментальной модели для опытных данных [33]. Модель турбулентного смешения PMM при  $Re_T = 1.0 \times 10^6$ ,  $Pr_T = 0.7$ . Красная кривая (St1) – расчет по формуле (3.1), синяя кривая (St2) – расчет по формуле (3.2), зеленая кривая (St3) – расчет по формуле (3.3). Черные точки – экспериментальные данные [33]

На рис. 20 (и далее) показаны профили безразмерных тепловых потоков – критерии Стантона, рассчитываемые по альтернативным формулам, часто используемым в литературе, дающим, как это видно, различающиеся результаты

$$St_1 = \frac{Q_w}{\rho_\infty V_\infty^3}, \quad (3.1)$$

$$St_2 = \frac{Q_w}{\rho_\infty V_\infty \Delta h_0}, \quad (3.2)$$

$$St_3 = \frac{Q_w}{\rho_\infty V_\infty \Delta h_r}, \quad (3.3)$$

где

$$\Delta h_0 = c_p (T_0 - T_w), \quad \Delta h_r = c_p (T_r - T_w), \quad T_0 = T_\infty \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right), \quad T_r = T_\infty \left(1 + r \frac{\gamma-1}{2} M^2\right), \quad r = 0.89$$

Лучшее совпадение с экспериментальными данными дают значения  $St_2$  и  $St_3$ , что соответствует использованной в [43] нормировке, при задании критического числа Рейнольдса  $Re_T = 1 \times 10^6$ . Видно, что по результатам расчетов ЛТП наступает на расстоянии  $\sim 8$  см от критической точки. Модель РММ дает несколько более завышенные значения.

На рис. 21, *а*, *б* показаны аналогичные расчетные данные, полученные при  $Re_T = 2 \times 10^6$ . В этом случае ЛТП фиксируется на расстоянии  $\sim 17$  см.

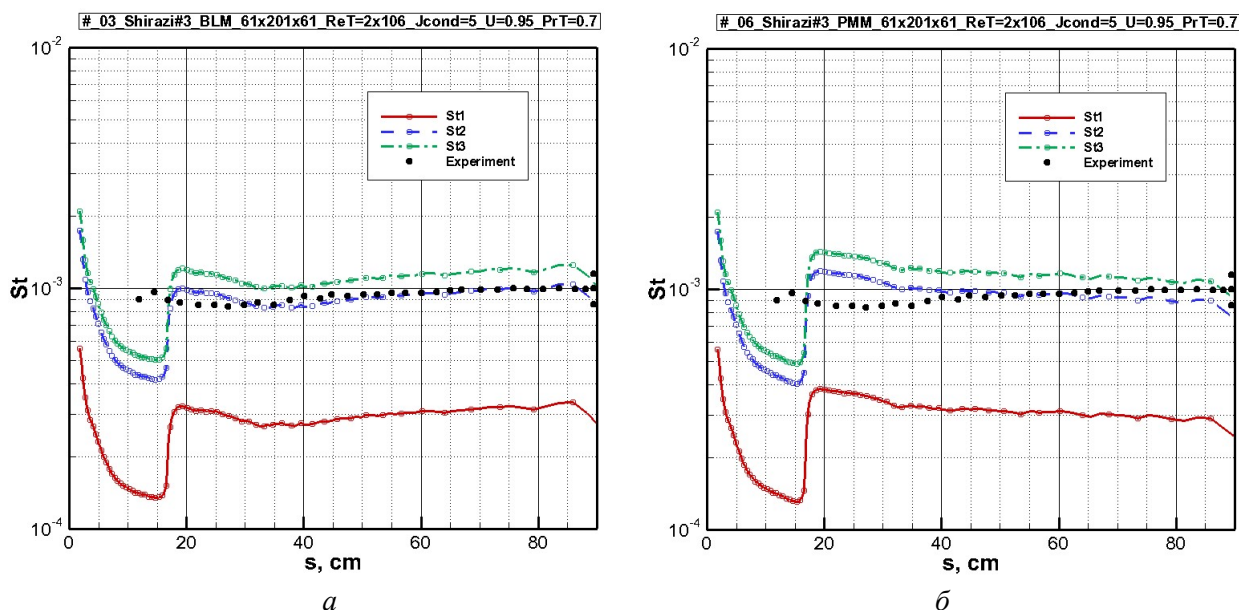


Рис. 21. Распределение чисел Стантона потока вдоль поверхности экспериментальной модели для опытных данных [33]. Модель турбулентного смешения РММ при  $Re_T = 2.0 \times 10^6$ ,  $Pr_T = 0.7$ . Красная кривая ( $St_1$ ) – расчет по формуле (3.1), синяя кривая ( $St_2$ ) – расчет по формуле (3.2), зеленая кривая ( $St_3$ ) – расчет по формуле (3.3). Черные точки – экспериментальные данные [33]

Распределения чисел Стантона на рис. 20 и рис. 21 отвечают величине числа Прандтля  $Pr_T = \mu_T c_p / \lambda_T$ . Известно, что этот параметр в моделях RANS оказывает заметное влияние на результаты расчетов интенсивности турбулентного нагрева, в частности, при изменении температуры поверхности [11]. В рассматриваемом случае увеличение турбулентного числа Прандтля до величины  $Pr_T = 1.0$  приводит к незначительным изменениям результатов (см. рис. 22), а для модели BLM – даже к некоторому улучшению совпадения с эксперименталь-

ными данными. На рис. 23 показано распределение чисел Стантона для ламинарного характера течения. Отметим примерно трехкратное превосходство плотности конвективных тепловых потоков при турбулентном характере течения над ламинарным.

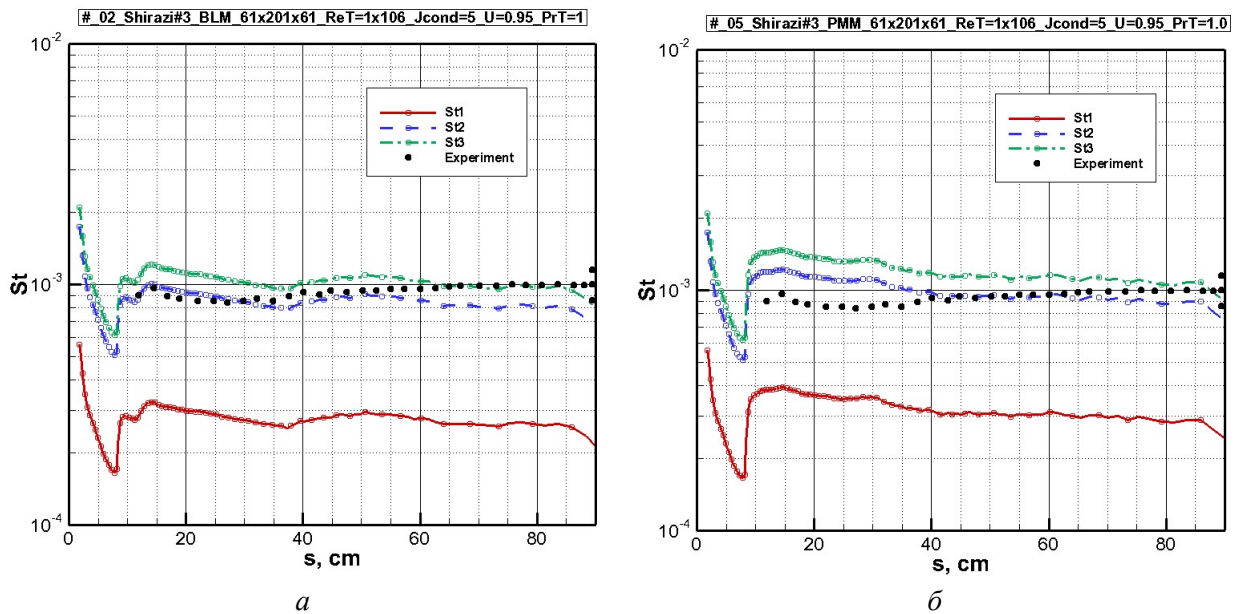


Рис. 22. Распределение чисел Стантона потока вдоль поверхности экспериментальной модели для опытных данных [33]. Модель турбулентного смешения PMM при  $Re_T = 1.0 \times 10^6$ ,  $Pr_T = 1.0$ . Красная кривая (St1) – расчет по формуле (3.1), синяя кривая (St2) – расчет по формуле (3.2), зеленая кривая (St3) – расчет по формуле (3.3). Черные точки – экспериментальные данные [22]

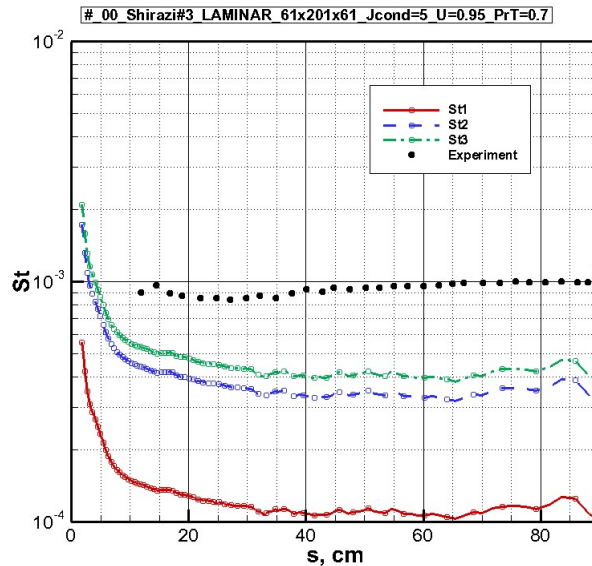


Рис. 23. Распределение чисел Стантона потока вдоль поверхности экспериментальной модели для опытных данных [33]. Модель ламинарного обтекания. Красная кривая (St1) – расчет по формуле (3.1), синяя кривая (St2) – расчет по формуле (3.2), зеленая кривая (St3) – расчет по формуле (3.3). Черные точки – экспериментальные данные [33]

На рис. 24 даны радиальные распределения молекулярной и турбулентной вязкости в 5-ти сечениях вдоль поверхности экспериментальной модели, координаты которых показаны на этом же рисунке. Как и для 1-й тестовой задачи обратим внимание на малость турбулентной вязкости в пристеночном слое и экспоненциальное ее падение на внешней границе пограничного слоя. Соответствующие распределения температуры показаны на рис. 25.

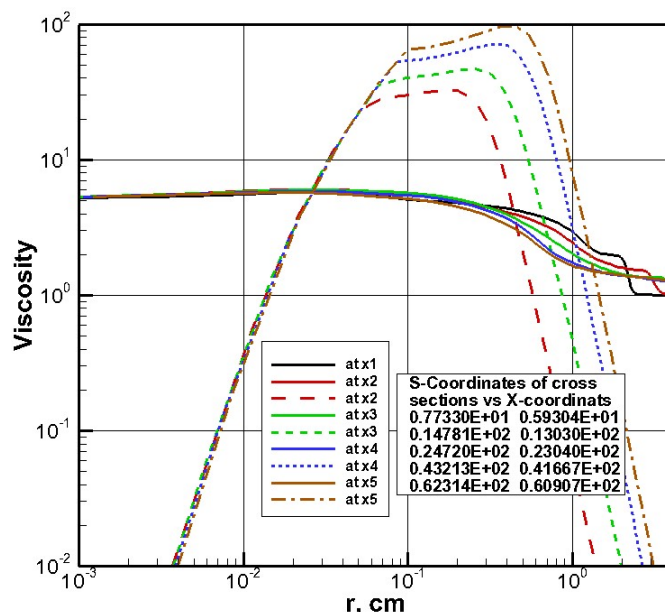


Рис. 24. Распределение молекулярной  $\mu/\mu_\infty$  и турбулентной  $\mu_t/\mu_\infty$  вязкости по радиусу от поверхности экспериментальной модели для опытных данных [33] в 5-ти сечениях вдоль оси  $x$ :  $x_1 = 5.93$  см,  $x_2 = 13.0$  см,  $x_3 = 23.0$  см,  $x_4 = 41.7$  см,  $x_5 = 60.9$  см. Расчет с использованием модели BLM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 1.0 \times 10^6$

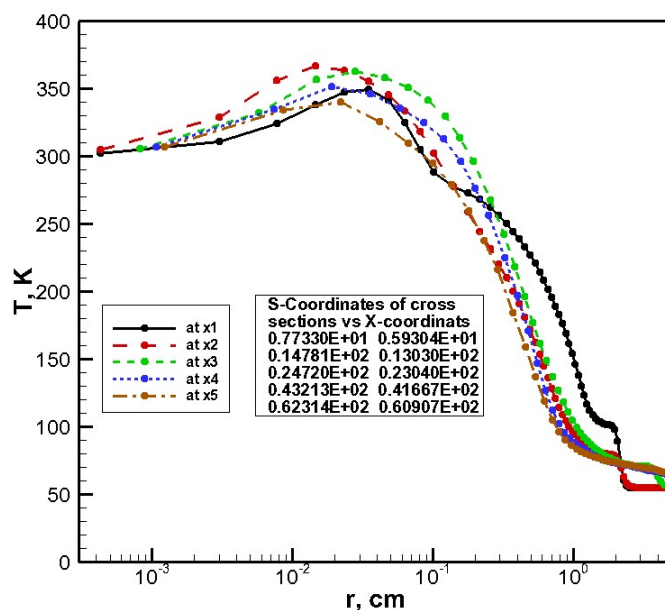


Рис. 25. Распределение температуры по радиусу от поверхности экспериментальной модели для опытных данных [33] в 5-ти сечениях вдоль оси  $x$ :  $x_1 = 5.93$  см,  $x_2 = 13.0$  см,  $x_3 = 23.0$  см,  $x_4 = 41.7$  см,  $x_5 = 60.9$  см. Расчет с использованием модели BLM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 1.0 \times 10^6$

Распределения температуры, числа Маха, осевой скорости и давления вдоль критической линии тока показаны на рис. 26–29. В целом отметим хорошее классическое поведение отмеченных функций. Небольшая немонотонность наблюдается только в одной точке на фронте ударной волны.



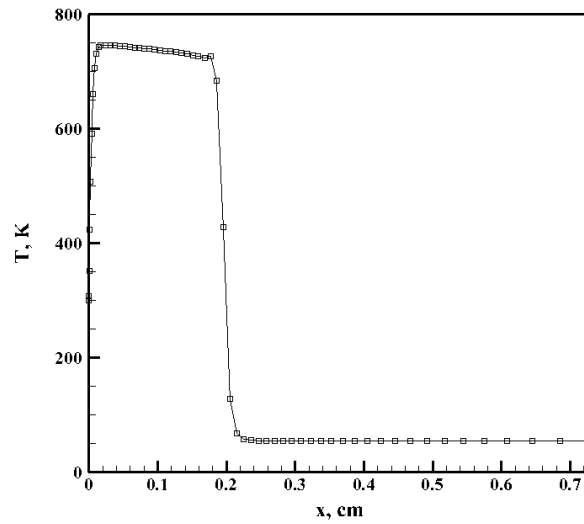


Рис. 26. Распределение температуры скорости вдоль критической линии тока у поверхности экспериментальной модели для опытных данных [33]

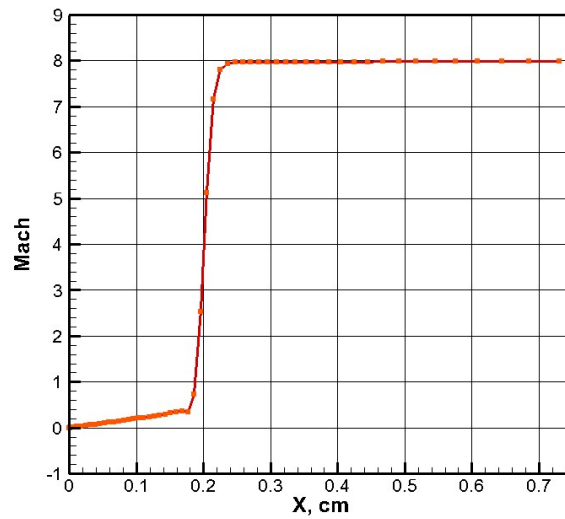


Рис. 27. Распределение числа Маха вдоль критической линии тока у поверхности экспериментальной модели для опытных данных [33]

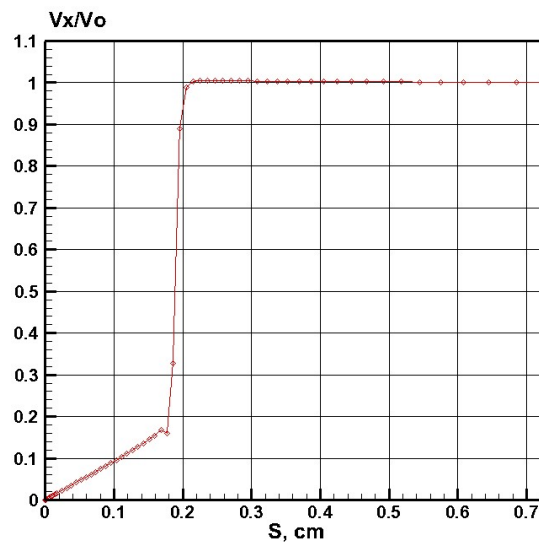


Рис. 28. Распределение продольной скорости вдоль критической линии тока у поверхности экспериментальной модели для опытных данных [33]

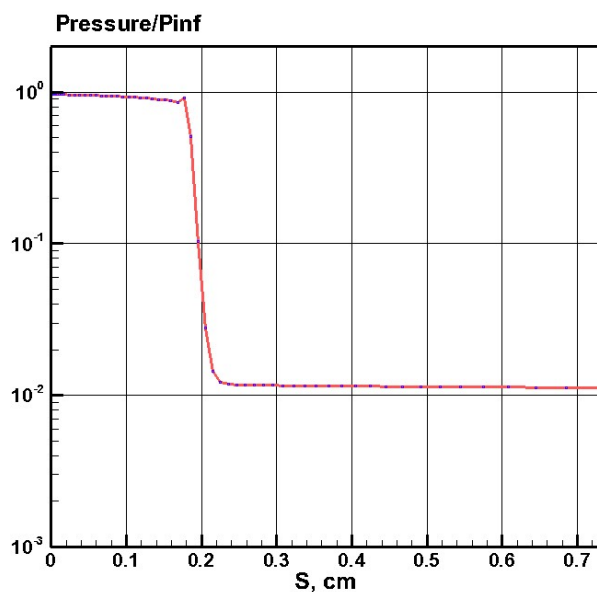


Рис. 29. Распределение давления ( $p/(\rho_\infty V_\infty^2)$ ) вдоль критической линии тока у поверхности экспериментальной модели для опытных данных [33]

### 3.3. Тестовая задача турбулентного нагрева поверхности затупленного по сфере конуса. (Шифр задачи HIFiRE) [34-37]

Исходные данные 3-й и 4-й тестовых задач представлены в табл. 3. В первом расчетном варианте (HIFiRE A)  $M = 6.58$ , а во втором (HIFiRE B) –  $M = 7.28$ . Конфигурация газодинамических полей в обоих случаях практически одинаковая.

Таблица 3

Исходные данные для расчета конвективного нагрева экспериментальной модели HIFiRE-1

	$\rho_\infty$ , г/см <sup>3</sup>	$p_\infty$ , эрг/см <sup>3</sup>	$V_\infty$ , см/с	$T_\infty$ , К	$T_w$ , К	$\mu_\infty$ , г/(см·с)
HIFiRE-1 A ( $H = 17.8$ км)	$1.240 \times 10^{-4}$	$7.330 \times 10^4$	$1.895 \times 10^5$	214.4	293.	$0.140 \times 10^{-3}$
HIFiRE-1 B ( $H = 21$ км)	$0.720 \times 10^{-4}$	$4.620 \times 10^4$	$2.185 \times 10^5$	231.7	300.	$0.150 \times 10^{-3}$

На рис. 30 показаны типичные распределения числа Маха, давления, продольной скорости, температуры, молекулярной и турбулентной вязкости. Главными особенностями полей функций, представляющими интерес в свете данной работы, являются: образование отошедшей ударной волны у лобового сферического затупления радиусом  $R_n = 0.25$  см, тонкий пограничный слой, развивающийся вдоль конической поверхности, область относительного разрежения над цилиндрической поверхностью, заметное ударно-волновое взаимодействие газового потока у поверхности кормовой юбки, возвратно-вихревое движение газа в зоне разрежения за цилиндрической частью юбки, течение в следе.

На рис. 30, в дано сравнение молекулярной и турбулентной вязкости. Алгебраические модели турбулентного смешения не применялись в области отрывного течения, поэтому на рис. 30, в турбулентный пограничный слой виден от начала ЛТП до цилиндрической поверхности кормовой юбки.

Датчики тепловых потоков в эксперименте располагались вдоль обтекаемой поверхности весьма часто, что позволило получить информацию о ламинарно-турбулентном переходе и по относительно экстремальном нагреве конической поверхности юбки. Дискретные черные точки на рис. 31 показывают не только экспериментальные данные по тепловому потоку, но и частоту расположение датчиков теплового потока на поверхности модели.

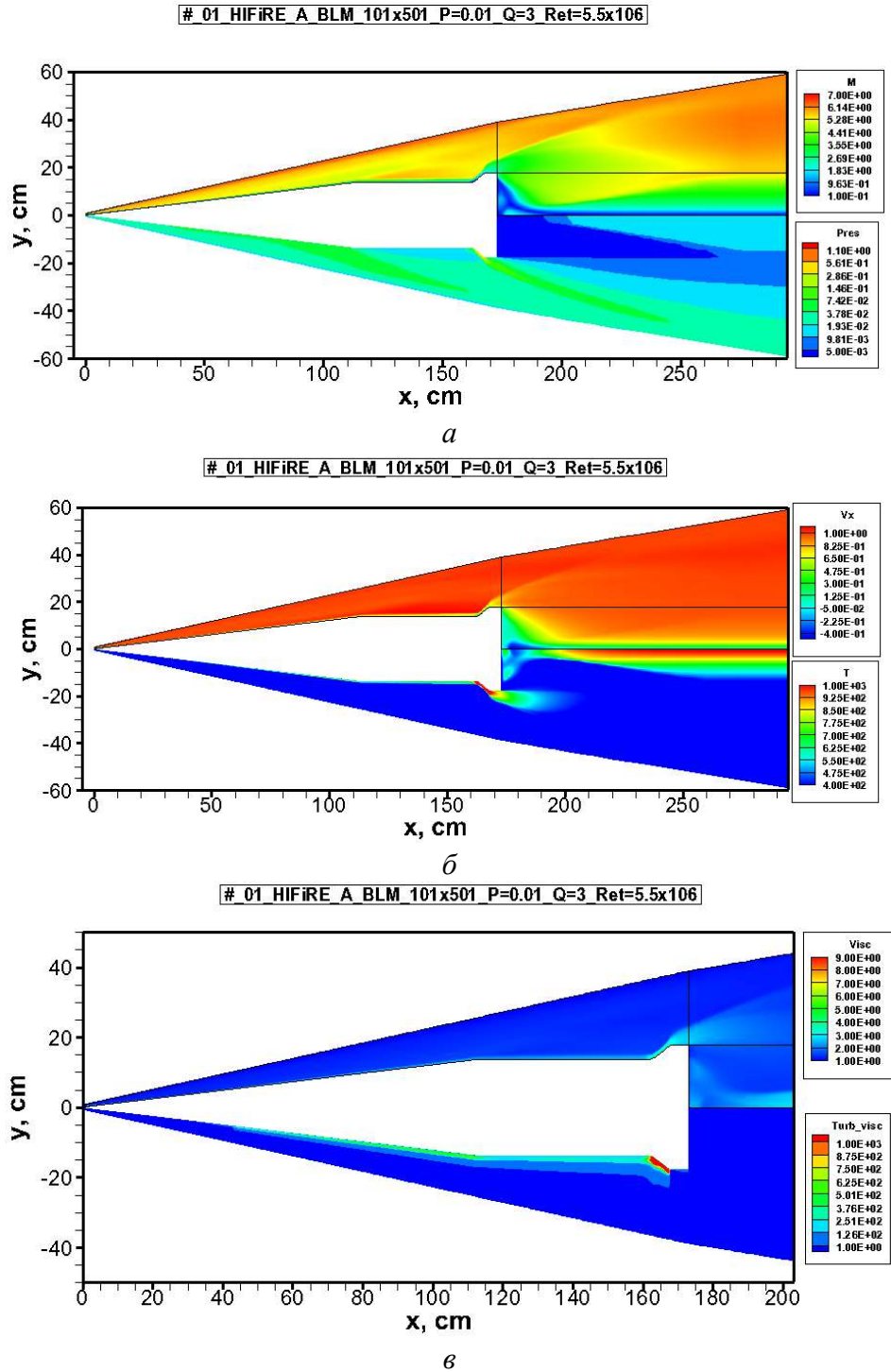


Рис. 30. Поля чисел Маха и давления ( $Pres = p/(\rho_\infty V_\infty^2)$ ), температуры ( $T$ , в К) и продольной скорости ( $V_x = u/V_\infty$ ), молекулярной  $Visc = \mu/\mu_0$  и турбулентной  $Visc = \mu_t/\mu_0$  в окрестности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта А при расчете по модели турбулентного смешения BLM,  $Re_T = 5.5 \times 10^6$

На рис. 31 показаны также расчетные данные для полностью ламинарного характера течения в экспериментальных случаях HIFiRE A и B. Видно хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных вплоть до ламинарно-турбулентного перехода. Отметим также значительное отличие экспериментальных и расчетных данных ламинарного течения в области турбулентного течения.

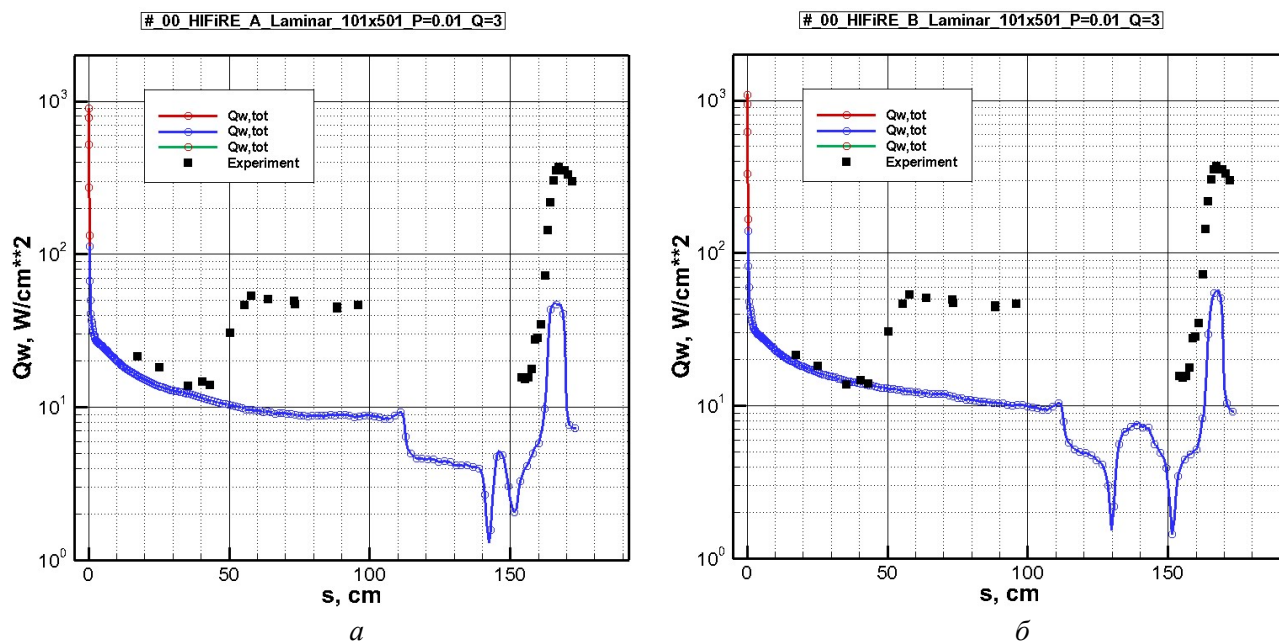


Рис. 31. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта А (а) и В (б). Расчет ламинарного обтекания. Точки – экспериментальные данные [37]

На рис. 32 и 33 получены распределения плотностей конвективных тепловых потоков при использовании модели BLM и  $Re_T = 5.5 \times 10^6$  и  $7.5 \times 10^6$  соответственно для задачи HIFiRE А. Отметим хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных на всей поверхности, включая область взаимодействия газового потока с кормовой юбкой при  $Re_T = 7.5 \times 10^6$ .

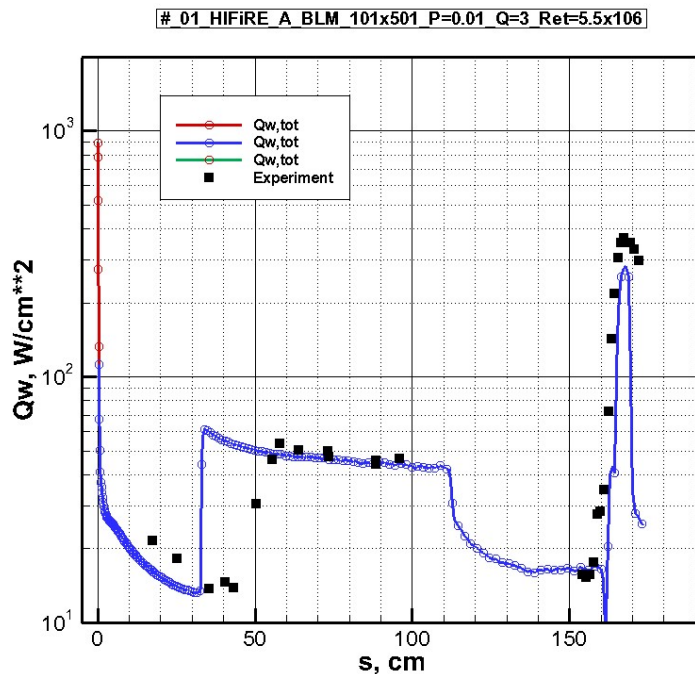


Рис. 32. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта А. Расчет с использованием модели турбулентного смешения BLM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 5.5 \times 10^6$ . Экспериментальные данные [37] помечены точками

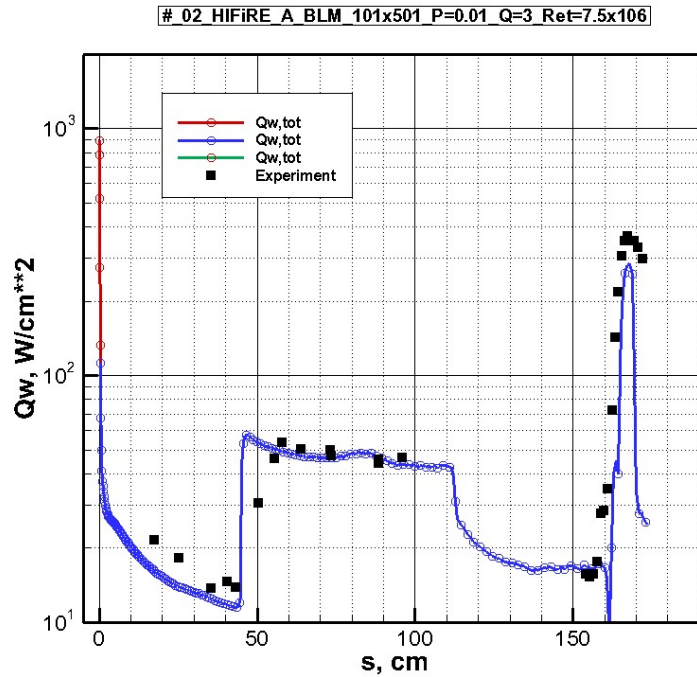


Рис. 33. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта А. Расчет с использованием модели турбулентного смешения BLM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 7.5 \times 10^6$ . Экспериментальные данные [37] помечены точками

На рис. 34 и 35 дано сравнение расчетных и экспериментальных распределений давления на поверхности испытуемой модели для двух значений  $Re_T$ . В целом отметим хорошее совпадение. Однако в небольшой области, отвечающей отрывному течению у подножия конической части кормовой юбки наблюдается расчетное завышение давления. Возможная причина такого завышения исследовалась в работе [47], где показана необходимость особенно тщательного выбора конфигурации конечно-разностных сеток именно в этой области течения.

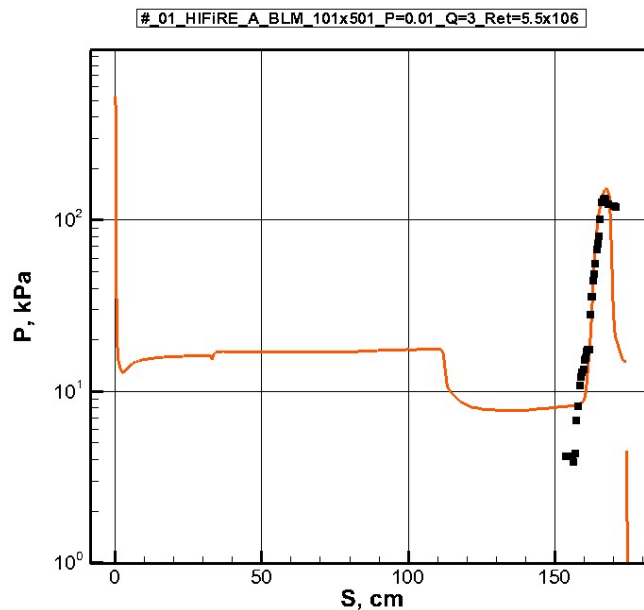


Рис. 34. Распределение давления вдоль поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта А. Расчет с использованием модели турбулентного смешения BLM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 5.5 \times 10^6$ . Экспериментальные данные [37] помечены точками

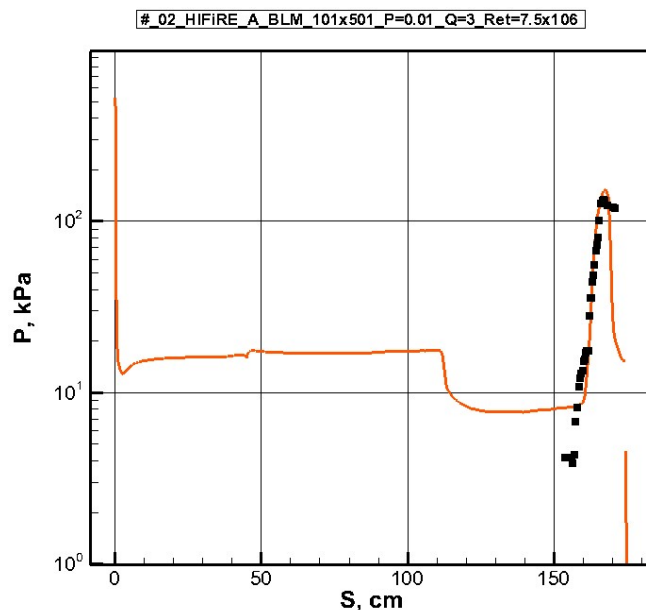


Рис. 35. Распределение давления вдоль поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта А. Расчет с использованием модели турбулентного смешения BLM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 7.5 \times 10^6$ . Экспериментальные данные [37] помечены точками

Возвращаясь к анализу области, занятой турбулентным пограничным слоем (см. рис. 30, в) отметим слабое влияние задания чисел  $Re_T$  на радиальное распределение турбулентной вязкости в разных сечениях вдоль оси  $x$ , показанные на рис. 36 и 37 (кроме первого из приведенных сечений, наиболее близко расположенного к области ЛТП).

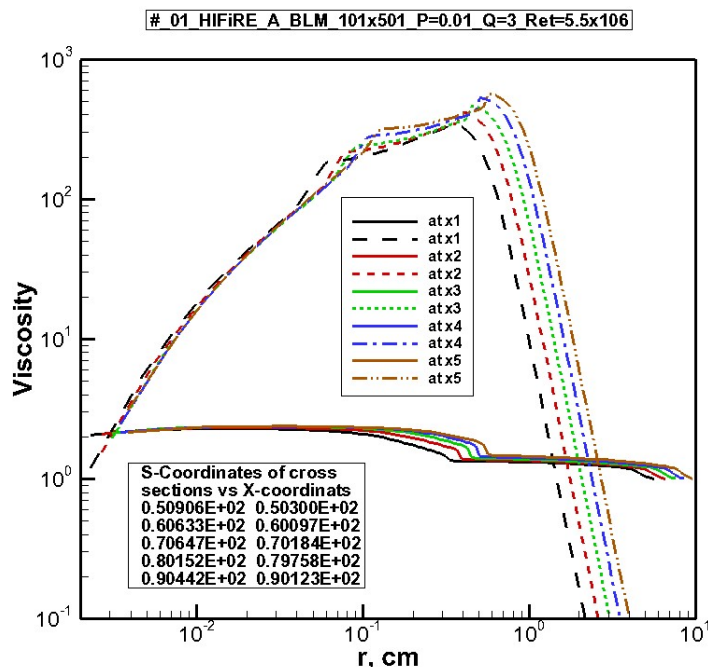


Рис. 36. Распределение молекулярной  $\mu/\mu_\infty$  и турбулентной  $\mu_t/\mu_\infty$  вязкости по радиусу от поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта А в 5-ти сечениях вдоль оси  $x$ :  $x_1 = 50.3$  см,  $x_2 = 60$  см,  $x_3 = 70.1$  см,  $x_4 = 79.8$  см,  $x_5 = 90.1$  см. Расчет с использованием модели BLM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 5.5 \times 10^6$

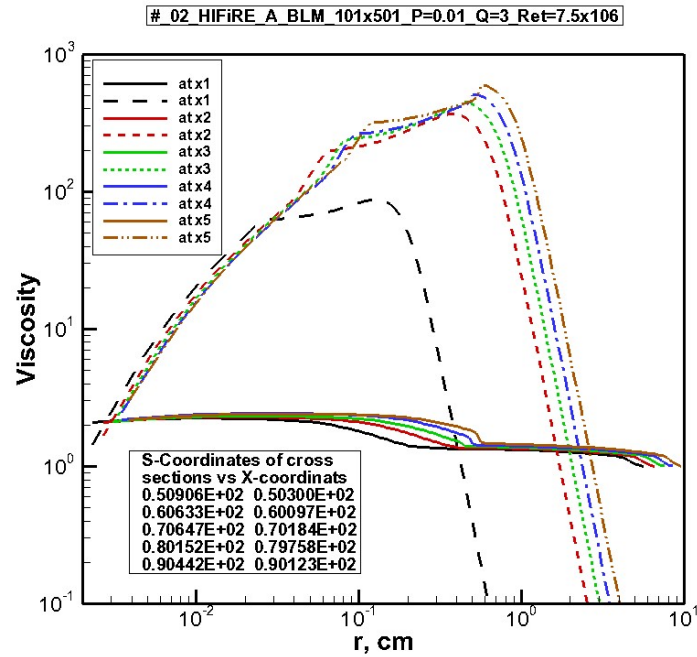


Рис. 37. Распределение молекулярной  $\mu/\mu_\infty$  и турбулентной  $\mu_t/\mu_\infty$  вязкости по радиусу от поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта А в 5-ти сечениях вдоль оси  $x$ :  $x_1 = 50.3$  см,  $x_2 = 60$  см,  $x_3 = 70.1$  см,  $x_4 = 79.8$  см,  $x_5 = 90.1$  см. Расчет с использованием модели BLM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 7.5 \times 10^6$

В расчетном случае HIFiRE В наблюдается лучшее совпадение расчетных и экспериментальных данных, как по распределению конвективных тепловых потоков (рис. 38), так и для давления (рис. 39) при  $Re_T = 5.5 \times 10^6$ . Отметим также хорошее соотношение между молекулярной и турбулентной вязкостью в разных сечениях вдоль оси  $x$  (рис. 40).

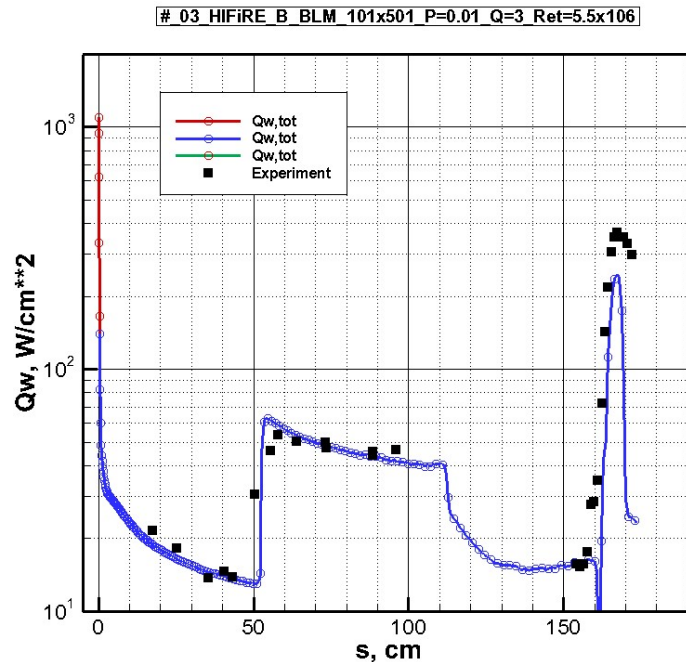


Рис. 38. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта В. Расчет с использованием модели турбулентного смешения BLM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 5.5 \times 10^6$ . Экспериментальные данные [37] помечены точками

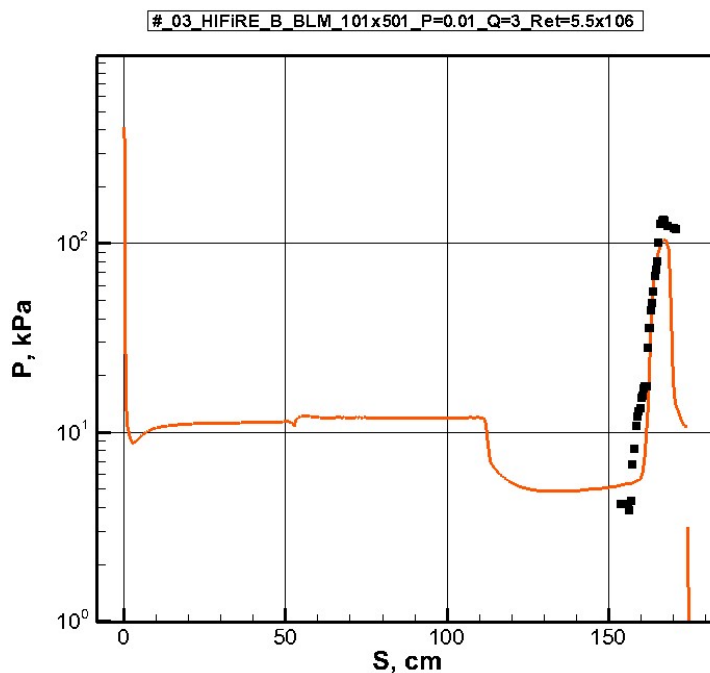


Рис. 39. Распределение давления вдоль поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта В. Расчет с использованием модели турбулентного смешения BLM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 5.5 \times 10^6$ . Экспериментальные данные [37] помечены точками

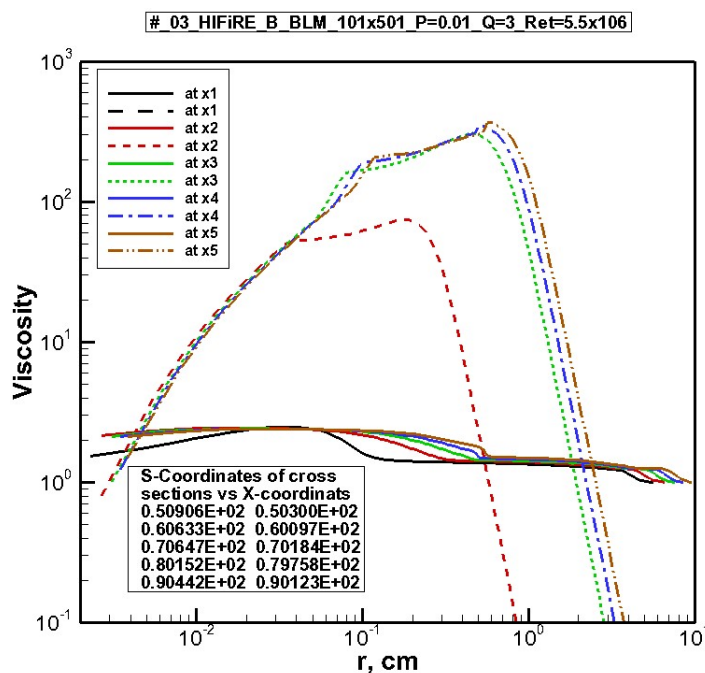


Рис. 40. Распределение молекулярной  $\mu/\mu_\infty$  и турбулентной  $\mu_t/\mu_\infty$  вязкости по радиусу от поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта В в 5-ти сечениях вдоль оси  $x$ :  $x_1 = 50.3$  см,  $x_2 = 60$  см,  $x_3 = 70.1$  см,  $x_4 = 79.8$  см,  $x_5 = 90.1$  см. Расчет с использованием модели BLM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 5.5 \times 10^6$

Результаты применения РММ модели турбулентного смешения также демонстрируют хорошее совпадение с экспериментальными данными, как для варианта HIFiRE-A при двух значениях  $Re_T$  (рис. 41–46), так и для варианта HIFiRE-B (рис. 47–49).



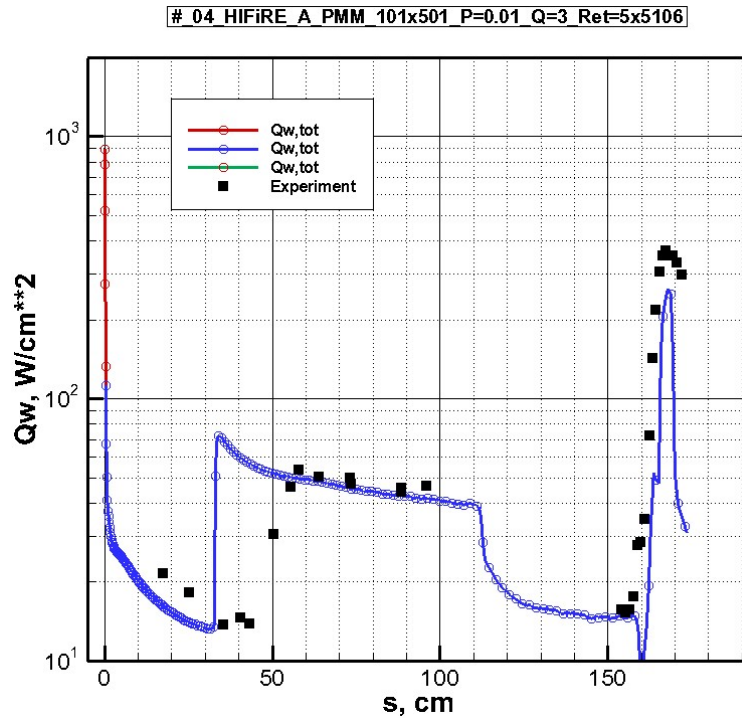


Рис. 41. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта А. Расчет с использованием модели турбулентного смешения PMM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 5.5 \times 10^6$ . Экспериментальные данные [37] помечены точками

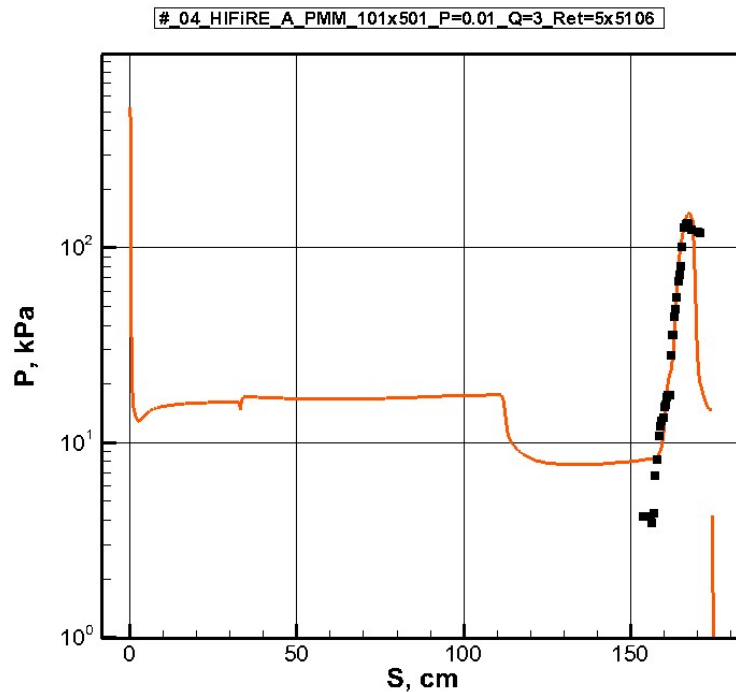


Рис. 42. Распределение давления вдоль поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта А. Расчет с использованием модели турбулентного смешения BLM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 5.5 \times 10^6$ . Экспериментальные данные [37] помечены точками

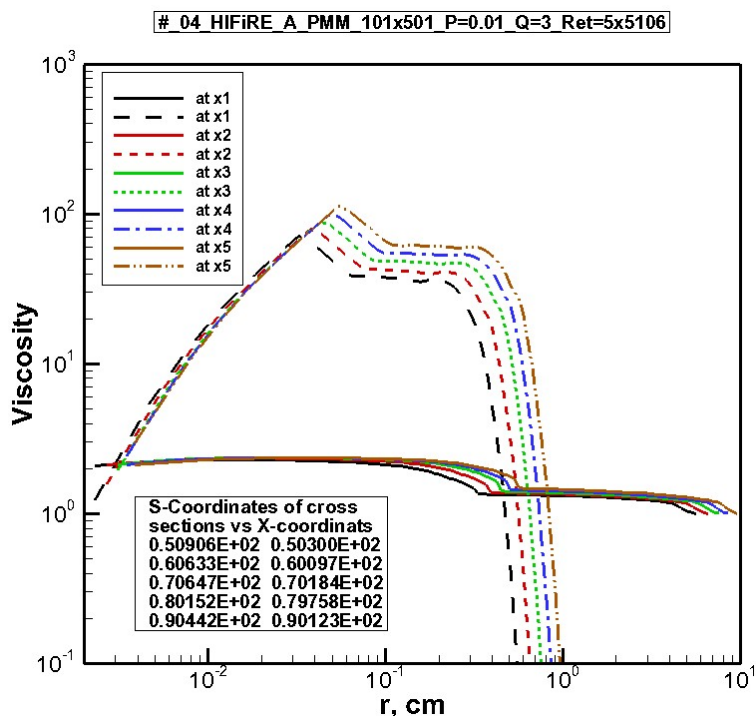


Рис. 43. Распределение молекулярной  $\mu/\mu_\infty$  и турбулентной  $\mu_t/\mu_\infty$  вязкости по радиусу от поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта В в 5-ти сечениях вдоль оси  $x$ :  $x_1 = 50.3$  см,  $x_2 = 60$  см,  $x_3 = 70.1$  см,  $x_4 = 79.8$  см,  $x_5 = 90.1$  см. Расчет с использованием модели PMM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 5.5 \times 10^6$

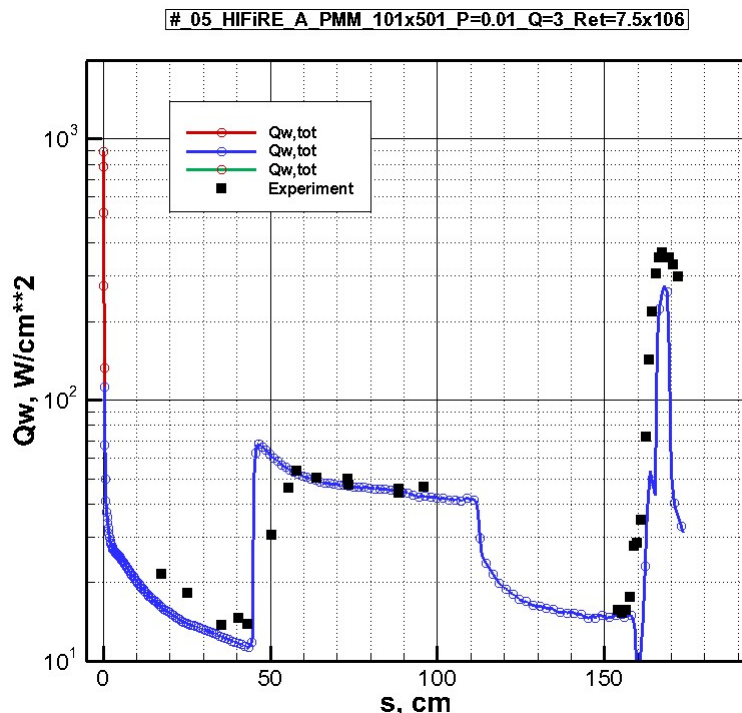


Рис. 44. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта А. Расчет с использованием модели турбулентного смешения PMM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 7.5 \times 10^6$ . Экспериментальные данные [37] помечены точками

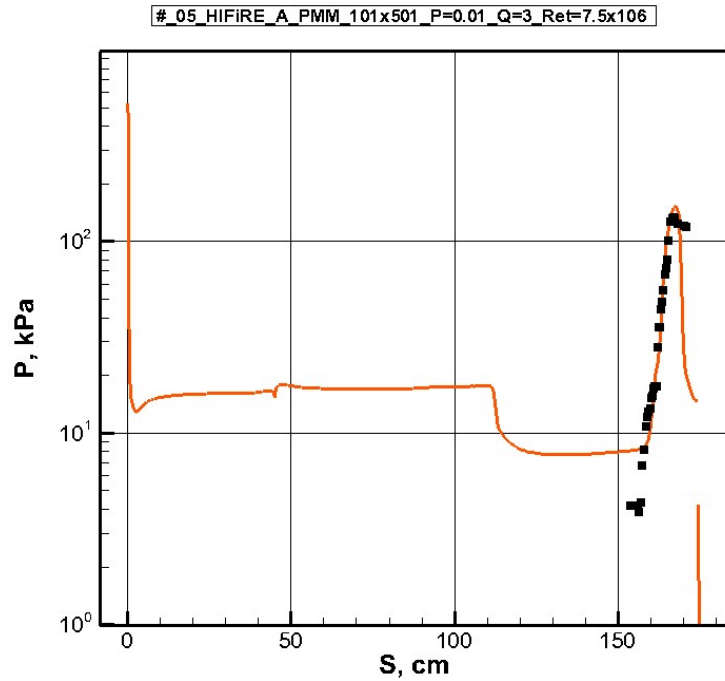


Рис. 45. Распределение давления вдоль поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта А. Расчет с использованием модели турбулентного смешения BLM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 7.5 \times 10^6$ . Экспериментальные данные [37] помечены точками

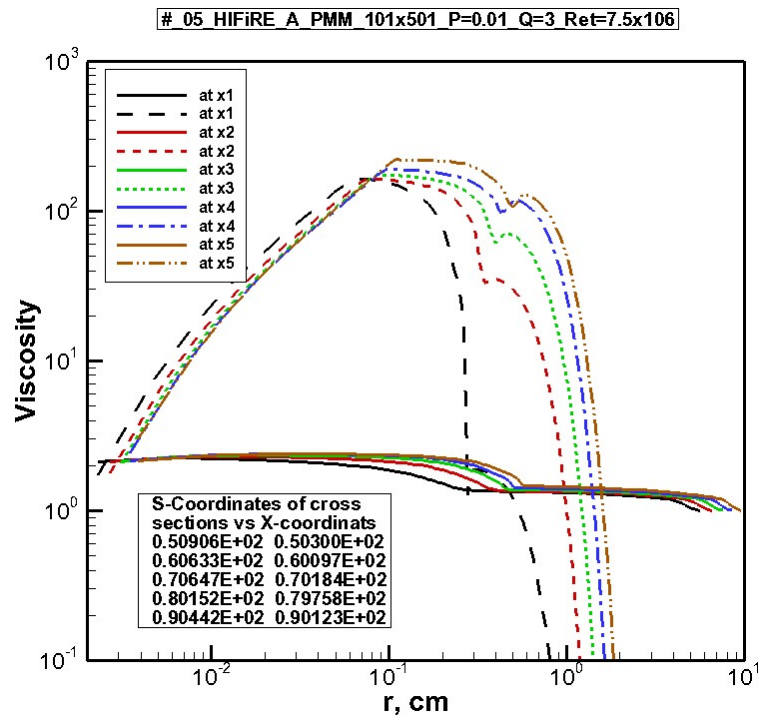


Рис. 46. Распределение молекулярной  $\mu/\mu_\infty$  и турбулентной  $\mu_t/\mu_\infty$  вязкости по радиусу от поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта В в 5-ти сечениях вдоль оси  $x$ :  $x_1 = 50.3$  см,  $x_2 = 60$  см,  $x_3 = 70.1$  см,  $x_4 = 79.8$  см,  $x_5 = 90.1$  см. Расчет с использованием модели PMM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 7.5 \times 10^6$

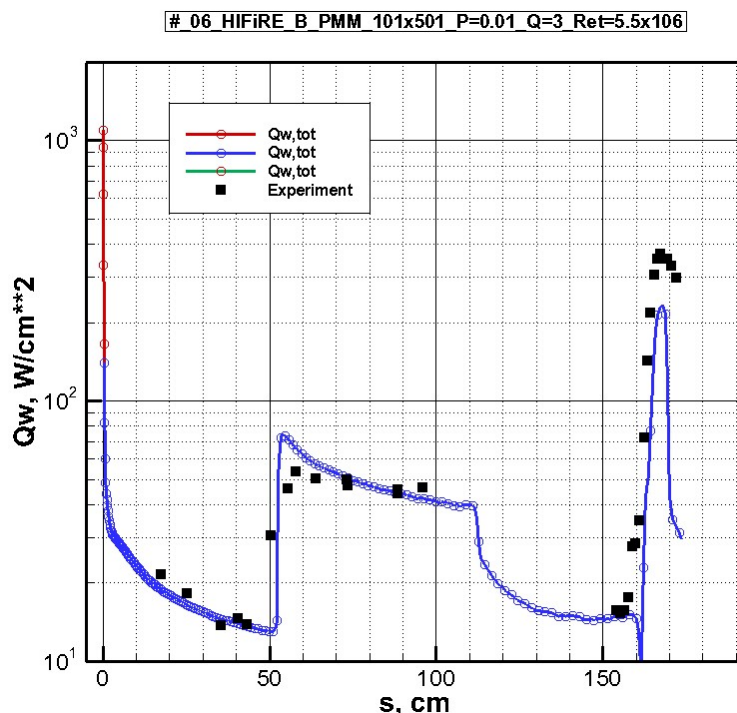


Рис. 47. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта В. Расчет с использованием модели турбулентного смешения РММ при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 5.5 \times 10^6$ . Экспериментальные данные [37] помечены точками

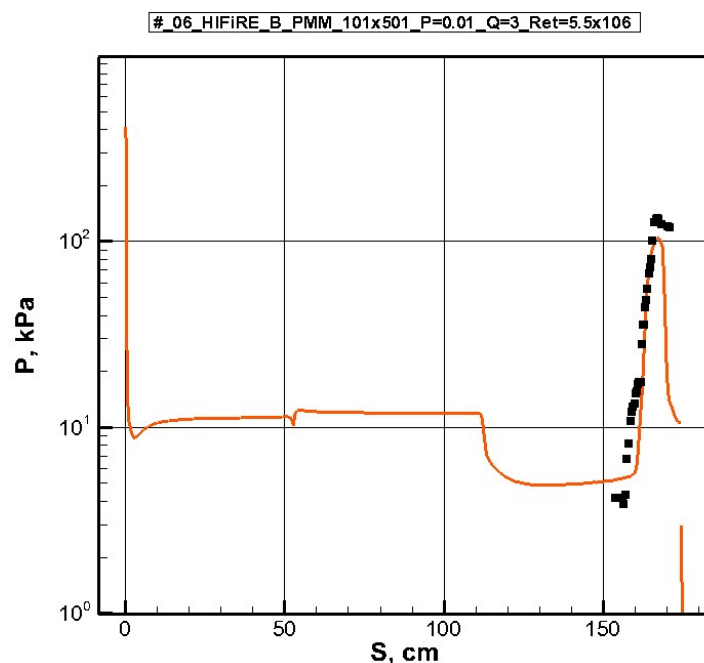


Рис. 48. Распределение давления вдоль поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта В. Расчет с использованием модели турбулентного смешения РММ при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 5.5 \times 10^6$ . Экспериментальные данные [37] помечены точками

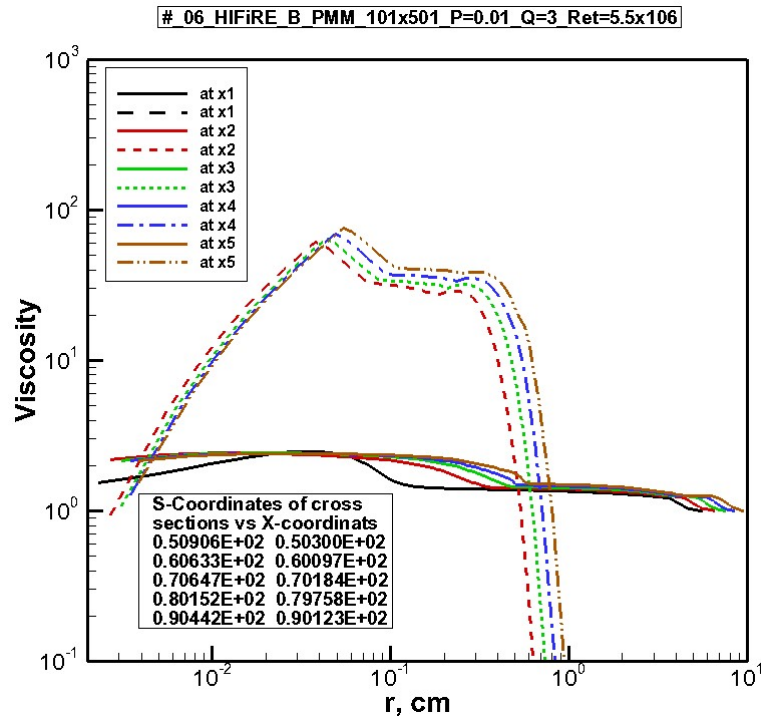


Рис. 49. Распределение молекулярной  $\mu/\mu_\infty$  и турбулентной  $\mu_t/\mu_\infty$  вязкости по радиусу от поверхности гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 для экспериментального варианта В в 5-ти сечениях вдоль оси  $x$ :  $x_1 = 50.3$  см,  $x_2 = 60$  см,  $x_3 = 70.1$  см,  $x_4 = 79.8$  см,  $x_5 = 90.1$  см. Расчет с использованием модели PMM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 5.5 \times 10^6$

Завершая расчетный анализ тестовой задачи HIFiRE-A и В [34–37] можно констатировать, что 2D RANS-модели совместно с алгебраическими моделями турбулентности BLM и PMM дают хорошее описание экспериментальных данных по весьма сложной конфигурации течения. Однако, подчеркнем, что для получения такого согласия требовалась тщательная работа по построению конечно-разностных сеток.

#### 4. Тестовая задача REENTRY-F

Отличительной особенностью пятой тестовой задачи является протяженная поверхность обтекаемого конуса, затупленного по сфере радиусом  $R_n = 0.343$  см при  $M = 20$  [39, 40]. Как уже отмечалось, в реальных условиях летного эксперимента наблюдалось частичное оплавление головной части конуса. Указанная величина  $R_n$  была выбрана в серии последующих публикаций в качестве базовой величины для получения и сравнения численных решений [7]. Еще одной, закономерной, особенностью при указанной скорости является весьма затянувшаяся область ламинарно-турбулентного перехода, вплоть до  $x \sim 240 \div 260$  см. Критическое число Рейнольдса при этом равно  $Re_T \sim 4.0 \times 10^7$ . Исходные данные [7], использованные в расчетах, приведены в табл. 4.

Таблица 4

Исходные данные пятой тестовой задачи [7, 39]

	$\rho_\infty$ , г/см <sup>3</sup>	$p_\infty$ , эрг/см <sup>3</sup>	$V_\infty$ , см/с	$T_\infty$ , К	$T_w$ , К	$\mu_\infty$ , г/(см·с)
REENTRY-F (H=24 км)	$4.353 \times 10^{-5}$	$2.761 \times 10^4$	$5.952 \times 10^5$	221.	293.	$0.144 \times 10^{-3}$

В силу отмеченных специфических условий обтекания типичные распределения газодинамических функций, показанные на рис. 50 и 51, выглядят весьма просто: сжатый слой толщиной порядка 10 см у обтекаемого тела и пограничный слой толщиной примерно 2 см у по-

верхности. На рис. 51 видна ламинарная и турбулентная области погранслоеного течения. При указанных параметрах потока и весьма грубых расчетных сетках ярко выраженной отрывной зоны течения не наблюдается.

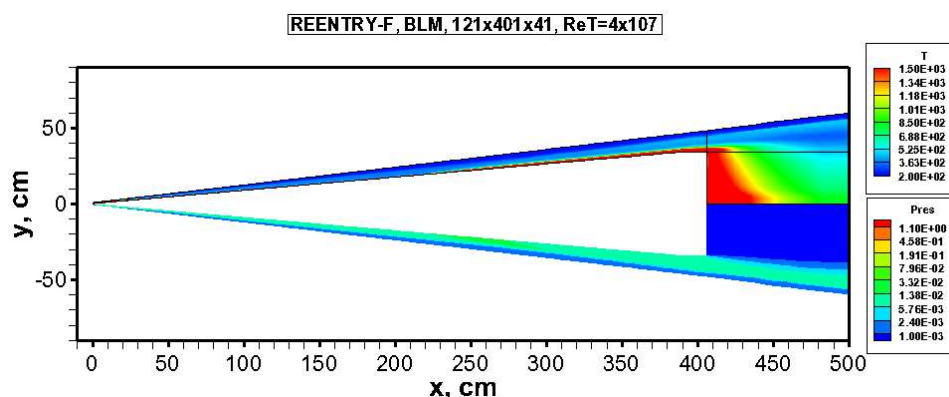


Рис. 50. Поля температуры ( $T$ , в К) и давления ( $Pres = p/(\rho_\infty V_\infty^2)$ ) в окрестности экспериментального аппарата REENTRY-F

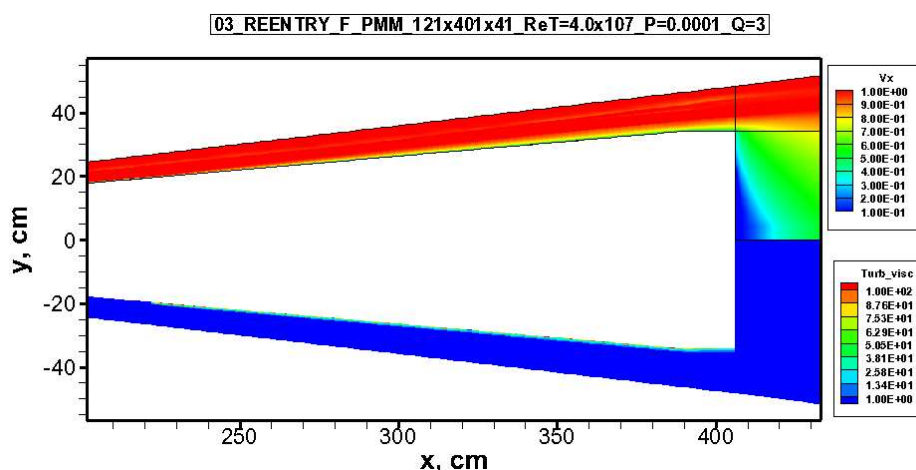


Рис. 51. Поля продольной скорости ( $V_x = u/V_\infty$ ) и турбулентной вязкости ( $\mu_t/\mu_\infty$ ) вблизи поверхности экспериментального аппарата REENTRY-F

На рис. 52 представлены результаты расчетов нагрева поверхности конуса с учетом ламинарно-турбулентного перехода для двух моделей ЛТП:  $a - Re_T \sim 4.0 \times 10^7$ ,  $b - 4.0 \times 10^7 < Re_T < 5.0 \times 10^7$ . Использовалась модель BLM. Отметим хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных как для ламинарной, так и турбулентной области течения. Радиальные распределения ламинарной и турбулентной вязкости в 5-ти сечениях вдоль оси  $x$  показаны на рис. 53,  $a, b$ . Малость турбулентной вязкости по сравнению с молекулярной в пристеночном слое подтверждает высокое качество расчетной сетки в вязком подслое.

Использование модели PMM (рис. 54) также дает хорошее совпадение с экспериментальными данными. На рис. 55 показаны радиальные распределения молекулярной и турбулентной вязкости для этого случая.

В целом, по результатам валидационных исследований на базе экспериментальных данных REENTRY-F [39], можно констатировать хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных. Необходимо отметить, что результаты расчетов других авторов [7, 39, 40] также подтверждают хорошие результаты применения различных моделей турбулентного смешения, в частности, моделей Спаларта – Аллмараса, низкорейнольдсовых  $k - \varepsilon$  моделей и  $k - \omega$  моделей Ментора и Вилкокса [7]. Таким образом, можно говорить не только о валидации, но и о верификации RANS-моделей на базе BLM и PMM.

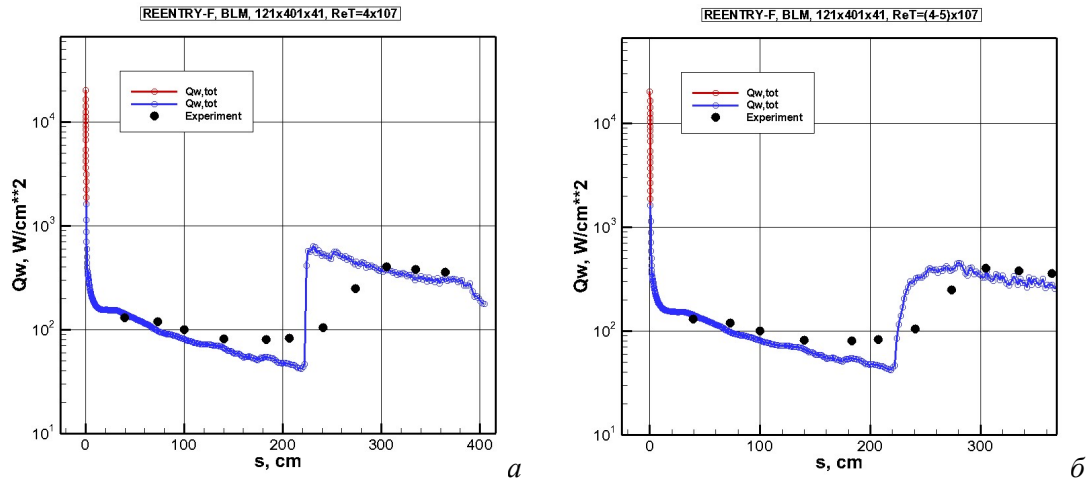


Рис. 52. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности экспериментального аппарата REENTRY-F. Расчет с использованием модели BLM при задании плавного ламинарно-турбулентного перехода в диапазоне чисел Рейнольдса  $Re_T = 4 \times 10^6$  и  $Re_T = (4 \div 5) \times 10^6$ . Точки – экспериментальные данные [7, 39]

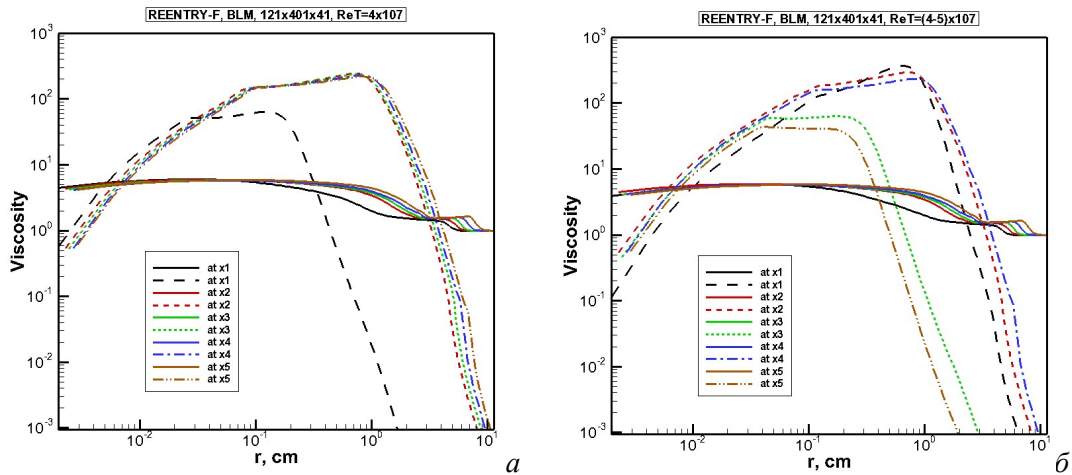


Рис. 53. Распределение молекулярной и турбулентной вязкости по радиусу от поверхности аппарата в 5-ти сечениях вдоль оси  $x$ :  $x_1 = 241$  см,  $x_2 = 282$  см,  $x_3 = 303$  см,  $x_4 = 331$  см,  $x_5 = 362$  см. Расчет с использованием модели BLM при задании плавного ламинарно-турбулентного перехода в диапазоне чисел Рейнольдса  $Re_T = 4 \times 10^6$  и  $Re_T = (4 \div 5) \times 10^6$

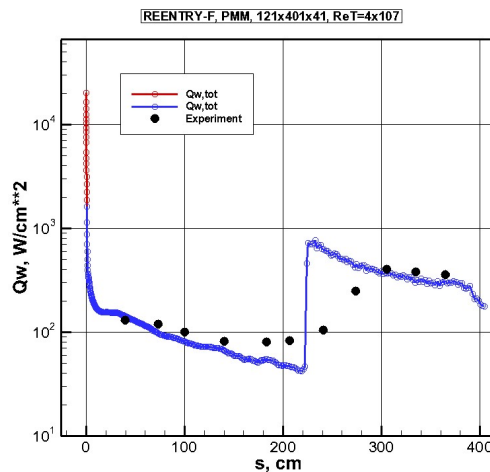


Рис. 54. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности экспериментального аппарата REENTRY-F. Расчет с использованием модели PMM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 4 \times 10^6$

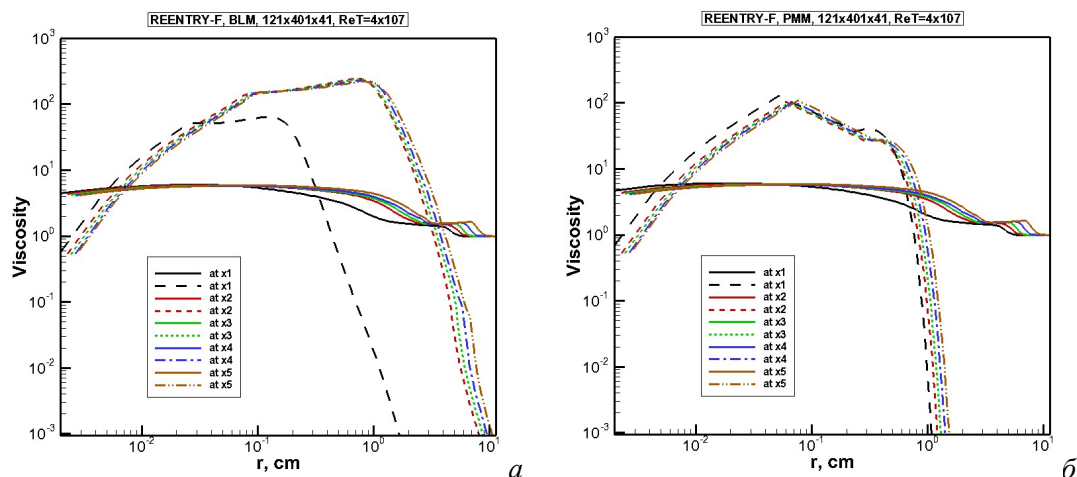


Рис. 55. Распределение молекулярной и турбулентной вязкости по радиусу от поверхности аппарата в 5-ти сечениях вдоль оси  $x$ :  $x_1 = 241$  см,  $x_2 = 282$  см,  $x_3 = 303$  см,  $x_4 = 331$  см,  $x_5 = 362$  см. Расчет с использованием модели BLM (а) и PMM (б) при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 4 \times 10^6$

## 5. Тестовая задача DRDL [46]

В работе [46] приведены экспериментальные данные по гиперзвуковому обтеканию при  $M = 6.5$  затупленного по сфере малого радиуса  $R_n = 0.24$  см конуса с диаметром основания  $D = 15$  см и длиной  $L = 36.75$  см. Эксперименты выполнены на ударной трубе Лаборатории оборонных исследований Индии (Defense Research & Development Laboratory, DRDL). Эффективное время эксперимента в ударной трубе составляло 3.5 мс. Для измерения интенсивности нагрева поверхности применялись датчики, полученные методом вакуумного напыления.

Измерения интенсивности нагрева и распределения давления на поверхности конуса выполнены при двух углах атаки  $\alpha = 0^\circ$  и  $5^\circ$ . В работе [42] представлены также результаты численного моделирования для условий эксперимента с использованием коммерческого кода Ansys Fluent.

В данной работе численная интерпретация экспериментальных данных для  $\alpha = 0^\circ$  выполнена с использованием ламинарной модели обтекания, а также с учетом возможного ламинарно-турбулентного перехода в рамках RANS модели с использованием алгебраических моделей турбулентного смешения BLM и PMM. Исходные данные расчетов, отвечающие условиям проведения экспериментов [46] даны в табл. 5.

Таблица 5

Исходные данные шестой тестовой задачи [42]

	$\rho_\infty$ , г/см <sup>3</sup>	$p_\infty$ , эрг/см <sup>3</sup>	$V_\infty$ , см/с	$T_\infty$ , К	$T_w$ , К
DRDL	$0.203 \times 10^{-4}$	$8.890 \times 10^3$	$1.609 \times 10^5$	152	293

В расчетах использовалась двухслойная конечно-разностная сетка. Непосредственно у поверхности задавался 1-й слой с наименьшим шагом по нормали порядка 1 мкм. В этом подслое задавалось порядка  $10 \div 20$  узлов с постепенным увеличением шага между ними (как правило, по арифметической прогрессии). Во втором слое задавалась неоднородная сетка по закону  $\arctg$ . При необходимости проводилось сгущение в окрестности ударной волны. Расчеты выполнены на сетках  $121 \times 401$  и  $61 \times 201$ .

Турбулентность набегающего потока газа полагалась равной нулю. Продольная координата ЛТП задавалась в качестве исходных данных,  $Re_T \sim 5.5 \times 10^5$ . В алгебраических моделях турбулентности применялась ступенчатая модель:



$$\text{при } Re_x < Re_{x,кф} : \mu_T = 0,$$

$$\text{при } Re_x > Re_{x,p2} : \mu_T$$

На рис. 56 показаны поля газодинамических функций в окрестности экспериментальной модели. Их конфигурация весьма близка к теоретически предсказываемым полям для острого конуса. Заметим, что наличие цилиндрического участка в конфигурации испытуемой модели (в физическом эксперименте его не было) приводит к формированию в данной области течения типа Прандтля – Майера.

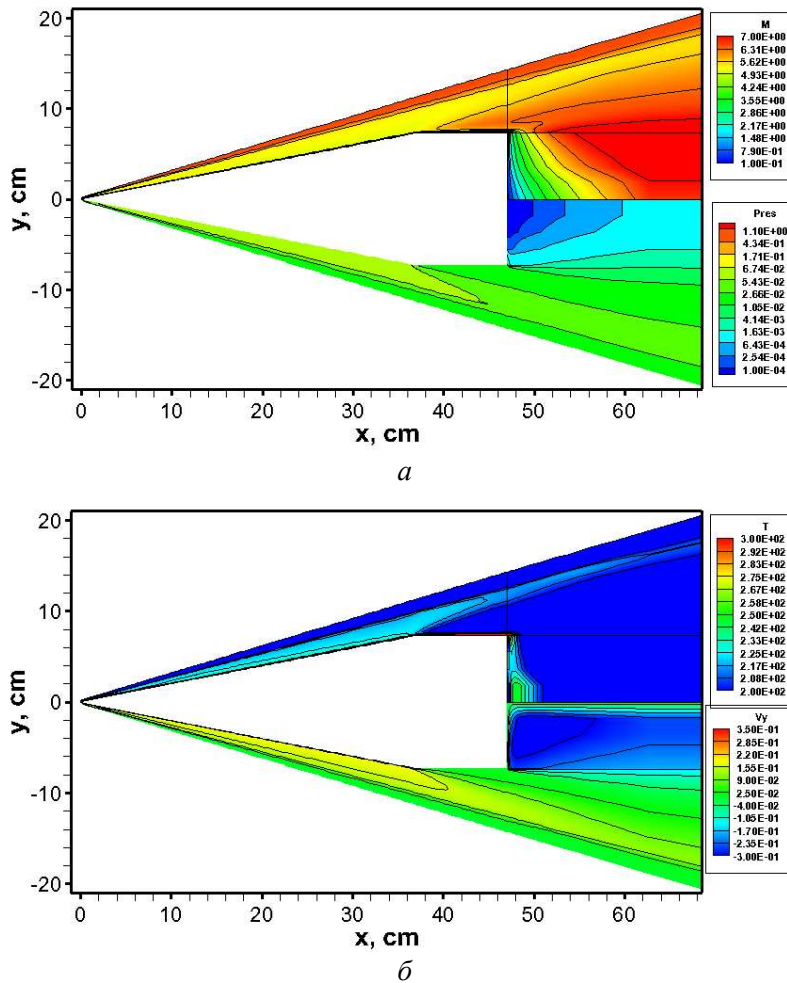


Рис. 56. Поля чисел Маха и давления ( $Pres = p/(\rho_\infty V_\infty^2)$ ) (а), температуры ( $T$ , в К) и продольной скорости ( $V_x = u/V_\infty$ ) (б) в окрестности экспериментальной модели

На рис. 57 видна область локализованного пограничного слоя, полученная по модели BLM и PMM при задании  $Re_T \sim 5.5 \times 10^5$ . В работе [46] утверждается, что при численной интерпретации экспериментальных данных использовалась SST  $k - \epsilon$  модель турбулентности в коммерческом коде Ansys Fluent. Однако, данные рис. 57 показывают, что приведенные экспериментальные данные по измеренным плотностям конвективных тепловых потоков отвечают ламинарному характеру течения.

На рис. 58–61 дано сравнение рассчитанных плотностей конвективных тепловых потоков для режимов ламинарного и гипотетического турбулентного течения при использовании моделей BLM и PMM. Распределения тепловых потоков показаны вдоль продольной координаты. Хорошо видно, что если бы течение было турбулентным, то плотность конвективных тепловых потоков в эксперименте превосходила бы  $10 \text{ Вт/см}^2$  в то время, как экспериментальные данные отвечают величине порядка  $3 \text{ Вт/см}^2$ .

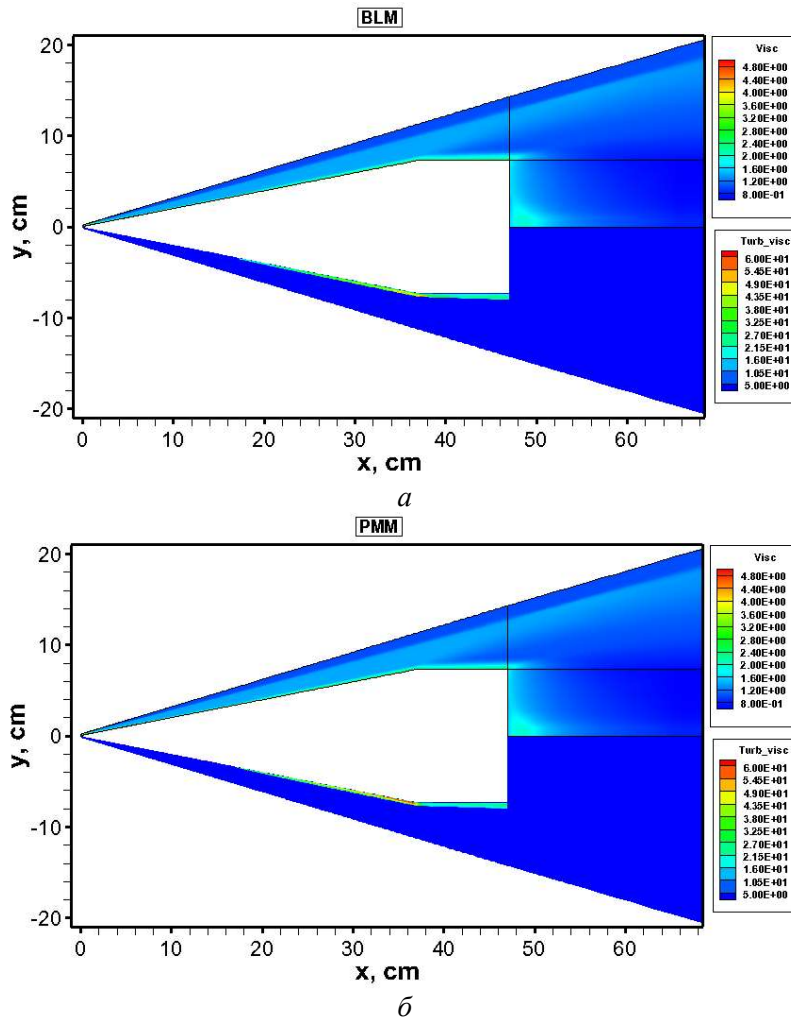


Рис. 57. Поля молекулярной ( $Visc = \mu/\mu_\infty$ ) и турбулентной вязкости ( $Turb\_visc = \mu_T/\mu_\infty$ ) вблизи поверхности экспериментальной модели. Расчет по модели BLM (а) и PMM (б)

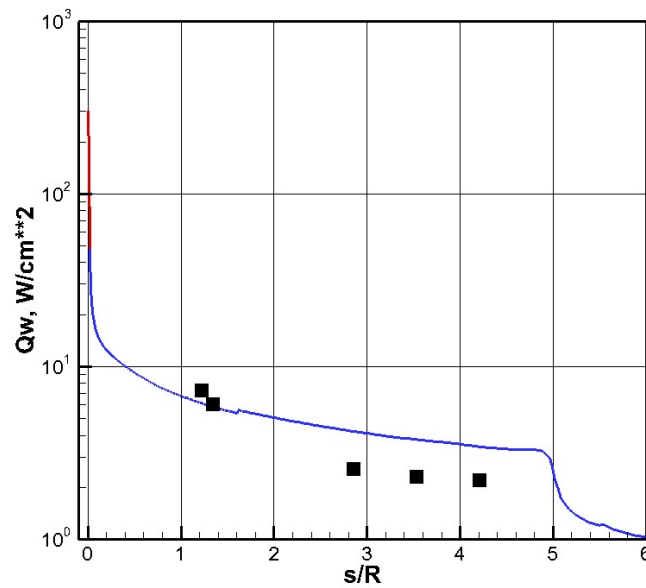


Рис. 58. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности экспериментальной модели. Расчет с использованием модели ламинарного течения. Дискретные точки – эксперимент [46]

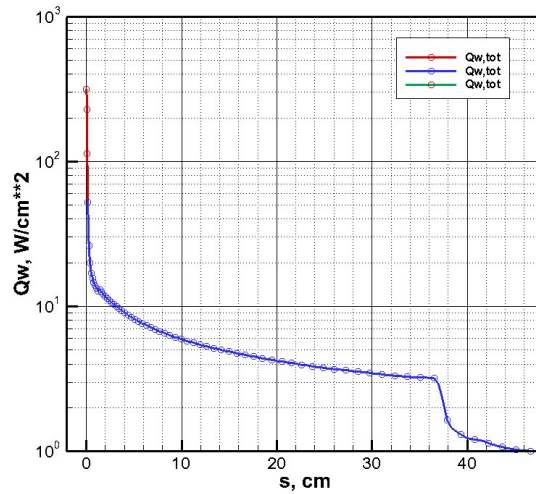


Рис. 59. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности экспериментальной модели. Расчет с использованием модели ламинарного течения

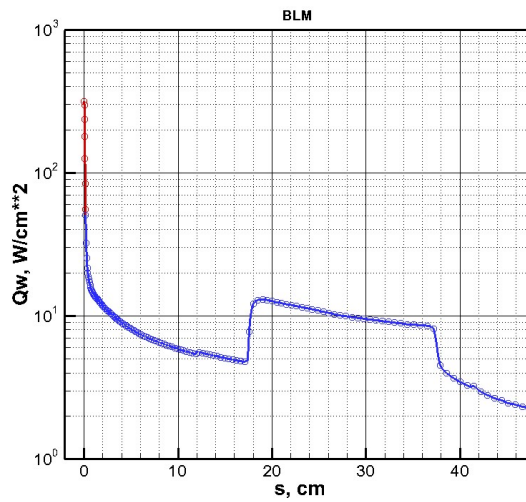


Рис. 60. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности экспериментальной модели. Расчет с использованием модели BLM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 5.5 \times 10^5$

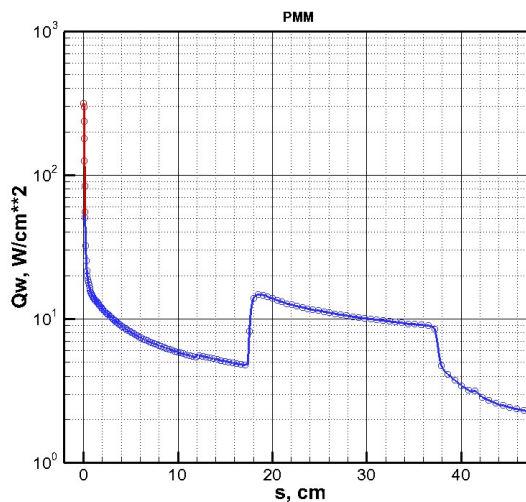


Рис. 61. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности экспериментальной модели. Расчет с использованием модели PMM при задании критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода  $Re_T = 5.5 \times 10^5$

## 6. Заключение

В работе дан обзор 6 валидационных задач по турбулентному нагреву конических поверхностей при сверхзвуковых скоростях обтекания, предназначенных для тестирования авторских компьютерных кодов. Выполнено систематическое численное исследование этих задач.

Использовались две алгебраические модели турбулентного смешения: Прандтля [2] и Болдуина – Ломакса [15]. Показано, что для простейших течений в сжатом слое при сверхзвуковом обтекании (без локальных отрывных зон, каверн и областей возвратных течений) указанные две модели в рамках RANS описания дают хорошее описание экспериментальных данных по турбулентному нагреву.

Использовались несколько расчетных способов ограничения расчетной области турбулентного пограничного слоя. В 1-й расчетной схеме определения области пограничного слоя учет турбулентной вязкости в RANS модели начинался только при достижении сечения  $x_T$ , отвечающего условию

$$\text{Re}_x = \frac{\rho_\infty V_\infty x_T}{\mu_\infty} > \text{Re}_T,$$

где  $\text{Re}_T$  – критическое число Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода, который задается в исходных данных как параметр задачи.

Во второй расчетной схеме задавался диапазон чисел  $\text{Re}_T$ , в котором в расчете задавался плавный ламинарно-турбулентный переход.

Условная верхняя граница пограничного слоя определялась двумя способами. В простейшем случае, традиционно, для каждого сечения вдоль обтекаемой поверхности (по индексу  $j$ ) проверялось условие  $U_{i,j} < \delta_*$ , где  $U_{i,j} = \sqrt{\tilde{u}_{i,j}^2 + \tilde{v}_{i,j}^2}$ ,  $\delta_* = 0.95 \div 0.99$  (эта величина задавалась в исходных данных как параметр расчета),  $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u/V_\infty, v/V_\infty)$ .

Здесь необходимо обратить внимание на то, что в области сжатого слоя у обтекаемой поверхности (между фронтом ударной волны и поверхностью) внешняя граница пограничного слоя всегда определяется условно. Большой разницы в использовании критериев по малости изменения толщины потери импульса, плотности или температуры в общем то нет. Постановка вычислительных экспериментов с разными величинами  $\delta_*$  показывает на слабое влияние этой величины.

Во втором расчетном случае использовалась ключевая идея феноменологической теории Прандтля о пропорциональности турбулентной вязкости длине пути смешения и модулю ротора скорости  $|\Omega|$ . Максимальное значение функции  $|\Omega|$  наблюдаются в области пограничного слоя ближе к поверхности. По мере приближения к внешней границе пограничного слоя величина  $|\Omega|$  снижается. В задачах о классическом пограничном слое эта величина вообще стремится к нулю.

В сжатом слое между поверхностью и фронтом ударной волны такой критерий без дополнительной модификации применять нельзя, поскольку вблизи фронта ударной волны (при решении задачи без выделения фронта ударной волны) функция  $|\Omega|$  резко возрастает. Кроме этого, в сжатом слое эта величина также не мала. Особого рассмотрения требуют случаи разрывов у поверхности энтропийного слоя в режиме сильного вязко-невязкого взаимодействия.

Расчетами показано, что если по мере отхода от поверхности следить за выполнением условия  $|\Omega_{i,j}| > (10^{-3} \div 10^{-6}) |\Omega_{\max,j}|$ , то при первом нарушении этого условия можно считать достигнутой условную границу пограничного слоя (которая используется при расчете турбулентного смешения). Начиная с этой координаты анализ функции  $|\Omega|$  проводить не надо, а для расчета использовать аппроксимацию (1.2).

Итогом выполненного исследования стали успешные результаты тестирования авторских компьютерных кодов.

## Замечание

После завершения работы над статьей автор обратил внимание на публикацию [48], в которой изучается близкая по постановке задача, но с использованием коммерческих расчетных кодов. В упомянутой статье показано, что применение распространенных коммерческих кодов не может гарантировать достаточной точности получаемых результатов и для получения удовлетворительных результатов требуется весьма кропотливая работа над решаемой задачей.

## Литература

1. Землянский Б. А., Лунев В. В., Власов В. И. и др. Конвективный теплообмен летательных аппаратов. М.: Физматлит. 2014. 330 с.
2. Tannehill J.C., Anderson D.A., Pletcher R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat transfer. 1997. Taylor&Francis. 792 p.
3. Visbal M., Knight D. The Baldwin–Lomax Turbulence Model for Two-Dimensional Shock-Wave/Boundary-Layer Interaction // AIAA J. 1984, vol. 22, no. 7, pp. 921–928.
4. Shirazi S. A., Truman C. R. Comparison of Algebraic Turbulence Model for PNS Predictions of Supersonic Flow Past a Sphere-Cone. AIAA 87-0544. 1987.
5. Wilcox D. C. Turbulence modeling for CFD. DCW Industries, Inc. 2006. 515 p.
6. Dilley A. D. Evaluation of CFD Turbulent Prediction Techniques and Comparison with Hypersonic Experimental Data. NASA/CR–2001–210837. 2001. 26 p
7. Roy C. J., Blottner F. G. Assessment of One- and Two- Equation Turbulence Models for Hypersonic Transition Flows // JSR, 2001, vol. 38, no. 5, pp. 699–710.
8. Горский В. В., Пугач М. А. Ламинарно-турбулентный теплообмен на поверхности полусферы, обтекаемой сверхзвуковым потоком воздуха// Ученые записки ЦАГИ, 2014, т. 46, № 6, с. 36–42.
9. Горский В.В., Локтионова А.Г. Модифицированная алгебраическая модель турбулентной вязкости Себечи–Смита для всей поверхности затупленного конуса// Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Машиностроение». 2020. №4. С. 28–41.
10. Забарко Д.А., Котенев В.П., Шлякова И.А. Расчет вязкого ударного слоя около поверхности затупленных тел с использованием алгебраической модели турбулентности// Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Сер. «Естественные науки». 2011. №1. С.87–105.
11. Суржиков С. Т. Результаты использования алгебраических моделей турбулентности в рамках RANS модели нагрева поверхности острой пластины в сверхзвуковом потоке//Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2023. Т.24, вып. 3. <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-3/articles/1056/>
12. Edquist K.T., Hollis B.R., Johnston C.O., Bose D., White T.R., Mahzari M. Mars Science Laboratory Heat Shield Aerothermodynamics: Design and Reconstruction// JSR. 2014, vol. 51, no. 4, pp.1106–1124.
13. Суржиков С.Т. Анализ экспериментальных данных по конвективному нагреву модели марсианского спускаемого аппарата с использованием алгебраических моделей турбулентности // Изв. РАН. МЖГ. 2019. №6. С.129–140.
14. Суржиков С.Т. Радиационно-конвективный нагрев поверхности марсианского спускаемого аппарата MSL при учете турбулентного характера обтекания// Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 5.
15. Baldwin B. S., Lomax H. Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows. AIAA Paper 78–0257. 1978.
16. Sebeci T., Bradshaw P. Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer. Springer–Verlag. 2012. 486 p.
17. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений. –Санкт Петербург: Изд-во Политехнического университета. 2012. 88 с.

18. Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // ДАН СССР. 1942. Т. 6.
19. Лунев В.В. О модификации осредненных уравнений Навье – Стокса// Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 2. С. 134–144.
20. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows//AIAA Paper 1992-0439. 1992.
21. Jones W.P., Launder B.E. The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence// ИЖМТ. 1972, vol. 15, pp. 301–304.
22. Chien J.Y. Predictions of Channel Boundary-Layers Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model// AIAA J. 1982, vol. 20, pp .33–38.
23. Coakley T.J. Turbulence Modeling Methods for the Compressible Navier-Stokes Equationbs// AIAA 83-1693. 1983. 13 p.
24. Menter F. R. Eddy Viscosity Transport Equations and Their Relation to the  $k-\varepsilon$  Model. J. Fluid Engin., 1997, vol. 119, no. 4, pp. 876–884.
25. Menter F. R. Zonal two-equation  $k-\omega$  turbulence models for aerodynamic flows// AIAA Paper 1993-2906.
26. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений: Учебное пособие Балт. гос. техн. ун-т. СПб., 2001. 108 с.
27. James C. S. Observations of Turbulent-burst Geometry and Growth in Supersonic Flow. NASA TN-4235.1958. 85 p.
28. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир. 1986. 180 с.
29. Голубев А.Г., Калугин В.Т. Луценко А.Ю. и др. Аэродинамика: учебное пособие. –М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2010. 687 с.
30. Cebeci T., Kaups K., Ramsey J., Moser A. Calculation of three dimensional laminar and turbulent boundary layers// NASA SP-347. 1975. pp. 41–76.
31. Widhopf G. F., Holl R. Transitional and turbulent heat-transfer measurements on a yawed blunt conical nosetip // AIAA J. 1972, vol. 10, no. 10, pp. 1318–1325.
32. Anderson A. D. Surface roughness effect. Boundary layer transition data correlation and analysis // PANT. 1974. Part III, SAMSO TR-74-86.
33. Carver D. B. Heat Transfer, Surface Pressure and Flow Field Surveys on Conic and Biconic Models with Boundary Layer Trips at Mach 8—Phases IV and V.//Calspan/AEDC Div., Rept. AEDCTSR-80-V14, 1980.
34. Kimmel R.L., Adamczak D., and Brisbane DSTO-AVD Team HIFire-1 Preliminary Aerothermodynamic Experiments 2011 AIAA 2011-3413
35. Stanfield S.A., Kimmel R., and Adamczak D. 2012 HIFiRE-1 Data Analysis: Boundary Layer Transition Experiment During Reentry 2012 AIAA 2012-1087
36. Wadhams T., Mundy E., MacLean M., Holden M. Ground Test Studies of the HIFire-1 Transition Experiment. Part 1: Experimental Results // J. of Spacecraft and Rockets. 2008vol.45, no.5, pp 1134–1148.
37. MacLean M., Wadhams T., Holden M., Hohnson H. Ground Test Studies of the HIFire-1 Transition Experiment. Part 2: Computational Analysis // J. of Spacecraft and Rockets. 2008, vol. 45, no. 5, pp. 1149–1164.
38. Суржиков С.Т. Расчетный анализ экспериментальных данных по аэротермодинамике гиперзвукового аппарата HIFiRE-I//ДАН, 2020, Т. 495, С. 68–72.
39. Wright R. L., Zoby E. V. Flight Boundary Layer Transition Measurements on a Slender Cone at Mach 20 // AIAA Paper 77-719, 1977.
40. Howard F.G. Thermal Analysis Methods and Basic Heat Transfer Data for a Turbulent Heating Flight Experiment at Mach 20 (Reentry-F)// NASA TM X-2282. 1971. 139 p.

41. Papp J.L., Dash S.M. Rapid Engineering Approach to Modeling Hypersonic Laminar-to-Turbulent Transition Flows//JSR. 2005, vol. 42, no. 3, pp. 467–475.
42. Thompson R. A., Zoby E. V., Wurster K. E. Aerothermodynamic study of slender conical vehicles. JTHT, 1989, vol. 3, no. 4, pp. 361–367.
43. Wurster K. E., Zoby E.V., Thompson R.A. Flowfield and Vehicle Parameter Influence on Results of Engineering Aerothermal Methods//JSR. 1991, vol. 28, no. 1, pp 16–22.
44. Nagano Y., Hishida M. Improved Form of the  $k - \varepsilon$  Model for Wall Turbulent Shear Flows// Journal of Fluid Engineering. 1987, vol. 109, pp. 156–160.
45. Menter F.L. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulent Models for Engineering Applications. 1994 AIAA J., vol. 32, no. 8, pp. 1598–1605.
46. Сайпракаш М., Сентилкумар С., Кадамсунил Г., Рампратап С.П., Шанмугам В., Балуг Г. Исследование обтекания тонких тел при гиперзвуковых числах Маха// Изв. РАН. МЖГ. 2021, № 2, с. 110–116.
47. Суржигов С. Т. Численное моделирование ударно-волнового взаимодействия с ламинарным пограничным слоем при гиперзвуковом обтекании моделей с изломом образующей//Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2019. Т. 20, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-4/articles/892/>
48. Батыгина В. К. Расчёт нагрева поверхности затупленного конуса в высокоскоростном потоке при помощи коммерческих кодов//Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2022. Т. 23, вып. 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-6/articles/1024/>

## References

1. Zemlyansky B. A., Lunev V. V., Vlasov V. I. et al., *Convective Heat Exchange of Aircraft*, Moscow: Fizmatlit, 2014, 330 p.
2. Tannehill J.C., Anderson D.A., Pletcher R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat transfer*, 1997. Taylor&Francis. 792 p.
3. Visbal M., Knight D. The Baldwin–Lomax Turbulence Model for Two-Dimensional Shock-Wave/ Boundary–Layer Interaction, *AIAA J.*, 1984, vol. 22, no. 7, pp. 921–928.
4. Shirazi S. A., Truman C. R. Comparison of Algebraic Turbulence Model for PNS Predictions of Supersonic Flow Past a Sphere-Cone, *AIAA Paper 87-0544*.
5. Wilcox D. C., *Turbulence modeling for CFD*, DCW Industries, Inc. 2006. 515 p.
6. Dilley A. D., *Evaluation of CFD Turbulent Prediction Techniques and Comparison with Hypersonic Experimental Data*. NASA/CR–2001–210837. 2001. 26 p
7. Roy C. J., Blottner F. G., Assessment of One- and Two- Equation Turbulence Models for Hypersonic Transition Flows, *JSR*, 2001, vol. 38, no. 5, pp. 699–710.
8. Gorsky V. V., Pugach M. A., Laminar-turbulent heat exchange on the surface of a half-sphere streamlined by a supersonic air flow, *Scientific Notes of TsAGI*, 2014, vol. 46, no. 6, pp. 36–42. [in Russian].
9. Gorsky V.V., Loktionova A.G., Modified algebraic model of turbulent viscosity Sebechi-Smith for the whole surface of a blunted cone, *Vestnik of Bauman Moscow State Technical University. Series “Mashinostroenie”*, 2020, no. 4, pp. 28–41. [in Russian].
10. Zabarko D.A., Kotenev V.P., Shlyakova I.A., Calculation of viscous shock layer near the surface of blunted bodies using an algebraic model of turbulence, *Bulletin of Bauman Moscow State Technical University. Series “Natural Sciences”*, 2011, no. 1., pp. 87–105. [in Russian].
11. Surzhikov S.T., Results of the Use of Algebraic Models of Turbulence in the Framework of the RANS Model of Heating the Surface of a Sharp Plate in a Supersonic Flow, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2023, vol. 24, iss. 3. [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-3/articles/1056/>. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.24.3.1056>

12. Edquist K.T., Hollis B.R., Johnston C.O., Bose D., White T.R., Mahzari M., Mars Science Laboratory Heat Shield Aerothermodynamics: Design and Reconstruction, *JSR*, 2014, vol. 51, no. 4, pp. 1106–1124.
13. Surzhikov S.T., Analysis of experimental data on the convective heating of a model Martian entry vehicle using algebraic turbulence models, *Fluid Dynamics*, 2019, vol. 54, pp. 863–874. <https://doi.org/10.1134/S0015462819060119>
14. Surzhikov S.T., Radiative-convective heating of the surface of the Martian lander MSL taking into account the turbulent nature of the flow, *Fluid Dynamics*, 2023, vol. 5.
15. Baldwin B. S., Lomax H., Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows, AIAA Paper 78–257.
16. Cebeci T., Bradshaw P., *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer*, Springer–Verlag, 2012. 486 p.
17. Garbaruk A.V., Strelets M.H., Shur M.L., *Modeling of turbulence in calculations of complex flows*, St. Petersburg: Publishing house of Polytechnic University. 2012. 88 p. [in Russian].
18. Kolmogorov A.N., Equations of turbulent motion of incompressible fluid, *DAN USSR*, 1942, vol. 6. [in Russian].
19. Lunev V.V. On modification of the averaged Navier-Stokes equations, *Izv. RAS, Fluid and Gas Mechanics*, 2019, no. 2, pp. 134–144. [in Russian].
20. Spalart P. R., Allmaras S. R., A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, AIAA Paper 1992-0439. <https://doi.org/10.2514/6.1992-439>
21. Jones W.P., Launder B.E., The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence, *IJHMT*, 1972, vol. 15, pp. 301–304.
22. Chien J.Y., Predictions of Channel Boundary-Layers Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model, *AIAA J.*, 1982, vol. 20, pp. 33–38.
23. Coakley T.J., Turbulence Modeling Methods for the Compressible Navier-Stokes Equations, AIAA Paper 83-1693.
24. Menter F. R., Eddy Viscosity Transport Equations and Their Relation to the  $k - \varepsilon$  Model, *J. Fluid Engin.*, 1997, vol. 119, no. 4, pp. 876–884.
25. Menter F. R., Zonal two-equation  $k-\omega$  turbulence models for aerodynamic flows, AIAA Paper 1993-2906.
26. Belov I.A., Isaev S.A., *Modeling of turbulent flows: Textbook*, Baltic State Technical University. SPb., 2001, 108 p. [in Russian].
27. James C. S., Observations of Turbulent-burst Geometry and Growth in Supersonic Flow, NASA TN-4235.1958. 85 p.
28. Van-Dyke M., *Album of liquid and gas flows*, M.: Mir, 1986. 180 p. [in Russian].
29. Golubev A.G., Kalugin V.T. Lutsenko A.Yu. et al., *Aerodynamics: textbook*, M.: Bauman MSTU Publishing House, 2010, 687 p. [in Russian].
30. Cebeci T., Kaups K., Ramsey J., Moser A., Calculation of three dimensional laminar and turbulent boundary layers, NASA SP-347, 1975, pp. 41–76.
31. Widhopf G. F., Holl R., Transitional and turbulent heat-transfer measurements on a yawed blunt conical nosetip, *AIAA J.*, 1972, vol. 10, no. 10, pp. 1318–1325.
32. Anderson A.D., Surface roughness effect. Boundary layer transition data correlation and analysis, PANT Program. 1974. Part III, SAMSO TR-74-86.
33. Carver D.B. Heat Transfer, Surface Pressure and Flow Field Surveys on Conic and Biconic Models with Boundary Layer Trips at Mach 8 – Phases IV and V, Calspan/AEDC Div., Rept. AEDCTSR-80-V14, 1980.
34. Kimmel R.L., Adamczak D., and DSTO-AVD Brisbane Team, HIFire-1 Preliminary Aerothermodynamic Experiments, AIAA Paper 2011-3413.



35. Stanfield S.A., Kimmel R., and Adamczak D., HIFiRE-1 Data Analysis: Boundary Layer Transition Experiment During Reentry, AIAA Paper 2012-1087.
36. Wadhams T., Mundy E., MacLean M., Holden M., Ground Test Studies of the HIFire-1 Transition Experiment. Part 1: Experimental Results, *J. of Spacecraft and Rockets*, 2008, vol. 45, no. 5, pp. 1134–1148.
37. MacLean M., Wadhams T., Holden M., Hohnson H., Ground Test Studies of the HIFire-1 Transition Experiment. Part 2: Computational Analysis, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2008, vol. 45, no. 5, pp. 1149–1164.
38. Surzhikov S. T., Calculated Analysis of Experimental Data on the Aerothermodynamics of the Hypersonic Aircraft HIFiRE-1, *Doklady Physics*, 2020, vol. 65, iss. 11, pp. 400–404.  
DOI:10.1134/S1028335820110087
39. Wright R. L., Zoby E. V., Flight Boundary Layer Transition Measurements on a Slender Cone at Mach 20, AIAA Paper 77-719.
40. Howard F.G., Thermal Analysis Methods and Basic Heat Transfer Data for a Turbulent Heating Flight Experiment at Mach 20 (Reentry-F), NASA TM X-2282. 1971. 139 p.
41. Papp J. L., Dash S. M., Rapid Engineering Approach to Modeling Hypersonic Laminar-to-Turbulent Transition Flows, *JSR*, 2005, vol. 42, no. 3, pp. 467–475.
42. Thompson R. A., Zoby E. V., Wurster K. E., Aerothermodynamic study of slender conical vehicles. *JTHT*, 1989, vol. 3, no. 4, pp. 361–367.
43. Wurster K. E., Zoby E. V., Thompson R. A., Flowfield and Vehicle Parameter Influence on Results of Engineering Aerothermal Methods, *JSR*, 1991, vol. 28, no. 1, pp. 16–22.
44. Nagano Y., Hishida M., Improved Form of the  $k - \varepsilon$  Model for Wall Turbulent Shear Flows, *Journal of Fluid Engineering*, 1987, vol. 109, pp. 156–160.
45. Menter F. L., Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulent Models for Engineering Applications, *AIAA J.*, 1994, vol. 32, no. 8, pp. 1598–1605.
46. Saiprakash M., Senthilkumar C., G. Kadam sunil G., Singh Prakash Rampratap, Shanmugam V., Balu G. Investigation of Slender Bodies at Hypersonic Mach Numbers, *Fluid Dynamics*, 2021, vol. 56, pp. 255–261.
47. Surzhikov S. T., Numerical modeling of shock-wave interaction with a laminar boundary layer during hypersonic flow around models with a kink, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2019, vol. 20, iss. 4. [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-4/articles/892/>  
<http://doi.org/10.33257/PhChGD.20.4.892>
48. Batygina V. K. Calculation of Sphere-Cone Heat Transfer in High-Speed Flow with Commercial Software//Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics. 2022. V.23, iss. 6.  
<http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-6/articles/1024/>

Статья поступила в редакцию 12 сентября 2023 г.