

Results of the Use of Algebraic Models of Turbulence in the Framework of the RANS Model of Heating the Surface of a Sharp Plate in a Supersonic Flow

Sergey T. Surzhikov

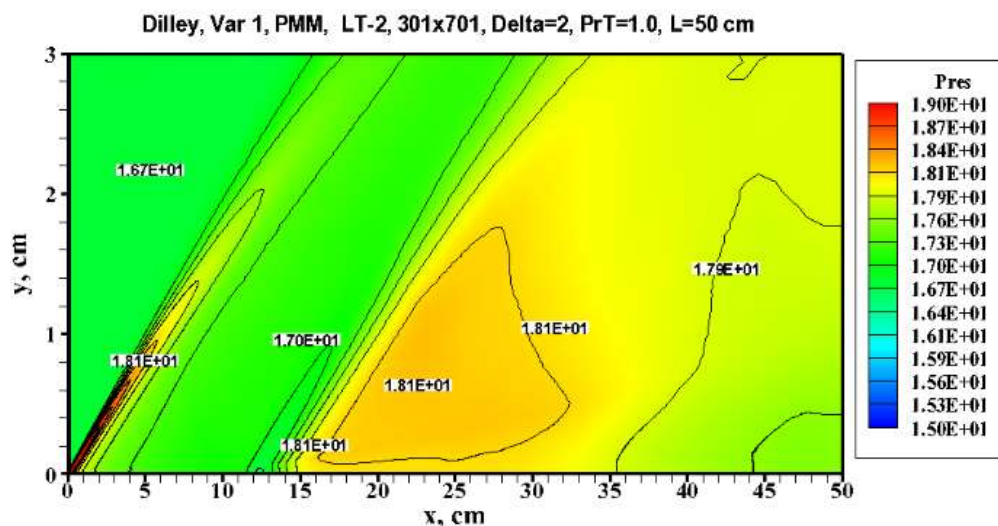
*Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics Russian Academy of Sciences (IPMech RAS),
Moscow, 119526, Russia*

surg@ipmnet.ru

Abstract

A modified two-dimensional model for heating the surface of a sharp plate based on the Reynolds-averaged Navier–Stokes (RANS) equations together with algebraic turbulence models is presented. An exponential decrease in the velocity vortex function as we move away from the conditions of the boundary layer boundary, an effective turbulent Prandtl number, and a section of a gradual transition from laminar to turbulent flow are introduced into the model. The problem of choosing the boundary of a turbulent boundary layer when solving the problem using the RANS model is discussed. The intensity of convective heating of flat surfaces with length $L = 40 \div 200$ cm is compared at $M \sim 6 \div 9$.

Keywords: algebraic models of turbulence, RANS model, supersonic flow past a sharp plate



УДК 533.92:533.6.01

Результаты использования алгебраических моделей турбулентности в рамках RANS модели нагрева поверхности острой пластины в сверхзвуковом потоке

С. Т. Суржиков

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук
Россия, Москва, 119526, проспект Вернадского, д. 101-1*

surg@ipmnet.ru

Аннотация

Представлена модифицированная двухмерная модель нагрева поверхности острой пластины, основанная на усредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье – Стокса (RANS) совместно с алгебраическими моделями турбулентности. В модель введено экспоненциальное уменьшение функции вихря скорости по мере отхода от условий границы пограничного слоя, эффективное турбулентное число Прандтля и участок постепенного перехода от ламинарного к турбулентному течению. Обсуждается проблема выбора границы турбулентного пограничного слоя при решении задачи с использованием RANS-модели. Выполнено сравнение интенсивности конвективного нагрева плоских поверхностей протяженностью $L = 40 \div 200$ см при $M \sim 6 \div 9$.

Ключевые слова: алгебраические модели турбулентности, RANS модель, сверхзвуковое обтекание острой пластины.

1. Введение. Краткий анализ теоретических гипотез, положенных в основу алгебраических моделей турбулентности

На рисунках 1 и 2 представлены фотографии поля течения в окрестности осесимметричных удлиненных тел при их обтекании сверхзвуковым потоком газа, заимствованные из работ [1, 2]. На этих фотографиях четко идентифицируются ударная волна, отходящая от малого закругления обтекаемых тел и турбулентный пограничный слой вблизи обтекаемых поверхностей.

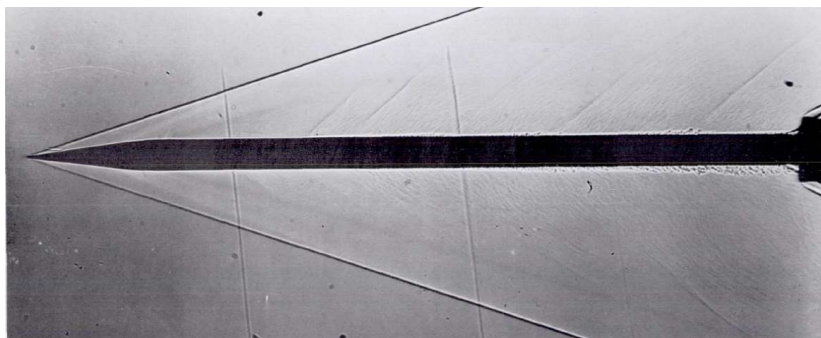


Рис. 1. Турбулентный пограничный слой при сверхзвуковом обтекании модели в аэродинамической трубе [1]

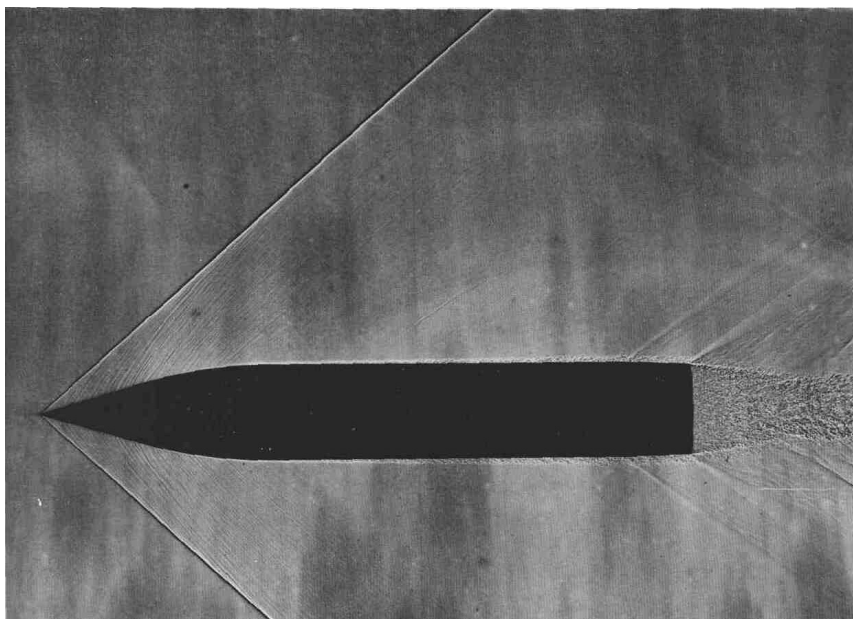


Рис. 2. Структура течения при сверхзвуковом движении осесимметричной модели в баллистическом эксперименте [2]

На фотографиях также видны периодически отходящие от протяженной поверхности слабые ударные волны, элементы сложного течения у замыкающей юбки (рис. 1) и отрывные течения. Представленные экспериментальные данные также показывают исключительно интересные физические явления развития акустических возмущений от элементов шероховатой поверхности и от локализованных неоднородностей в пограничном слое, обсуждение которых, однако, оставим за рамкой данной работы.

Мотивацией численного исследования, выполненного в данной работе, является практическая необходимость создания компьютерного кода расчета сверхзвукового течения у плоской протяженной поверхности в рамках полных уравнений Навье – Стокса и усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса с использованием наиболее подходящих для этого алгебраических моделей турбулентности.

Еще одной веской причиной проведения, на первый взгляд, давно изученных вопросов развития турбулентных пограничных слоев у плоской заостренной пластины явилось то, что применение алгебраических моделей турбулентного смешения совместно с уравнениями Навье – Стокса (модель RANS) показало нестабильность получаемых результатов по конвективным тепловым потокам к поверхности при их сравнении с известными экспериментальными данными.

Обратим внимание на то, что в сжатом слое у обтекаемой поверхности на рис. 1 и 2 хорошо видна локализация турбулентного пограничного слоя у поверхности и отошедшая ударная волна, выше области пограничного слоя, где течение, по всей видимости, не является турбулентным. В ряде работ [3–5] обращалось внимание на эту проблему, существующую, однако, лишь при решении задачи обтекания поверхностей сверхзвуковым потоком сквозным счетом (без специального выделения пограничных слоев и ударных волн). При использовании традиционной расчетной технологии: переход от решения задачи о невязком течении к расчету отдельно пограничного слоя указанные проблемы, как правило, не возникают.

Практический опыт решения задач турбулентного нагрева и трения в сверхзвуковых пограничных слоях даже на поверхностях простейших геометрий (обтекание пластины, затупленного конуса и т.п.) показывает, что хорошо известные и широко распространенные модели турбулентного смешения (как алгебраические, так и дифференциальные) не всегда обеспечивают удовлетворительного согласия с экспериментальными данными. В частности, в двух ра-

ботах по применению алгебраических моделей турбулентности к решению, казалось бы, простейшей задачи сверхзвукового обтекания затупленной пластины при $M \sim 6 \div 8$ для ряда экспериментальных случаев дают плохое совпадение с экспериментальными данными [3, 4].

Практически все алгебраические модели в своей основе имеют модель «пути перемешивания» Прандтля. Главным достоинством этой модели является простая эвристическая гипотеза о распределении скоростей в турбулентном пограничном слое и небольшое число констант (как правило, эмпирических), входящих в расчетные соотношения. В большинстве более сложных дифференциальных моделей турбулентности используется заметно большее число подгоночных постоянных, которые были найдены при анализе конкретных экспериментальных данных. Суть проблемы состоит в том, что необходимость исследования новых режимов течения снижает прогностическую достоверность таких моделей.

Такие константы есть и в модели Прандтля. С целью установить набор и физический смысл этих констант с тем, чтобы выстроить иерархию по возможности их модификации напомним основные положения теории Прандтля.

Последовательный вывод уравнений, выражающих закон сохранения импульса для трех пространственных усредненных по времени компонент скорости и их пульсаций несжимаемого газового потока в прямоугольной декартовой системе координат в турбулентном потоке дает [5]:

$$\begin{aligned} \rho \langle \mathbf{V} \rangle \text{grad} \langle u \rangle &= -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} + \mu \Delta \langle u \rangle - \rho \left(\frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial z} \right), \\ \rho \langle \mathbf{V} \rangle \text{grad} \langle v \rangle &= -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} + \mu \Delta \langle v \rangle - \rho \left(\frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial z} \right), \\ \rho \langle \mathbf{V} \rangle \text{grad} \langle w \rangle &= -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial z} + \mu \Delta \langle w \rangle - \rho \left(\frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ – вектор скорости и его проекции на оси прямоугольной декартовой системы координат; p, ρ – давление и плотность; μ – динамический коэффициент вязкости. Далее символ усреднения оставим только у пульсационных составляющих, а усредненные по времени значения функций будут приводиться без каких-либо дополнительных символов.

Очевидно, что дополнительные слагаемые в уравнениях (1) относительно значений осредненных произведений пульсационных составляющих скорости можно трактовать, как компоненты тензора напряжения *кажущегося турбулентного трения*. Тогда уравнения (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{V} \text{grad} u &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u - \rho \left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} \right), \\ \rho \mathbf{V} \text{grad} v &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v - \rho \left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} \right), \\ \rho \mathbf{V} \text{grad} w &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w - \rho \left(\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где введены обозначения для компонентов тензора вязких напряжений, обусловленных произведением осредненных пульсационных составляющими скоростей

$$\begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{pmatrix} = -\rho \begin{pmatrix} \langle u'^2 \rangle & \langle u'v' \rangle & \langle u'w' \rangle \\ \langle u'v' \rangle & \langle v'^2 \rangle & \langle v'w' \rangle \\ \langle u'w' \rangle & \langle v'w' \rangle & \langle w'^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (3)$$

Отметим два факта. Во-первых, здесь использовалось приближение несжимаемого газа. Обобщение на случай сжимаемого газа дается в [6–9].

Во-вторых, пока не введено понятие турбулентной вязкости и компоненты тензора записываются в виде суммы обычных (ламинарных) вязких напряжений и *кажущихся* турбулентных напряжений, например

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \langle u'^2 \rangle, \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \rho \langle u'v' \rangle \quad (4)$$

Принципиальный шаг в развитии эвристических моделей турбулентности был сделан Буссинеском (здесь и далее, при изложении элементов пионерских гипотез и теорий турбулентного пограничного, будут даваться ссылки на монографию Шлихтинга [5], где приводятся ссылки на оригинальные работы, изданные на разных языках в труднодоступных изданиях), который основываясь на соотношении поверхностного трения (на законе трения Ньютона)

$$\tau_{w,l} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \rho \nu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5)$$

предложил аналогичное соотношение для трения в турбулентном пограничном слое

$$\tau_{w,t} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} = \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (6)$$

где μ_t, ν_t – динамический и кинематический коэффициенты турбулентной вязкости.

Важно подчеркнуть, что в соотношении (6) присутствуют уже усредненные по времени компоненты тензора поверхностного трения, скорость и коэффициент вязкости. Обобщив первоначально выведенные из наглядных физических представлений уравнения для несжимаемого пограничного слоя у плоской поверхности

$$\mathbf{V} \operatorname{grad} u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (8)$$

на трехмерный случай, для несжимаемого газа можно записать окончательный вид усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса с учетом гипотезы Буссинеска

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{V} \nabla u &= -\frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + \mu_t) \Delta u, \\ \rho \mathbf{V} \nabla v &= -\frac{\partial p}{\partial y} + (\mu + \mu_t) \Delta v, \\ \rho \mathbf{V} \nabla w &= -\frac{\partial p}{\partial z} + (\mu + \mu_t) \Delta w \end{aligned} \quad (9)$$

Формулировка системы уравнений (9) явилась несомненным успехом феноменологической теории турбулентности, которая лежит в основе более, чем 100-летнего ее развития.

Следующим принципиальным (и конструктивным) шагом явилась феноменологическая модель Прандтля, которая получила название «пути перемешивания», а также последовавшие за ней теории Тейлора и Кармана [5].

Рассматривая простейшую модель движения газа у плоской поверхности Прандтль получил принципиально важный феноменологический вывод

$$\langle u'v' \rangle \sim l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2,$$

что позволило дать формулировку соотношения для касательной компоненты тензора вязких напряжений в турбулентном пограничном слое

$$\tau_t = \rho L_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (10)$$

где L_m – длина пути перемешивания.

Сравнивая формулу Прандтля с формулой (7), даваемой гипотезой Буссинеска, устанавливаем, что

$$v_t = L_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (11)$$

На первый взгляд появление новой величины L_m не является конструктивным для дальнейшего использования этой модели. Однако, это не так. Для этой величины уже можно дать некоторое физическое толкование [5]: длина пути смещения задает масштаб того расстояния в поперечном направлении течения, которое частица должна пройти в нормальном направлении, чтобы разность старой и новой скоростью стала равной осредненному значению абсолютной величины продольной пульсации турбулентного потока. Интересна своеобразная аналогия длины пути перемешивания длине свободного пробега молекул в разреженном газе, на которую указывает Шлихтинг [5].

Это пока что не дает правила определения величины L_m , а только указывает на то, что эта величина должна зависеть от специфических условий, формируемых в пограничном слое при разных параметрах течения. Но, пожалуй, самое важное это то, что соотношения (7) и (11) позволяют получить некоторый универсальный профиль скорости в турбулентном пограничном слое, на котором и базируются широко распространенные алгебраические модели турбулентного смещения. Если предположить, что этот универсальный закон сохраняется для многих типов течений (что было доказано в многих исследованиях), то проблема выбора эмпирических констант, призванных обеспечить хорошее совпадение с экспериментом, становится уже более реализуемой. Иллюстрация вывода такого соотношения дана Шлихтингом [5].

Примем, что в непосредственной близости от стенки

$$L_m = \kappa y, \quad (12)$$

где κ – подлежащая определению константа; y – расстояние от стенки.

При такой записи на стенке $L_m = 0$, поскольку на стенке пульсационное движение равно нулю (здесь не имеет смысла рассматривать экзотические случаи взаимодействия с поверхностью интенсивных турбулентных вихрей).

Воспользуемся формулой (12) в выражении для касательного напряжения

$$\tau_t = \rho L_m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (13)$$

тогда

$$\tau_t = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (14)$$

Далее Прандтль сделал еще одно (второе) предположение: касательное напряжение вблизи стенки (где можно принять (12)) изменяется незначительно, т.е. $\tau(y) \approx \tau_0 = \tau_t$.

Но из (14) видно, что комплекс

$$\kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (15)$$

имеет размерность скорости, которую Прандтль определил как динамическую скорость вблизи стенки

$$u_{*,0} = \sqrt{\kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} = \sqrt{\frac{\tau_t}{\rho}} = u_\tau, \quad (16)$$

тогда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa y} \quad (17)$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$u = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln y + C \quad (18)$$

Если это соотношение продлить (весьма приближенно) до расстояния от стенки, где можно положить

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

т.е. до внешней границы пограничного слоя, где скорость u максимальна, то

$$u_{\max} = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln h + C \quad (19)$$

или

$$\frac{u_{\max} - u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{h}{y} \quad (20)$$

Заметим, что к аналогичным выводам приводит модель Кармана для плоского канала, где τ_t полагается не постоянной величиной, как у Прандтля, а изменяющейся по линейному закону.

Учитывая логарифмический закон изменения скорости u в (20) становится ясным, что для определения постоянной интегрирования C необходимо выбрать некоторое малое расстояние от стенки, где значение скорости очень мало, но может быть определено. Таким образом вводится понятие ламинарного подслоя на границе которого $\tau_{w,l} \approx \tau_{w,t}$.

Пусть при

$$y = \delta, \quad u = u_0 = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln \delta + C, \quad (21)$$

тогда

$$u - u_0 = \frac{u_\tau}{\kappa} (\ln y - \ln \delta)$$

и
$$\frac{u - u_0}{u_\tau} = \frac{(\ln y - \ln \delta)}{\kappa} \quad (22)$$

Поскольку $\frac{\nu}{u_\tau}$ имеет размерность длины, положим

$$\delta = \beta \frac{\nu}{u_\tau}, \quad (23)$$

где β – вторая константа, подлежащая определению.

Учтем (23) в (22) и получим окончательный вид универсального закона скорости

$$\frac{u - u_0}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \left[\ln \left(y \frac{u_\tau}{\nu} \right) - \ln \beta \right] \quad (24)$$

Многочисленные эксперименты показали, что можно положить $\kappa = 0.4$ (постоянная Кармана) и $\beta \approx 0.1$.

В завершение обсуждения моделей Прандтля и Кармана, положенных в основу построения универсального профиля скорости в турбулентном пограничном слое, сделаем несколько важных замечаний:

- 1) Модель постоянного напряжения трения поперек пограничного слоя, когда толщина ламинарного подслоя является очень малой, должна хорошо работать при очень больших числах Рейнольдса. Шлихтинг [5] отмечает, что при малых числах Рейнольдса опыты показывают степенной закон скорости.
- 2) При исследовании турбулентных потоков в круглых трубах И. Никурадзе нашел достаточно универсальными значения констант $\kappa = 0.4$ и $\beta \approx 0.111$ в универсальном законе распределения скорости [5].
- 3) В работе Райхарда были измерены скорости течения вблизи стенки плоского канала. Это позволило дать оценки интервалов расстояния от стенки с разными характеристиками течения [5]:

$$\begin{aligned} \text{при } y \frac{u_\tau}{\nu} = Y^+ < 5 & \quad \text{– чисто ламинарное течение,} \\ \text{при } 5 < y \frac{u_\tau}{\nu} = Y^+ < 70 & \quad \text{– чисто ламинарно-турбулентное течение,} \\ \text{при } y \frac{u_\tau}{\nu} = Y^+ > 70 & \quad \text{– чисто турбулентное течение.} \end{aligned} \quad (25)$$

- 4) Изложенные выше сведения относятся к несжимаемому течению. Особенности сжимаемых турбулентных пограничных слоев рассматриваются в [6, 9, 10]. Однако исходные допущения Прандтля и Кармана оказываются вполне приемлемыми при корректном решении уравнений пограничного слоя или полных уравнений Навье – Стокса.

Изложенные выше общие принципы построения алгебраических моделей турбулентного смешения легли в основу наиболее широко используемых в прикладной аэротермодинамике моделей Болдуина – Ломакса [11, 12] и модели турбулентного смешения Прандтля [13], а также множества их модификаций [14, 15].

Простейшая модель смешения Прандтля определяется следующими соотношениями [13]

$$\mu_t = \rho L_m^2 |\Omega|, \quad (26)$$

где L_m – длина смешения Прандтля; Ω – функция «вихря» скорости.

В случае простейшего течения вблизи пластины без градиента давления во внешнем потоке приближенно полагают

$$|\Omega| = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (27)$$

Рассматривается двухслойная модель, в соответствии с которой длина пути смешения Прандтля определяется по формуле

$$L_m = \begin{cases} L_m^{in} = \kappa y D = \kappa y \left[1 - \exp\left(-\frac{Y^+}{A^+}\right) \right], & \text{при } \frac{y}{\delta} < 0.2; \\ L_m^{out} = 0.085 \delta, & \text{при } \frac{y}{\delta} > 0.2, \end{cases} \quad (28)$$

где δ – толщина динамического пограничного слоя; $\kappa = 0.43$ – эмпирическая константа; $A^+ = 26$;

$$Y^+ = \frac{y}{\nu_w} u_\tau, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}, \quad \tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w, \quad (29)$$

где ν_w – кинематическая вязкость вблизи поверхности.

Воспользуемся связью между кинематической и динамической вязкостью $\mu = \rho \nu$, тогда

$$Y^+ = \frac{y}{\mu_w} \rho_w u_\tau = \frac{y}{\mu_w} \sqrt{\rho_w \tau_w} = y \sqrt{\frac{\rho_w}{\mu_w} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w} \quad (30)$$

Функция в квадратных скобках в (28) – это демпфирующая функция Ван Дрифта, связывающая область полностью турбулентного потока, где $L_m^{in} = \kappa y$, и область ламинарного подслоя, где $L_m^{in} \rightarrow 0$. Многие исследования показали, что для внутренней области не требуется модификации формулы для L_m^{in} .

Обратим внимание на то, что выбор константы A^+ в (28) отвечает зоне ламинарно-турбулентного течения по Райхарду (25). При этом заметим, что численное решение, получаемое для плотности конвективного теплового потока на стенке весьма чувствительно к заданию этой константы.

В качестве примера приведем альтернативное выражение для расчета L_m^{out} , предложенная в модели Себечи – Смита в формулировке Клаузера [13]

$$\mu_{t,out} = \alpha \rho u_e \left| \delta_k^* \right|,$$

где

$$\delta_k^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy,$$

$$\alpha = 0.0168 \frac{1.55}{1 + \pi}, \quad \pi = 0.55 \left[1 - \exp(-0.243\sqrt{z} - 0.298z) \right],$$

$$z = \frac{\text{Re}_T}{425} - 1$$

Как видно, модель становится более сложной и, как следствие, снижается доверие к ее универсальности.

Вычислительная практика показывает, что многие проблемы удается преодолеть использованием модели Болдуина – Ломакса [11, 12].

Рассматривается двухслойная модель. В каждом слое определяется своя турбулентная вязкость. Во внутреннем (ближе к поверхности слое)

$$\mu_{t,in} = \kappa(\rho y D)^2 |\Omega|, \quad (31)$$

где $\kappa = 0.4$, функция вихря скорости в двумерном случае (проекция вектора $\text{rot}\mathbf{V}$ на ось z)

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Во внешнем слое

$$\mu_{t,out} = K C_{cp} \rho F_{wake} F_{Kleb}(y), \quad (32)$$

где $K = 0.018$, $C_{cp} = 1.6$;

$$F_{Kleb}(y) = \left[1 + 5.5 \left(y \frac{C_{Kleb}}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1},$$

$$F_{wake} = y_{max} F_{max}, \quad F(y) = y |\Omega| D, \quad C_{Kleb} = 0.3, \quad (33)$$

где y_{max} – определяется координатой y , где $F(y)$ достигает своего максимума, а $F_{max} = F(y_{max})$.

Турбулентная вязкость, подставляемая в усредненные по Рейнольдсу уравнения Навье – Стокса, находится следующим образом:

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_{t,in}, & y \leq y_{cross}, \\ \mu_{t,out}, & y > y_{cross}, \end{cases} \quad (34)$$

где y_{cross} – значение координаты y , при которой $\mu_{t,in} = \mu_{t,out}$ первый раз по мере увеличения y .

Как уже отмечалось, использование алгебраических моделей турбулентности совместно с полной моделью Навье – Стокса сталкивается с рядом проблем, которые отсутствуют при решении задачи в классической погранслоевой постановке. Вопрос о выборе толщины пограничного слоя в сверхзвуковом течении с ударными волнами обсуждался в [13, 16, 17].

На основе анализа двух приведенных алгебраических моделей турбулентного смешения и их теоретического базиса (гипотезы Прандтля и Кармана) можно сделать предположение, что введение демпфирующей функции по аналогии с функцией Ван Дрифта для ламинарного подслоя, но на противоположной – верхней границе турбулентного пограничного слоя, позволит выполнить плавный переход от пограничного слоя к внешней области ламинарного течения. Очевидно, что вид такой функции и входящий в нее как минимум один эмпирический коэффициент должны быть исследованы в регулярных численных валидационных экспериментах.

В данной работе были испробованы две демпфирующие функции. Первая формулировалась по аналогии с функцией Ван Дрифта при $Y^+ > B^+$

$$L_m^{out} = C \delta f_{d,out}, \quad f_{d,out} = \exp \left[-\frac{(Y^+ - B^+)}{B^+} \right], \quad (35)$$

где $B^+ = 500$.

Выбор константы B^+ отвечает внешней границе участка универсального логарифмического профиля скорости в турбулентном ядре пограничного слоя [13].

Второй способ подобного введения демпфирующей функции для внешней границы оказался хотя и менее обоснованным теоретически, но зато более наглядным. При $y > \delta$ функция $\Omega = |\text{rot}\mathbf{V}|$ рассчитывается по формуле

$$\Omega(y_{ij}) = \Omega(y_{i_{BL},j}) \exp \left[-\frac{(y_{ij} - y_{i_{BL},j})^2}{y_{BL,j}^2} \right], \quad (36)$$

где i, j – индексы конечно-разностной сетки по нормали и вдоль поверхности соответственно; $y_{i_{BL},j}$ – нормальная координата условной границы пограничного слоя, рассчитываемой по двум альтернативным критериям:

$$\text{а) } \frac{u_{i_{BL},j}}{V_\infty} > 0.95, \quad \text{б) } \Omega_{i_{BL},j} < 10^{-4} \Omega_{i_{BL},j}.$$

Такая демпфирующая функция задает монотонное уменьшение турбулентной вязкости за внешней границей пограничного слоя, тем самым ограничивая поперечные размеры как динамического, так и теплового турбулентного пограничного слоя.

Данная работа является логическим продолжением статьи [4]. Также, как и в [4], здесь рассматривается задача обтекания заостренной пластины сверхзвуковым потоком совершенного газа для условий экспериментов [18-20], сводный анализ которых был выполнен в [3].

Новыми элементами представленными в данной работе результатов являются:

- 1) Введено искусственное уменьшение функции $\Omega = |\text{rot}\mathbf{V}|$ вне условной границы пограничного слоя по формуле (36).
- 2) Выполнено исследование влияния ступенчатого и плавного перехода от модели ламинарного течения к модели турбулентного течения.

В первом случае расчет эффективной турбулентной вязкости начинался при выполнении условия

$$\text{Re}_x = \frac{\rho_\infty V_\infty x}{\mu_\infty} > \text{Re}_{T,кр} \quad (37)$$

Во втором случае задавался плавный переход от модели ламинарного течения к модели турбулентного течения в некотором диапазоне Re_x .

- 3) Введено эффективное число $\text{Pr}_{T,eff}$ для расчета эффективной теплопроводности после расчета турбулентной вязкости (μ_t)

$$\lambda_t = \frac{\mu_t C_p}{\text{Pr}_{T,eff}} \quad (38)$$

по формуле

$$\text{Pr}_{T,eff} = 0.5 + \frac{T_w}{T_0}, \quad (39)$$

где T_w – температура поверхности; T_0 – температура торможения

$$T_0 = T_\infty + \frac{V_\infty^2}{2C_{p\infty}} \quad (40)$$

Для введения эффективного числа $\text{Pr}_{T,eff}$ использовалось следующее обоснование. В соответствии с [3] задавались исходные данные, приведенные в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Исходные данные расчетов, отвечающие экспериментальным данным [18-20]

Расчетный вариант/ ссылка на эксперимент	T_w/T_t	M_∞	T_∞ , К	T_w , К	ρ_∞ , г/см ³	p_∞ , эрг/см ³	V_∞ , см/с
1/[18]	0.2	6	65.04	106.67	1.185×10^{-4}	2.209×10^4	9.696×10^4
2/[18]	0.6	6	65.04	320.0	1.185×10^{-4}	2.209×10^4	9.696×10^4
3/[19]	0.65	6	63.01	336.7	1.160×10^{-4}	2.100×10^4	9.540×10^4
4/[20]	0.11	7.12	240	299	1.120×10^{-4}	7.730×10^4	2.210×10^5
5/[20]	0.19	8.8	93.99	296.3	2.290×10^{-4}	6.170×10^4	1.710×10^5
6/[20]	0.26	7.0	105.0	296.0	4.290×10^{-4}	1.290×10^5	1.440×10^5

Таблица 2

Значения динамического коэффициента вязкости и коэффициента молекулярной теплопроводности, использованные в расчетах

Вариант	μ_∞ , г/(см × с)	λ_∞ , эрг/(см × К × с)	Re_∞ , 1/см
1	0.436×10^{-4}	0.608×10^3	2.64×10^7
2	0.436×10^{-4}	0.608×10^3	2.64×10^7
3	0.421×10^{-4}	0.486×10^3	2.64×10^7
4	0.155×10^{-3}	0.214×10^4	1.60×10^7
5	0.650×10^{-4}	0.789×10^3	6.02×10^7
6	0.728×10^{-4}	0.898×10^3	8.46×10^7

Каждый из расчетных вариантов соответствовал экспериментальным данным [18–20], среди которых выделим варианты № 2 и № 3 с относительно высоким отношением T_w/T_0 . Это означает, что в пограничном слое для таких вариантов снижается эффективность теплообмена за счет турбулентных пульсаций, поскольку наибольшая температура в пограничном слое близка к температуре поверхности. Задание эффективного числа Прандтля $Pr_{T,eff}$ в форме (39) приводит к снижению эффективного коэффициента λ_t (38);

4) Расчеты выполнены в диапазоне протяженностей обтекаемой пластины $L = 40 \div 200$ см.

2. Уравнения RANS модели совершенного газа

Система уравнений, усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS) и уравнений алгебраических моделей турбулентности, подробно сформулированы в [4]. Здесь приведем краткую сводку уравнений и используемых обозначений λ, μ .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (41)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \text{div}(\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + S_{\mu,x}, \quad (42)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \text{div}(\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + S_{\mu,y}, \quad (43)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{V} \text{grad} T = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \text{grad} p + \text{div}(\lambda_{eff} \text{grad} T) + \Phi_\mu, \quad (44)$$

где x, y – декартовы координаты; $\mathbf{V} = (u, v)$ – скорость потока и ее проекции на оси x и y ; ρ, p – плотность и давление; $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$ – эффективный коэффициент вязкости, определяемый по гипотезе Буссинеска; μ, μ_t – динамический коэффициент вязкости и коэффициент турбулентной вязкости; c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении; T – температура; $\lambda_{eff}, \lambda, \lambda_t$ – эффективный коэффициент теплопроводности, коэффициенты молекулярной и турбулентной теплопроводности, который рассчитывался с использованием турбулентного числа Прандтля $\text{Pr}_{T,eff}$; компоненты тензора вязких напряжений:

$$S_{\mu,x} = -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu_{eff} \text{div} \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$S_{\mu,y} = -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu_{eff} \text{div} \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial y} \right);$$

Φ_μ – мощность тепловыделения, обусловленного диссипативными процессами

$$\Phi_\mu = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]$$

Уравнение сохранения энергии здесь записано в неконсервативной форме относительно температуры (в форме уравнения Фурье – Кирхгофа). Система уравнений (41)–(44) используется совместно с термическим уравнением состояния идеального газа

$$p = \rho \frac{R_0}{M_\Sigma} T, \quad (45)$$

где $R_0 = 8.314 \times 10^7$ эрг/(моль \times К) – универсальная газовая постоянная; $M_\Sigma = 29$ г/моль – молекулярный вес газа.

Граничные условия задают невозмущенный набегающий поток

$$\begin{aligned} x = 0: \quad & u = V_\infty, \quad v = 0, \quad T = T_\infty, \quad p = p_\infty, \quad \rho = \rho_\infty; \\ y = H: \quad & u = V_\infty, \quad v = 0, \quad T = T_\infty, \quad p = p_\infty, \quad \rho = \rho_\infty; \end{aligned} \quad (46)$$

и неотражающие граничные условия на выходе из расчетной области

$$x = L: \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (47)$$

На поверхности обтекаемого тела задаются условия прилипания

$$x = 0: \quad u = v = 0 \quad (48)$$

В исходных данных задавалось два критических числа Рейнольдса

$$\text{Re}_{x,\min} = \frac{\rho_\infty V_\infty x_{LT,b}}{\mu_\infty},$$

$$\text{Re}_{x,\max} = \frac{\rho_\infty V_\infty x_{LT,e}}{\mu_\infty},$$

где $x_{LT,b}, x_{LT,e}$ – начальная и конечная продольные координаты области ламинарно-турбулентного перехода.

В области ламинарно-турбулентного перехода задавался плавный переход μ_t от нулевого значения до рассчитанного по моделям турбулентного смешения Прандтля (РММ) и Болдуина – Ломакса (BLM) μ_t

$$\mu_t = F_\mu(x) \mu_T, \quad F_\mu(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta_x), \quad (49)$$

$$\theta_x = \pi \frac{\text{Re}_x - \text{Re}_{x,\min}}{\text{Re}_{x,\max} - \text{Re}_{x,\min}} \quad (50)$$

3. Результаты численного моделирования

Для каждого расчетного варианта дана ссылка на соответствующие экспериментальные данные. Из табл. 1 видно, что исследован диапазон чисел Маха $6 \div 8.8$. Особо обратим внимание на значения температурного фактора T_w/T_0 . В вариантах № 2 и 3 величина температурного фактора превосходит значения в других расчетных случаях в несколько раз. Обратим внимание, что в первом варианте температура поверхности составляет величину порядка 100 К. В остальных вариантах температура поверхности порядка 300 К. В вариантах № 4 и 5 реализуется наибольшая температура торможения $T_0 = 2680$ К и 1556 К.

Прежде, чем обсуждать результаты численного моделирования сделаем замечания общего характера. Численный анализ данных разных экспериментов имеет своей целью отработку компьютерного кода для получения достоверных данных по конвективному нагреву поверхности в области параметров, определяемых условиями экспериментов. Совместно с RANS-уравнениями здесь используются алгебраические модели турбулентного смешения, которые являются простейшими феноменологическими моделями. Сравнение с опытными данными не преследует цели подбора эмпирических констант той или иной модели. Оказывается, что при численном моделировании большое влияние оказывает подробность и топология используемого сеточного пространства. Поэтому, имея в виду необходимость достоверного решения задачи нагрева поверхности в турбулентном потоке, представляет значительный интерес изучение влияния параметров самих моделей.

Прежде, чем проводить сравнение между расчетными данными для разных вариантов рассмотрим основные результаты расчетов на примере варианта № 1.

3.1. Тестовая задача № 1 [18]

Для удобства анализа данных используется двойная нумерация рисунков: первая цифра соответствует номеру варианта, а вторая – порядковый номер рисунка для данного варианта.

На рис. 1.1 показано поле проекции скорости v , где отчетливо видна область возмущения набегающего потока (продольная координата передней кромки $x_0 = 0.01$ см) и область ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП). Заметно влияние способа расчета ламинарно-турбулентного перехода. Турбулентная вязкость μ_t рассчитывается вдоль всей поверхности пластины. Однако, используются две модели расчета турбулентной вязкости μ_t в области ЛТП. В первом случае (модель LT1) включение μ_t в расчет эффективной вязкости μ_{eff} в RANS-уравнениях производится сразу при достижении числа Рейнольдса $\text{Re}_x = \rho_\infty V_\infty x / \mu$ критического значения, при котором происходит ламинарно-турбулентный переход $\text{Re}_{x,LT}$.

Во втором случае (модель LT2) $\mu_t(x, y)$ рассчитывается по формулам

- 1) при $x < x_{LT1} = \frac{\text{Re}_{x,LT1} \mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty}$: $\mu_t = 0$;
- 2) при $x_{LT1} < x < \frac{\text{Re}_{x,LT2} \mu_\infty}{\rho_\infty V_\infty}$: $\mu_t = \mu_T [1 - 0.5(1 + \cos \theta)]$;

3) при $x > x_{LT2}$: $\mu_t = \mu_T$,

где $Re_{x,LT1}$ и $Re_{x,LT2}$ – задаваемые в программе расчета наименьшее и наибольшее числа Рейнольдса области ЛТП; $\theta = \pi \frac{Re_x - Re_{x,LT1}}{Re_{x,LT2} - Re_{x,LT1}}$; μ_T – турбулентная вязкость, рассчитываемая с

использованием алгебраических моделей турбулентного смешения вдоль всей поверхности пластины, начиная от передней кромки.

На рис. 1.2 показаны поля проекции скорости v в окрестности зоны ламинарно-турбулентного перехода, где видно, что в случае «мгновенного» ЛТП в пограничном слое возникает заметно большее возмущение течения, чем при использовании модели LT2. На рис. 1.2 также показано векторное поле скоростей. Отметим хорошо заметные изменения в распределениях продольных скоростей и в пристеночной области пограничного слоя.

Приведенные на рис. 1.1 и 1.2 распределения скоростей, рассчитанные по двум алгебраическим моделям Болдуина – Ломакса (BLM) и модели смешения Прандтля (PMM) показывают качественную и количественную близость.

Не оказало значительного влияния использование различных показателей искусственно задаваемого уменьшения по нормали к поверхности функции Ω выше условной границы пограничного слоя, которая хорошо идентифицируется на распределениях чисел Маха (рис. 1.3) и поля функции Ω (рис. 1.4). На распределениях числах Маха отметим области возмущения скорости, обусловленные передней кромкой и областью ЛТП. На распределениях функции вихря скорости также отчетливо видна зона ЛТП. При этом отметим уже заметные различия в распределениях Ω в области турбулентного течения, предсказываемых моделями BLM и PMM.

На рис. 1.5 показано поле давления для каждого из расчетного случая. Помимо ударной волны, отходящей от передней острой кромки, обратим внимание на сильное возмущение давления в зоне ЛТП, которое, естественно оказывается более слабым для сглаженной зоны ламинарно-турбулентного перехода (левая колонка – модель LT1, правая – LT2). В остальном модели BLM и PMM, а также различные показатели уменьшения функции Ω по нормали к поверхности ($\delta = 2$ и б) показывают близкие результаты.

На рис. 1.6 и 1.7 показаны результаты расчета распределений чисел Стантона и коэффициента поверхностного трения вдоль поверхности обтекаемой пластины. Указанные коэффициенты рассчитывались по формулам

$$St = \frac{q_w}{\rho_\infty V_\infty^3} \approx \frac{q_w}{\rho_\infty V_\infty (H_e - H_w)}, \quad C_f = \frac{\tau_w}{\rho_\infty V_\infty^2},$$

где q_w – плотность конвективного теплового потока; τ_w – напряжение поверхностного трения, которые, в свою очередь, рассчитывались по формулам

$$q_w = \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w, \quad \tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w,$$

$$H_w = C_p T_w, \quad H_\infty = C_p T_\infty, \quad H_e = H_\infty + \frac{1}{2} \sqrt{Pr} V_\infty^2$$

На этих рисунках сплошной и штриховой кривыми показаны теоретические значения коэффициентов Стантона, рассчитанные по приближенным корреляционным формулам [4] для ламинарного и турбулентного обтекания плоской острой пластины. Дискретными точками на рис. 1.5 показаны экспериментальные данные [18]. На рис. 1.6, а, в приведены результаты расчетов с использованием модели LT1, а на рис. 1.6, б, г – LT2.

В целом отметим удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных данных. В модели PMM использовалось несколько завышенное по сравнению с моделью BLM

турбулентное число Прандтля, $Pr_t = 1$ (PMM) и $Pr_t = 0.7$ (BLM). Следствием этого является завышение плотности конвективных тепловых потоков q_w для модели PMM. В работе [4] продемонстрировано аналогичное завышение q_w в модели BLM при увеличении турбулентного числа Прандтля в диапазоне $Pr_t = 0.6 \div 1.0$. Отметим также хорошее описание экспериментальных данных корреляционными соотношениями. Это же можно сказать о хорошем согласии с результатами расчетов по модели RANS (рис. 1.7), хотя здесь также имеется превышение расчетных коэффициентов C_f над корреляционными зависимостями при увеличенном числе Pr_t .

На рис. 1.8–1.13 показаны распределения газодинамических функций по нормали к поверхности в разных сечениях вдоль оси x

$$x_1 = 5 \text{ см}, \quad x_2 = 20 \text{ см}, \quad x_3 = 25 \text{ см},$$

$$x_4 = 30 \text{ см}, \quad x_5 = 35 \text{ см}, \quad x_6 = 40 \text{ см}$$

На рис. 1.8 показаны распределения молекулярной и турбулентной вязкости, полученные при использовании моделей BLM (*a, б*) и PMM (*в, г*).

Отметим некоторые важные факты. Во-первых, вблизи поверхности $\mu_t \ll \mu$. Это означает, что используемые модели BLM и PMM дают правильное описание ламинарного подслоя турбулентного пограничного слоя. Во всех рассчитанных случаях у поверхности $Y^+ \cong 1$. Во-вторых, для исследуемого расчетного случая μ_t значительно превышает μ (штриховые кривые) в диапазоне $y \sim 0.01 \div 1$ см. Но выбранный способ расчета турбулентной вязкости обеспечивает надежное превосходство молекулярной вязкости во внешней области течения. На рис. 1.9 показаны распределения функций Ω для этих же условий. Видно, что над верхней границей пограничного слоя наблюдается экспоненциальное падение этой функции, что отвечает используемой модели «принудительного» экспоненциального уменьшения с целью надежного определения внешней границы турбулентного пограничного слоя. Заметим, что в [4] было показано, что при решении RANS системы уравнений во внешней области возможно наличие осцилляций этих функций, обусловленных, по всей видимости, численными эффектами. Хотя необходимо заметить, что данные на рис. 1.1 и 1.5 показывают, что эти осцилляции могут иметь физическую природу (например, над отходящим возмущением из зоны ЛТП).

На рис. 1.10 и 1.11 показаны распределения скорости u в пограничном слое с использованием линейной и логарифмической шкал. Отметим главный результат: в пограничном слое наблюдаются классические распределения скорости, характерные для ламинарного и турбулентного пограничных слоев. Что касается влияния варьируемых параметров (модели BLM и PMM, LT1 и LT2, $\delta = 2$ и 6), то их влияние на качественные результаты незначительны.

На рис. 1.12 показаны распределения молекулярной и турбулентной теплопроводности. Очевидно, что качественно эти распределения подобны распределениям μ и μ_t (см. рис. 1.8). Однако важно отметить, что $\delta = 6$ вместо $\delta = 2$ дает более быстрое ограничение температурного пограничного слоя. Это представляется важным потому, что при решении RANS уравнений очень часто решение во внешней области турбулентного пограничного слоя еще используется для моделирования других газодинамических эффектов (например, при моделировании взаимодействия с ударной волной). Наличие повышенной теплопроводности во внешней области может привести к неверным результатам.

На рис. 1.13 показаны температурные распределения по толщине ламинарного и турбулентного пограничного слоя. Хорошо видно насколько увеличивается толщина теплового пограничного слоя по мере отхода от лидирующей кромки.

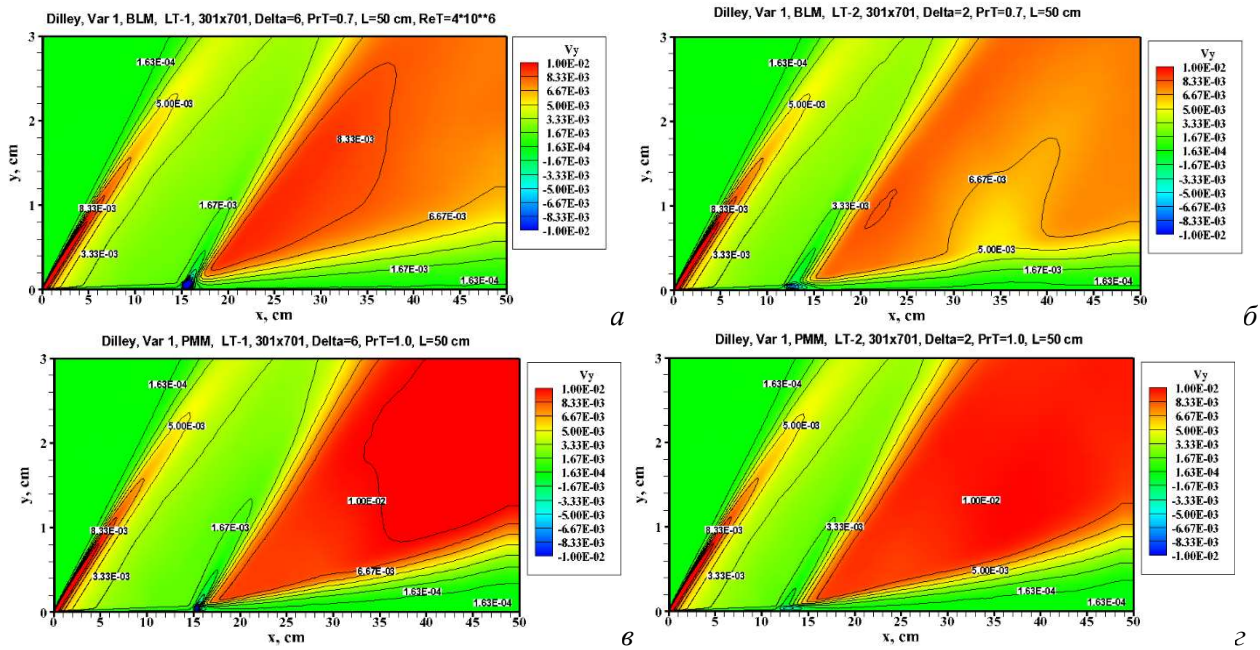


Рис. 1.1. Поле проекции скорости потока $V_y = v/V_\infty$:

- (а) Var№1, BLM, LT-1, $Pr_t = 0.7, \delta = 6$; (б) Var№1, BLM, LT-2, $Pr_t = 0.7, \delta = 2$
 (в) Var№1, PMM, LT-1, $Pr_t = 1.0, \delta = 6$; (г) Var№1, PMM, LT-2, $Pr_t = 1.0, \delta = 2$

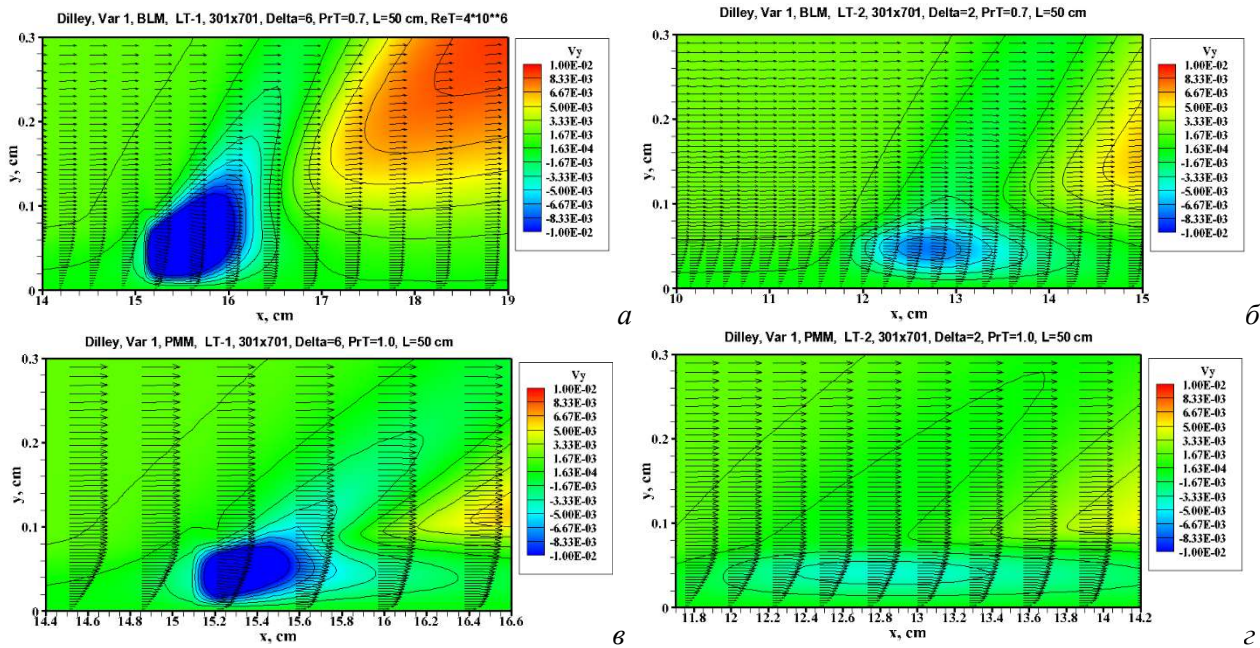


Рис. 1.2. Поле проекции скорости потока $V_y = v/V_\infty$

(вблизи области ламинарно-турбулентного перехода):

- (а) Var№1, BLM, LT-1, $Pr_t = 0.7, \delta = 6$; (б) Var№1, BLM, LT-2, $Pr_t = 0.7, \delta = 2$;
 (в) Var№1, PMM, LT-1, $Pr_t = 1.0, \delta = 6$; (г) Var№1, PMM, LT-2, $Pr_t = 1.0, \delta = 2$

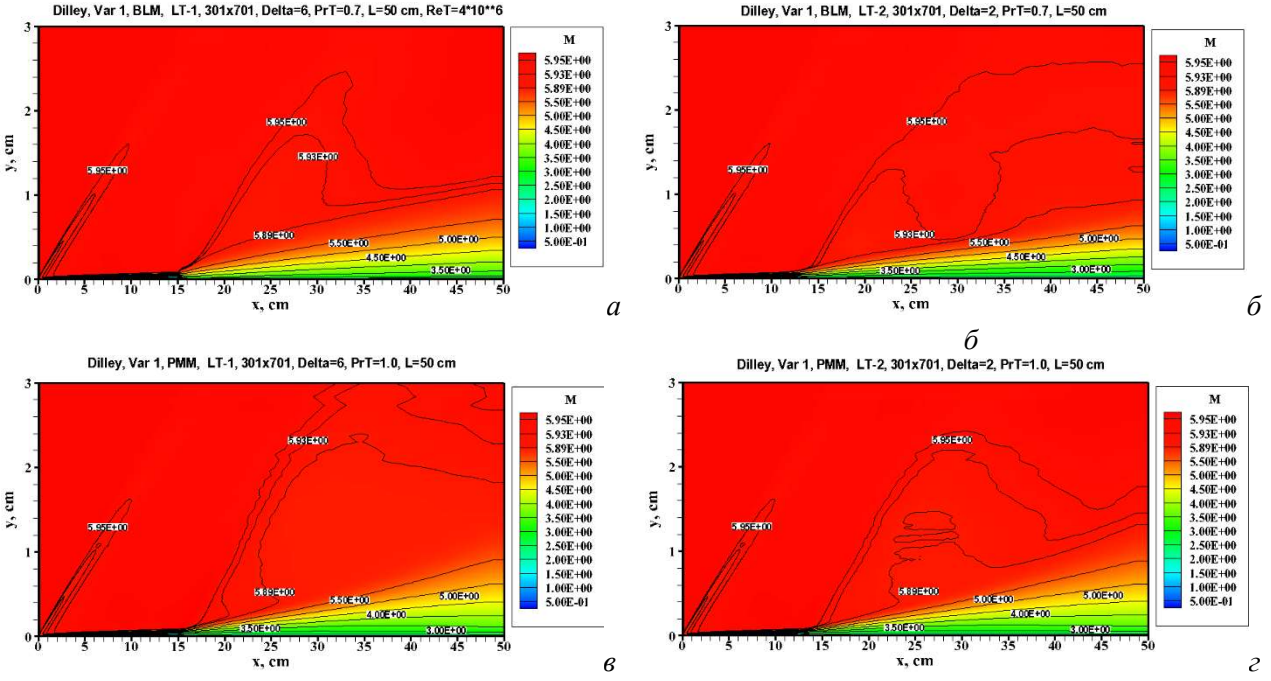


Рис. 1.3. Поле чисел Маха:

- (а) Var№1, BLM, LT-1, $Pr_t = 0.7, \delta = 6$; (б) Var№1, BLM, LT-2, $Pr_t = 0.7, \delta = 2$;
 (в) Var№1, PMM, LT-1, $Pr_t = 1.0, \delta = 6$; (г) Var№1, PMM, LT-2, $Pr_t = 1.0, \delta = 2$

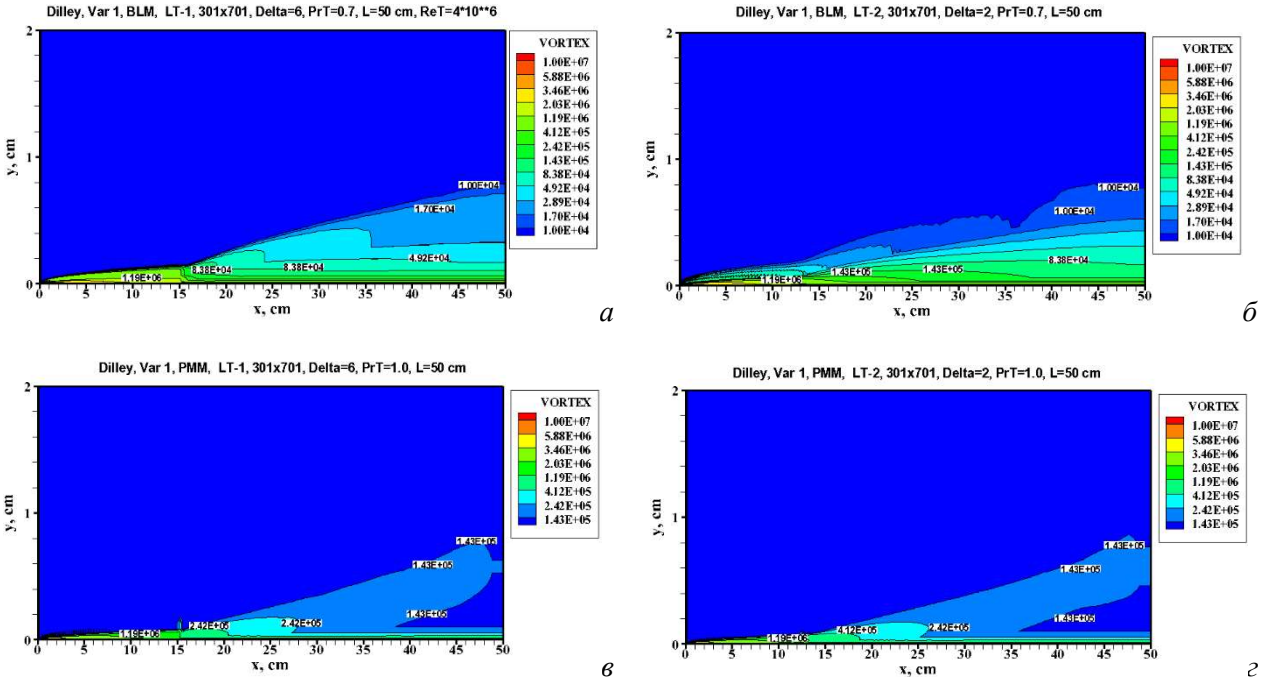


Рис. 1.4. Поле функции $\Omega = |\text{rot} \mathbf{V}|$:

- (а) Var№1, BLM, LT-1, $Pr_t = 0.7, \delta = 6$; (б) Var№1, BLM, LT-2, $Pr_t = 0.7, \delta = 2$;
 (в) Var№1, PMM, LT-1, $Pr_t = 1.0, \delta = 6$; (г) Var№1, PMM, LT-2, $Pr_t = 1.0, \delta = 2$

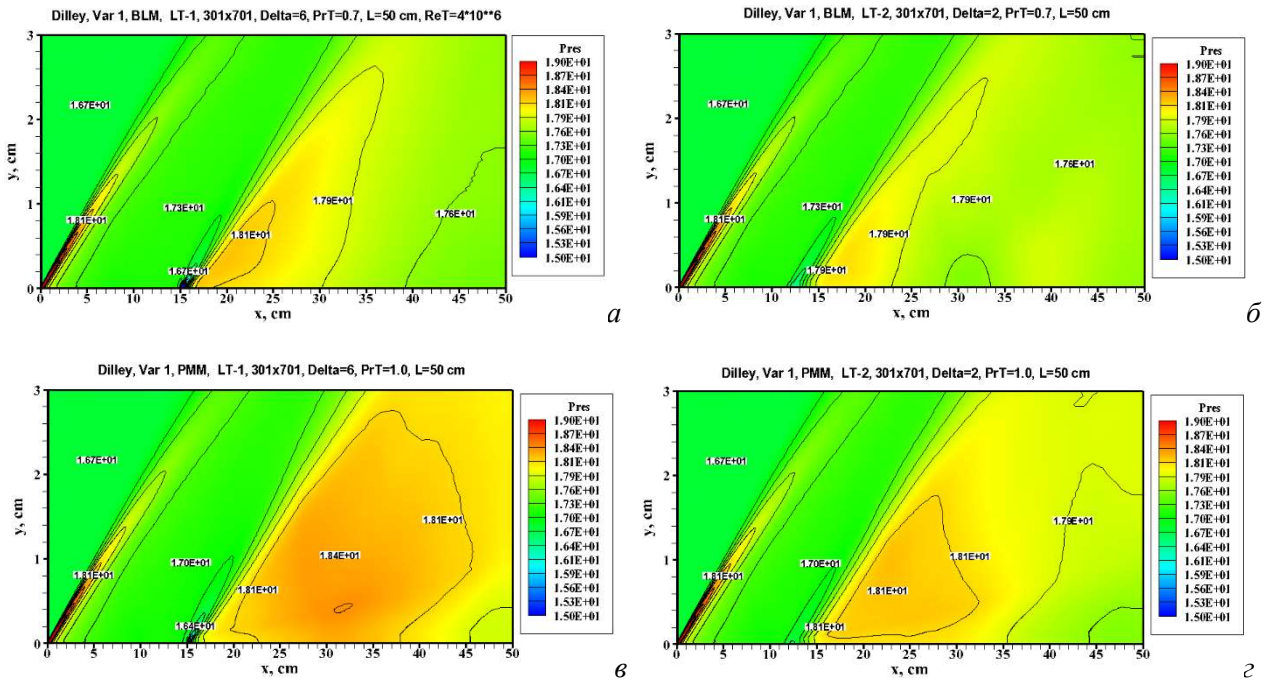


Рис. 1.5. Поле давления Pres (Торр)

(а) Var№1, BLM, LT-1, $Pr_t = 0.7, \delta = 6$; (б) Var№1, BLM, LT-2, $Pr_t = 0.7, \delta = 2$;
 (в) Var№1, PMM, LT-1, $Pr_t = 1.0, \delta = 6$; (г) Var№1, PMM, LT-2, $Pr_t = 1.0, \delta = 2$

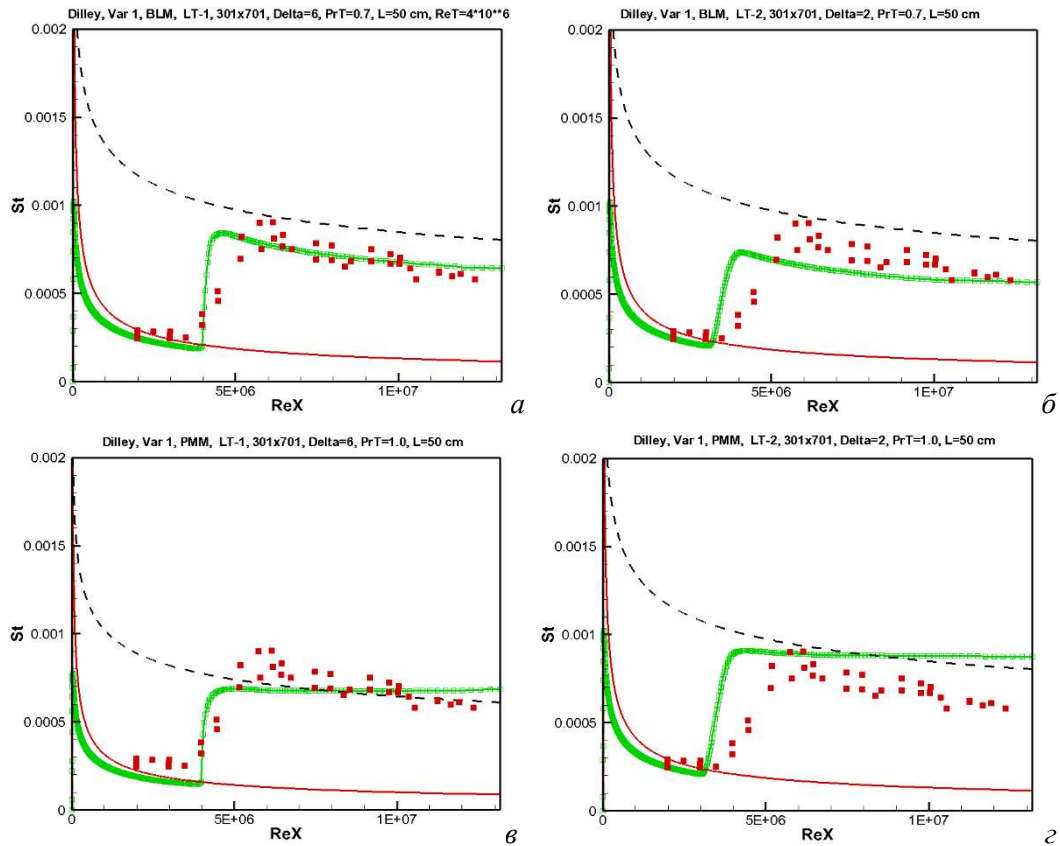


Рис. 1.6. Распределение чисел Стантона вдоль поверхности пластины:

(а) Var№1, BLM, LT-1, $Pr_t = 0.7, \delta = 6$; (б) Var№1, BLM, LT-2, $Pr_t = 0.7, \delta = 2$;
 (в) Var№1, PMM, LT-1, $Pr_t = 1.0, \delta = 6$; (г) Var№1, PMM, LT-2, $Pr_t = 1.0, \delta = 2$

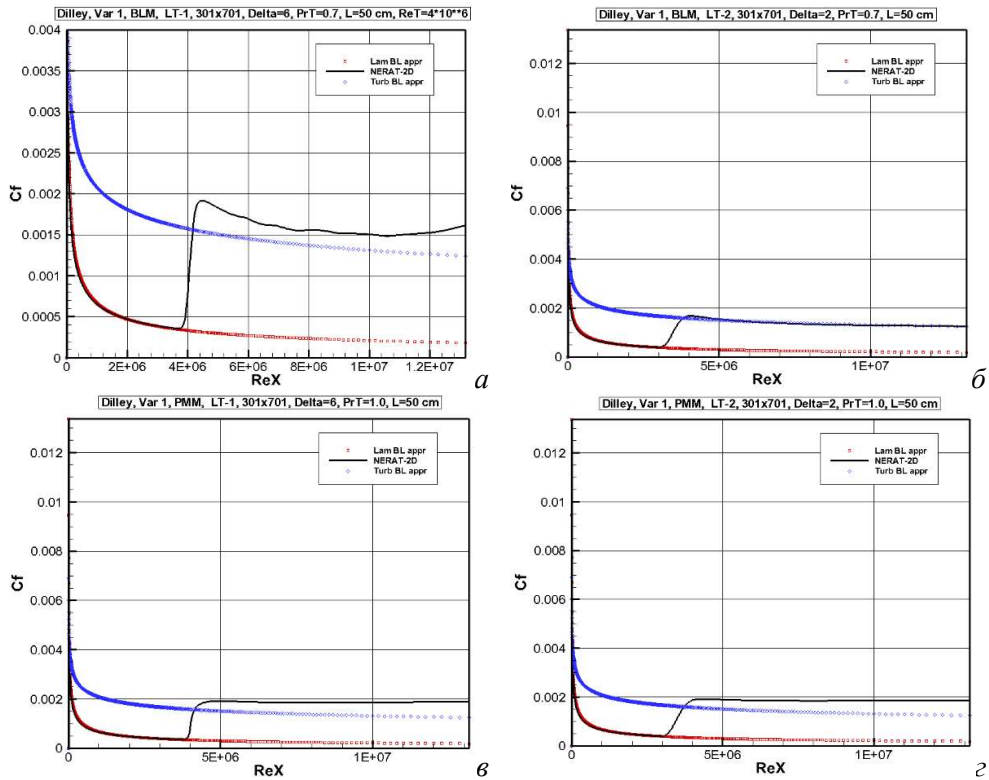


Рис. 1.7. Распределение коэффициента трения (C_f) вдоль поверхности пластины:
 (а) Var№1, BLM, LT-1, $Pr_t = 0.7$, $\delta = 6$; (б) Var№1, BLM, LT-2, $Pr_t = 0.7$, $\delta = 2$;
 (е) Var№1, PMM, LT-1, $Pr_t = 1.0$, $\delta = 6$; (з) Var№1, PMM, LT-2, $Pr_t = 1.0$, $\delta = 2$

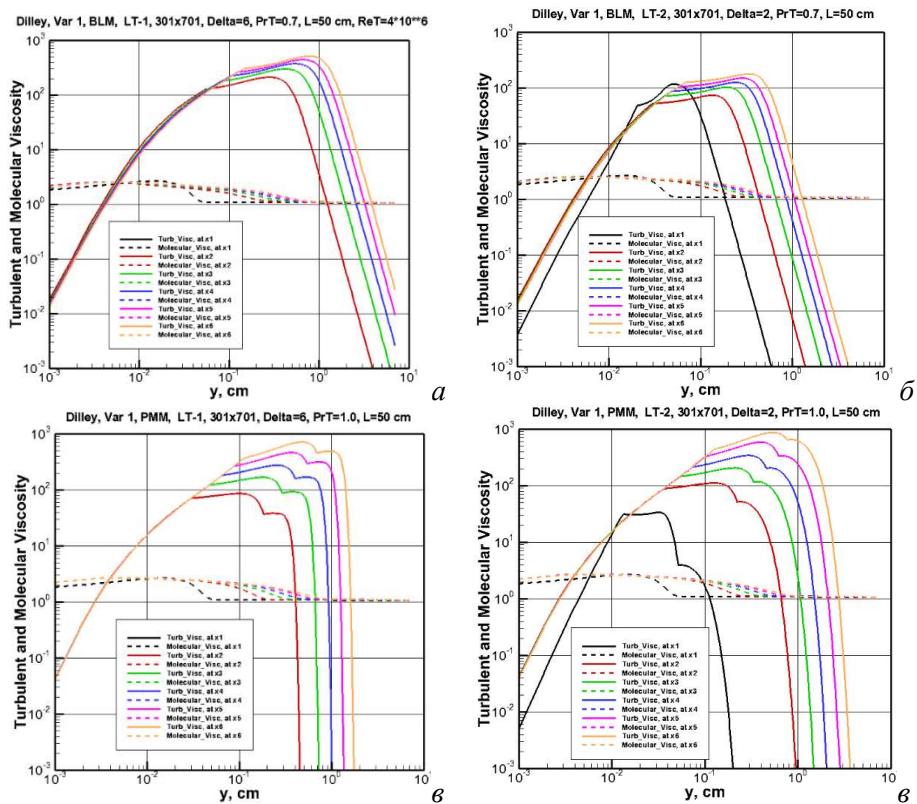


Рис. 1.8. Распределение молекулярной и турбулентной вязкости по нормали к пластине в разных сечениях вдоль оси x :
 (а) Var№1, BLM, LT-1, $Pr_t = 0.7$, $\delta = 6$; (б) Var№1, BLM, LT-2, $Pr_t = 0.7$, $\delta = 2$;
 (е) Var№1, PMM, LT-1, $Pr_t = 1.0$, $\delta = 6$; (з) Var№1, PMM, LT-2, $Pr_t = 1.0$, $\delta = 2$

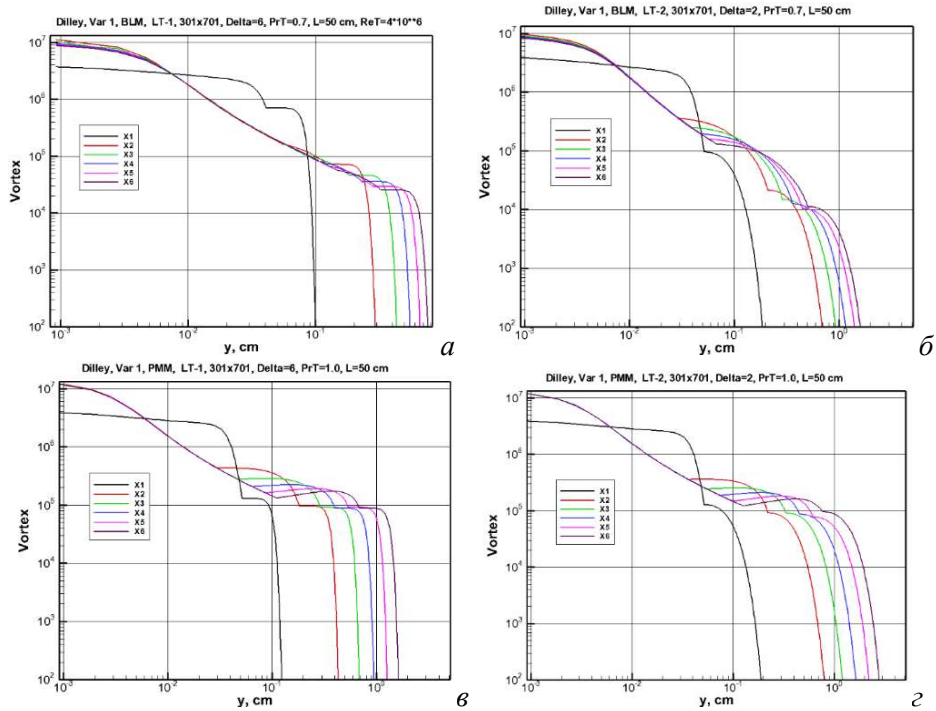


Рис. 1.9. Распределение функции $\Omega = |\text{rot}\mathbf{V}|$ по нормали к пластине в разных сечениях вдоль оси x :

- (а) Var№1, BLM, LT-1, $Pr_t = 0.7$, $\delta = 6$; (б) Var№1, BLM, LT-2, $Pr_t = 0.7$, $\delta = 2$;
 (в) Var№1, PMM, LT-1, $Pr_t = 1.0$, $\delta = 6$; (з) Var№1, PMM, LT-2, $Pr_t = 1.0$, $\delta = 2$

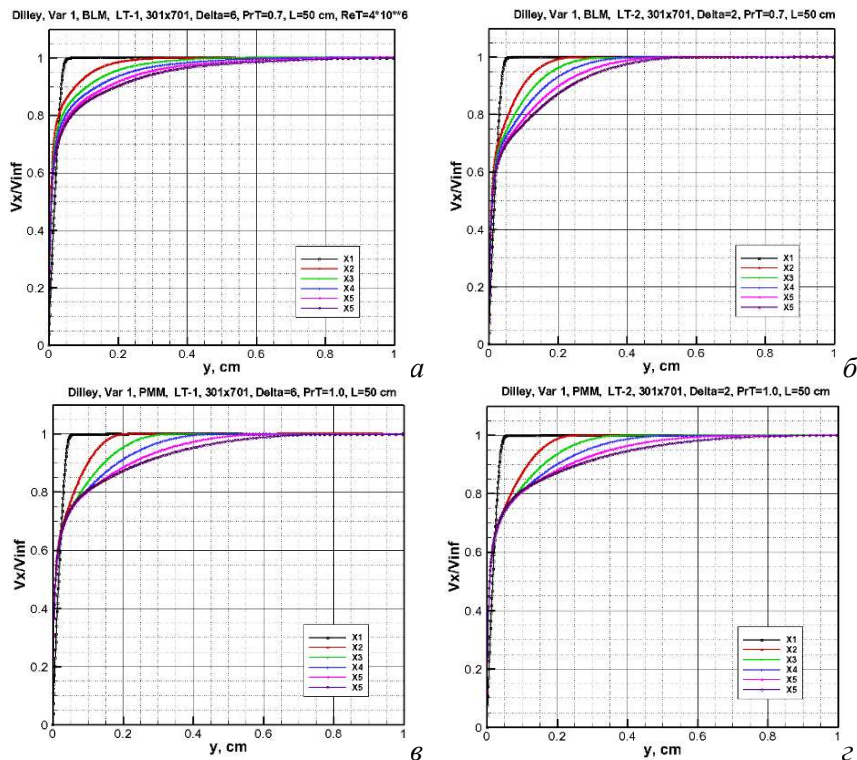


Рис. 1.10. Распределение скорости $V_x = u/V_\infty$ по нормали к пластине в разных сечениях вдоль оси x :

- (а) Var№1, BLM, LT-1, $Pr_t = 0.7$, $\delta = 6$; (б) Var№1, BLM, LT-2, $Pr_t = 0.7$, $\delta = 2$;
 (в) Var№1, PMM, LT-1, $Pr_t = 1.0$, $\delta = 6$; (з) Var№1, PMM, LT-2, $Pr_t = 1.0$, $\delta = 2$

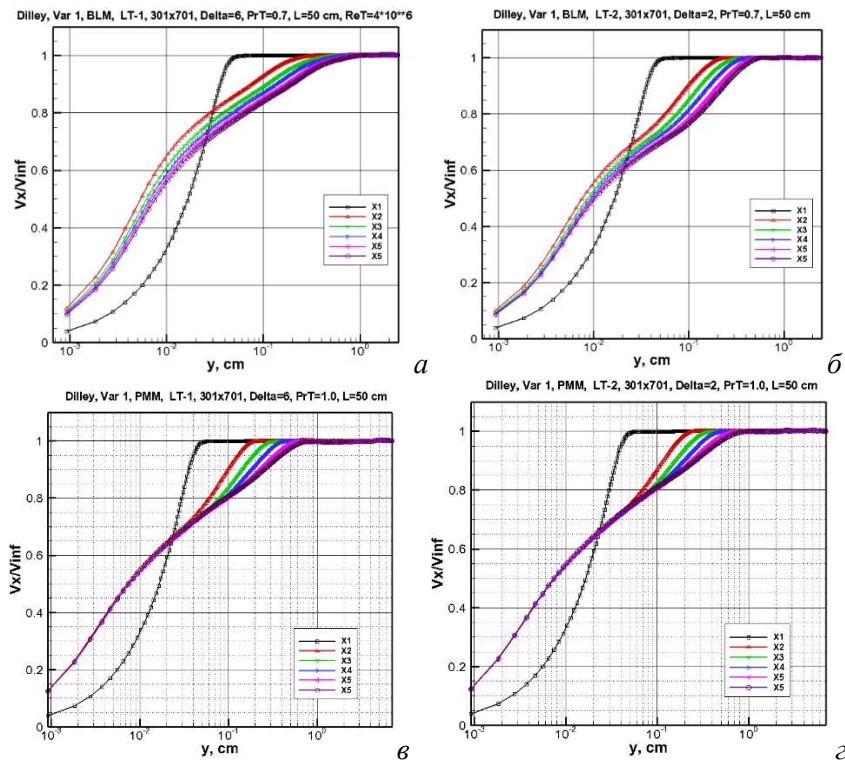


Рис. 1.11. Распределение скорости $V_x = u/V_{\infty}$ по нормали к пластине (вдоль $\lg y$) в разных сечениях вдоль оси x :

- (а) Var№1, BLM, LT-1, $Pr_t = 0.7$, $\delta = 6$; (б) Var№1, BLM, LT-2, $Pr_t = 0.7$, $\delta = 2$;
 (в) Var№1, PMM, LT-1, $Pr_t = 1.0$, $\delta = 6$; (г) Var№1, PMM, LT-2, $Pr_t = 1.0$, $\delta = 2$

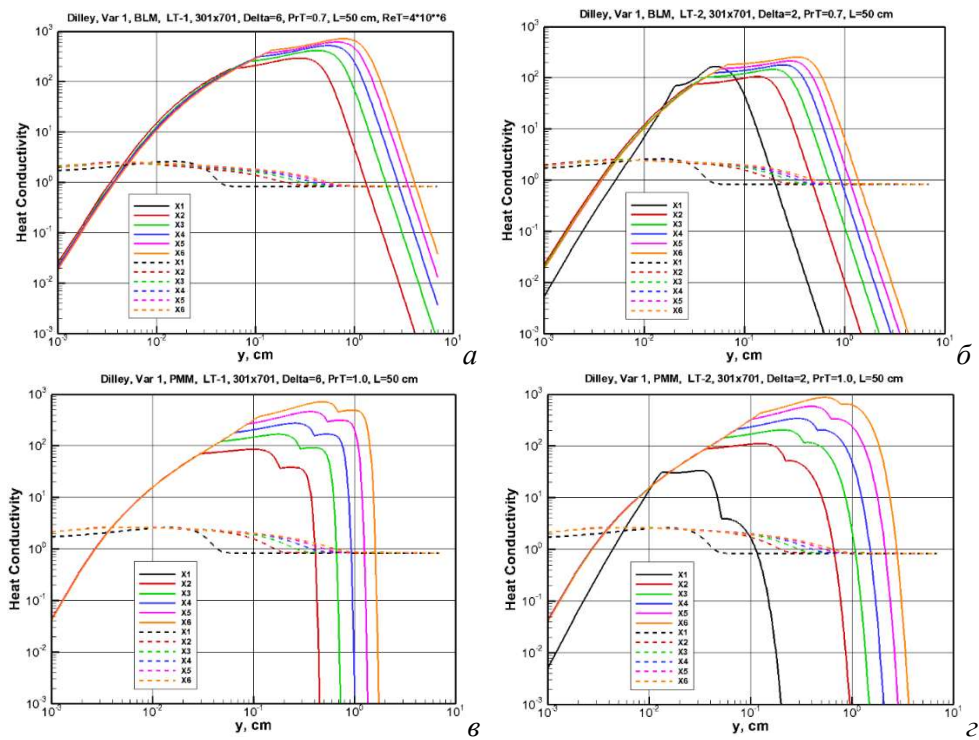


Рис. 1.12. Распределение молекулярной и турбулентной теплопроводности по нормали к пластине в разных сечениях вдоль оси x :

- (а) Var№1, BLM, LT-1, $Pr_t = 0.7$, $\delta = 6$; (б) Var№1, BLM, LT-2, $Pr_t = 0.7$, $\delta = 2$;
 (в) Var№1, PMM, LT-1, $Pr_t = 1.0$, $\delta = 6$; (г) Var№1, PMM, LT-2, $Pr_t = 1.0$, $\delta = 2$

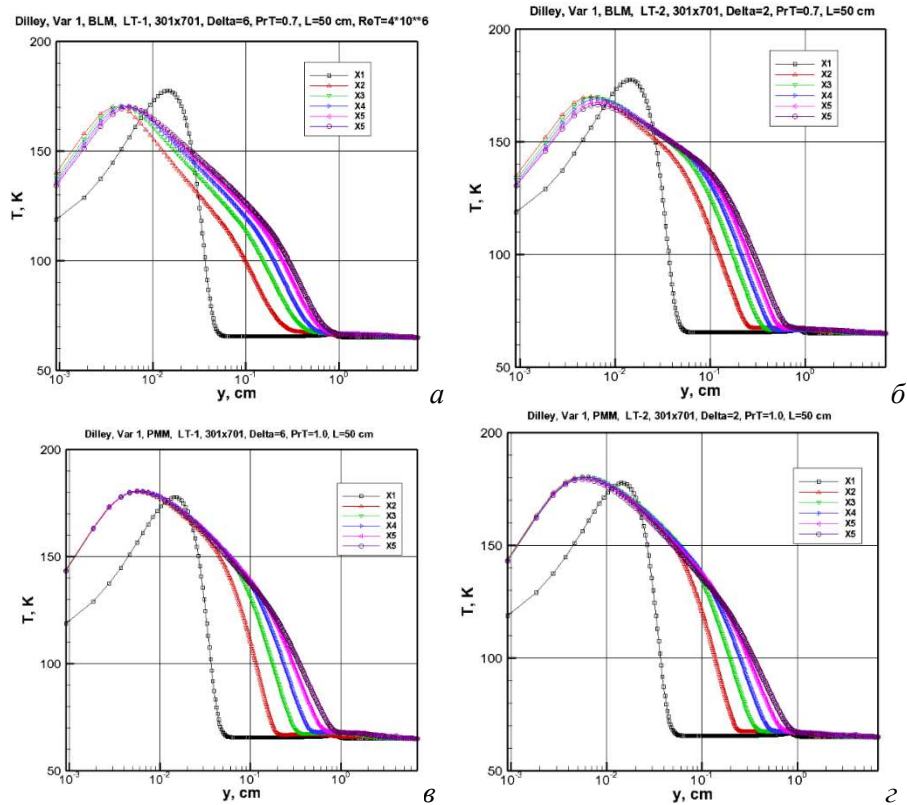


Рис. 1.13. Распределение температуры по нормали к пластине в разных сечениях вдоль оси x :

- (а) Var№1, BLM, LT-1, $Pr_t = 0.7$, $\delta = 6$; (б) Var№1, BLM, LT-2, $Pr_t = 0.7$, $\delta = 2$;
 (в) Var№1, PMM, LT-1, $Pr_t = 1.0$, $\delta = 6$; (г) Var№1, PMM, LT-2, $Pr_t = 1.0$, $\delta = 2$

3.2. Тестовая задача #2 [18]

Исходные данные для данной задачи приведены в табл. 1 и 2. Главное отличие от условий предыдущей задачи состоит в относительно высокой температуре поверхности, так, что $T_w/T_0 = 0.6$. Остальные параметры остались прежними. Это дает возможность изучить влияние температуры поверхности на интенсивность теплообмена обтекаемой пластины с газом. Заметим, что, если условия эксперимента #1 [18] отвечают классическим условиям аэродинамических экспериментов с использованием лабораторных стендов, то условия варианта #2 ближе к условиям натуральных испытаний. При анализе расчетных результатов варианта #2 проводилось сравнение данных, полученных по моделям BLM и PMM при одинаковых условиях расчета. И в том, и в другом случаях применялась модель LT2 – плавного перехода от ламинарного к турбулентному течению, а так же одинаковый показатель $\delta = 2$ сглаживания распределения функции $|\text{rot}\mathbf{V}|$ во внешней области пограничного слоя. Единственным отличием было то, что в модели BLM применялось эффективное число $Pr_{t,eff}$, а в модели PMM – $Pr_t = 1.0$. Учитывая, постоянство температуры поверхности, это означало, что $Pr_{t,eff} = 1.3$.

На рис. 2.1 и 2.2 показаны поля компоненты скорости v , которые наиболее наглядно характеризуют возмущения в поле течения, вносимые кромкой пластины и областью ламинарно-турбулентного перехода. Здесь и далее хорошо видно, что обе используемые модели дают близкие результаты. Поэтому их параллельное использование может служить хорошим примером «перекрестной» верификации разработанных компьютерных кодов. Далее сосредоточим внимание на основных особенностях поля течения.

Как уже отмечалось, в рассматриваемой картине течения следует обратить внимание на две зоны возмущенного течения: у кромки и у границы ламинарно-турбулентного перехода. Векторное поле скоростей (рис. 2.2) показывает, что в области LT-перехода, где в уравнение

движения вводится дополнительная (турбулентная) вязкость, y -компонента скорости V становится отрицательной, т.е. поток прижимается к поверхности. При этом продольная компонента скорости возрастает. Изменение векторного поля скоростей непосредственно вблизи поверхности до и после ЛТ-перехода особенно хорошо видно на рис. 1.2, 1.11 и 2.11. В турбулентной части пограничного слоя высокоскоростной продольный поток прижимается ближе к поверхности.

На рис. 2.3 показано, что сразу после ЛТ-перехода начинается рост толщины турбулентного пограничного слоя, который хорошо идентифицируется на распределениях чисел Маха.

На рис. 2.4 показана локализация функции $\Omega = |\text{rot}\mathbf{V}|$ вблизи поверхности. Если не задавать искусственного падения этой функции от значения на условной внешней границе турбулентного пограничного слоя, то в области над пограничным слоем могут наблюдаться осцилляции Ω , которые являются нефизичными для используемых моделей турбулентного смешения.

На рис. 2.5 показаны поля давления над поверхностью обтекаемой пластины, на которых также хорошо видны возмущенные зоны течения за кромкой и ниже по течению. Особо обращает на себя внимание возмущение давления за ЛТ-переходом. Для области пограничного слоя эти возмущения не являются слабыми.

Анализ распределений чисел Стантона St (рис. 2.6) и коэффициента трения C_f (рис. 2.7) вдоль поверхности пластины демонстрирует хорошее согласие с экспериментальными данными по теплообмену и с корреляционными соотношениями по коэффициенту трения.

Относительно хорошего описания опытных данных по теплообмену необходимо остановиться особо. Как уже отмечалось в анализируемом расчетном варианте задается относительно высокая температура поверхности. На рис. 2.13 показаны распределения температуры по нормали к поверхности в разных сечениях вдоль оси x ($x_1 = 5$ см, $x_2 = 20$ см, $x_3 = 25$ см, $x_4 = 30$ см, $x_5 = 35$ см, $x_6 = 40$ см). Обращает на себя внимание весьма низкий градиент температуры у поверхности и в пограничном слое. Это означает, что в отличие от 1-го варианта, где указанные градиенты велики (см. рис. 1.13), интенсивное перемешивание газа в турбулентном пограничном слое не является эффективным для теплообмена. При этом напомним, что в RANS-уравнениях эффективность турбулентного теплообмена задается феноменологическим коэффициентом теплопроводности

$$\lambda_{t,eff} = \frac{\mu C_p}{Pr_t}$$

Отсюда следует, что при относительно низких числах Pr_t , например $Pr_t \sim 0.7$, коэффициент теплопроводности увеличивается, а при $Pr_t \sim 1.7$ – уменьшается. Хорошее совпадение с экспериментальными данными (см. рис. 2.6) получено при $Pr_t > 1$.

На рис. 2.8, 2.9 и 2.13 представлены распределения коэффициентов ламинарной и турбулентной вязкости, функции $\Omega = |\text{rot}\mathbf{V}|$, а также коэффициентов молекулярной и турбулентной теплопроводности по нормали к поверхности в шести сечениях вдоль поверхности пластины. Обратим внимание на локализацию распределений указанных функций внутри пограничного слоя. Непосредственно вблизи поверхности реализуется ламинарный подслой.

Классические распределения продольной скорости в этих же сечениях показаны на рис. 2.10 и 2.11.

Таким образом, численное исследование применения моделей турбулентного смешения VLM и PMM к расчету сверхзвукового обтекания острой пластины для условий экспериментальных данных показал хорошее описание опытных данных по теплообмену. Показана важная роль температуры обтекаемой поверхности в решаемой задаче на основе RANS уравнений.

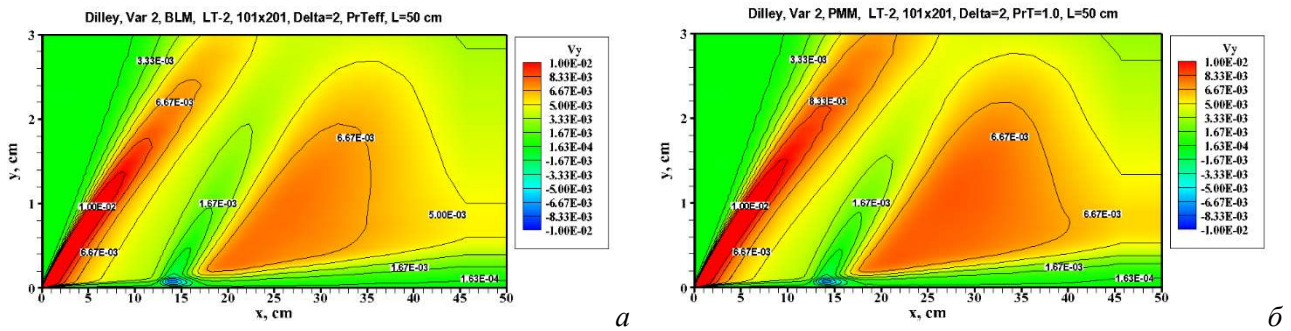


Рис. 2.1. Поле скорости $V_y = v/V_\infty$, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 2

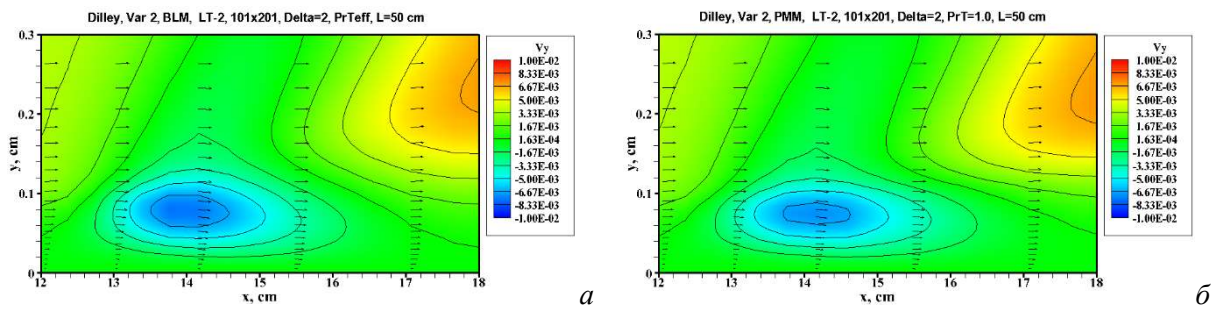


Рис. 2.2. Поле скорости $V_y = v/V_\infty$ вблизи сечения ламинарно-турбулентного перехода, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 2

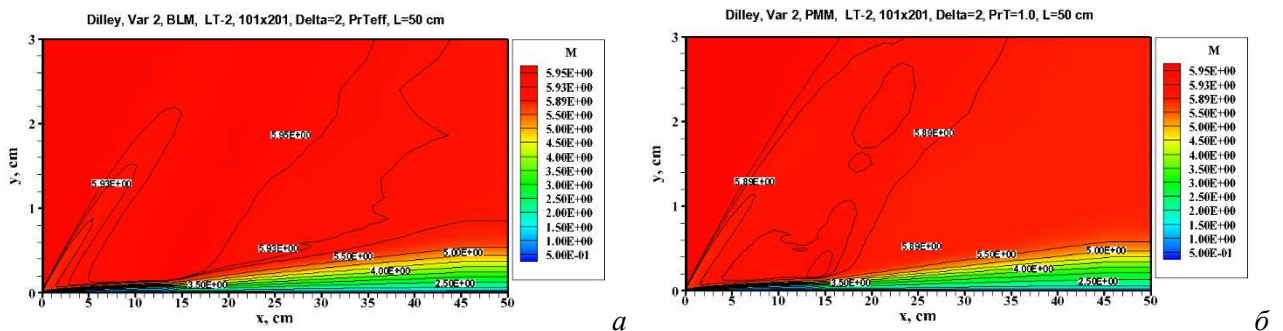


Рис. 2.3. Поле чисел Маха, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 2

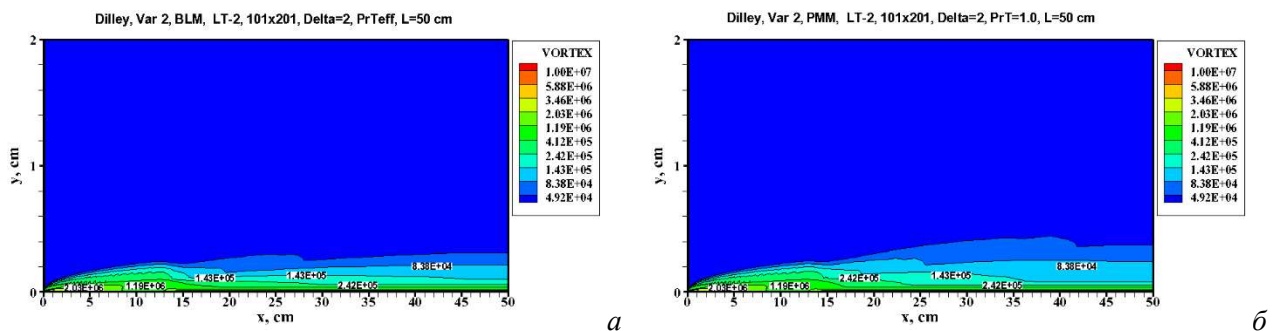


Рис. 2.4. Поле функции $\Omega = |\text{rot V}|$, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 2

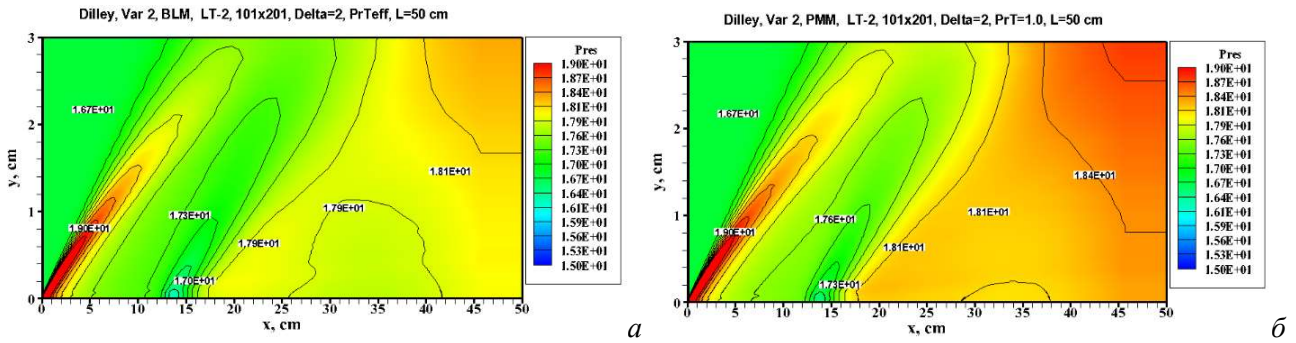


Рис. 2.5. Поле давления $Pres$ (в Торр), рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) РММ для исходных данных варианта № 2

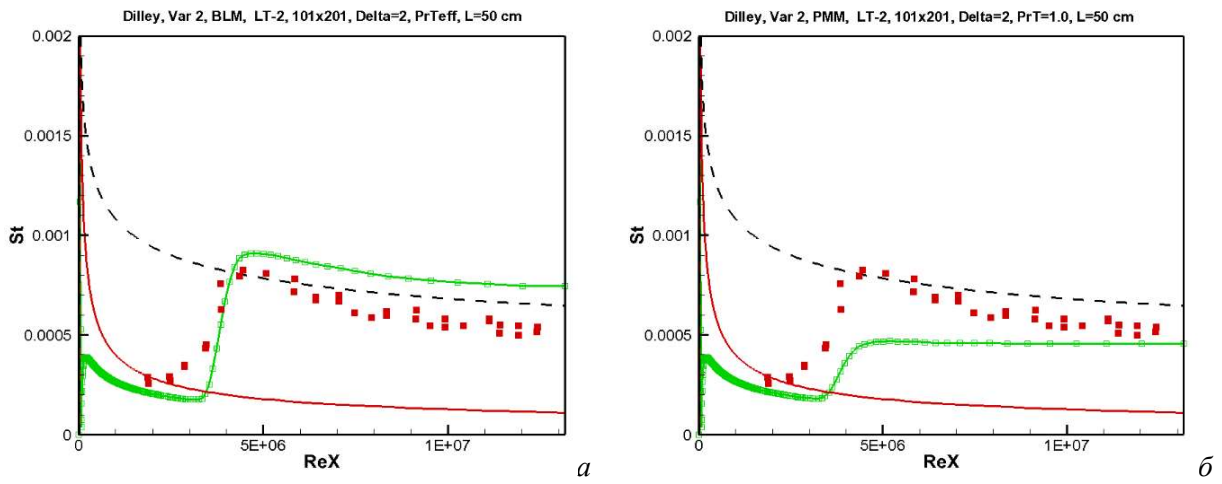


Рис. 2.6. Распределение чисел Стантон (St) вдоль поверхности пластины, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) РММ для исходных данных варианта № 2

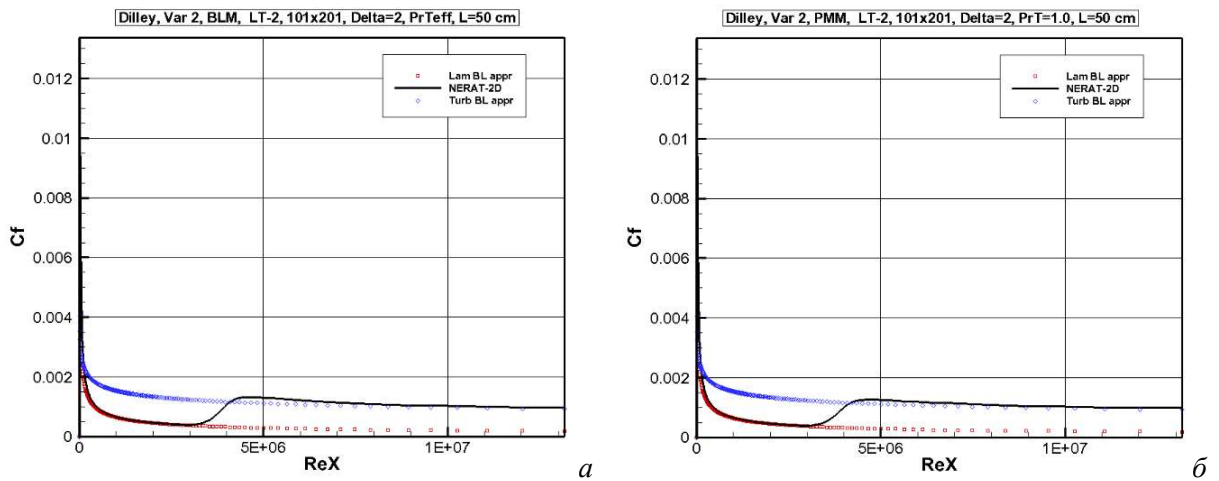


Рис. 2.7. Распределение коэффициента поверхностного трения (C_f), рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) РММ для исходных данных варианта № 2

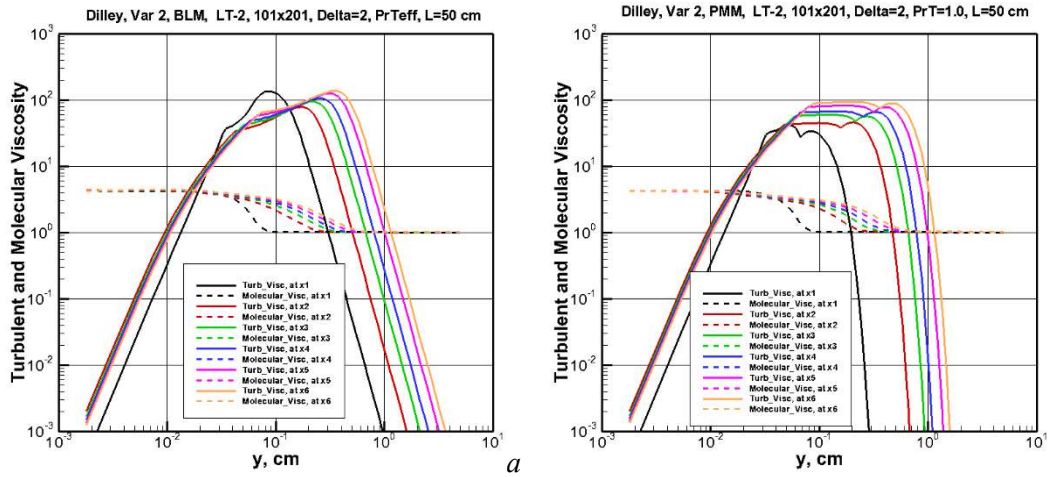


Рис. 2.8. Профили молекулярной (штриховые кривые) и турбулентной (сплошные кривые) вязкости в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 2

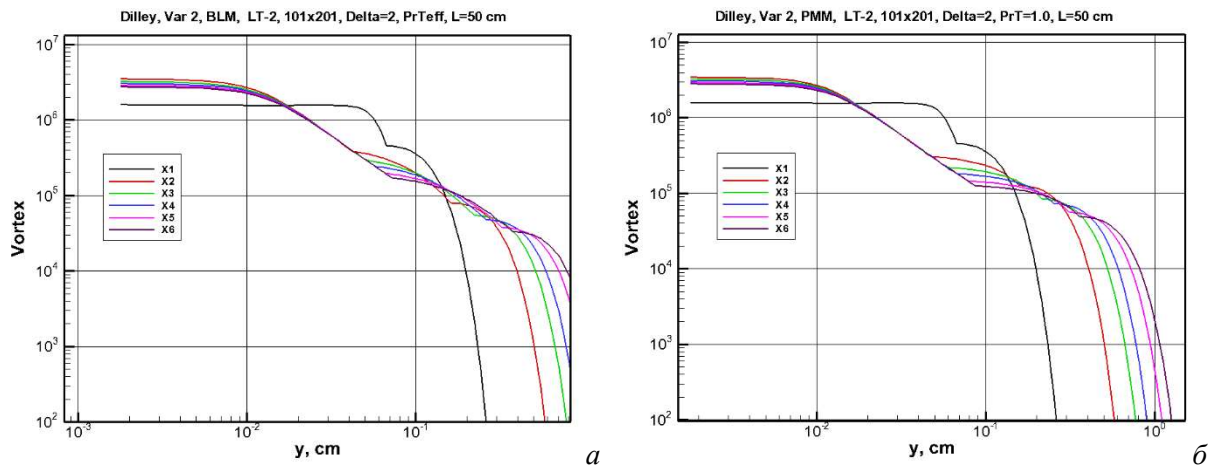


Рис. 2.9. Профили функции $\Omega = |\text{rot}\mathbf{V}|$ в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 2

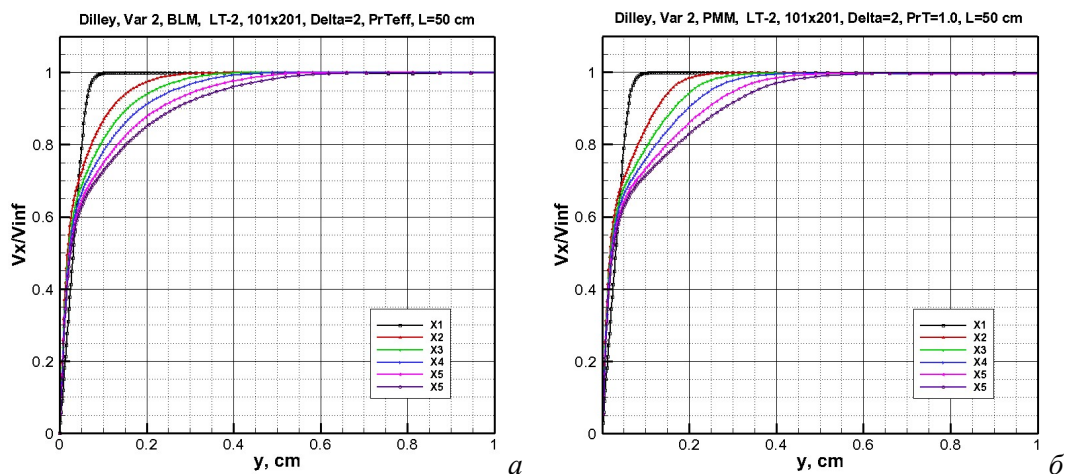


Рис. 2.10. Профили функции $V_x = u/V_\infty$ в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 2

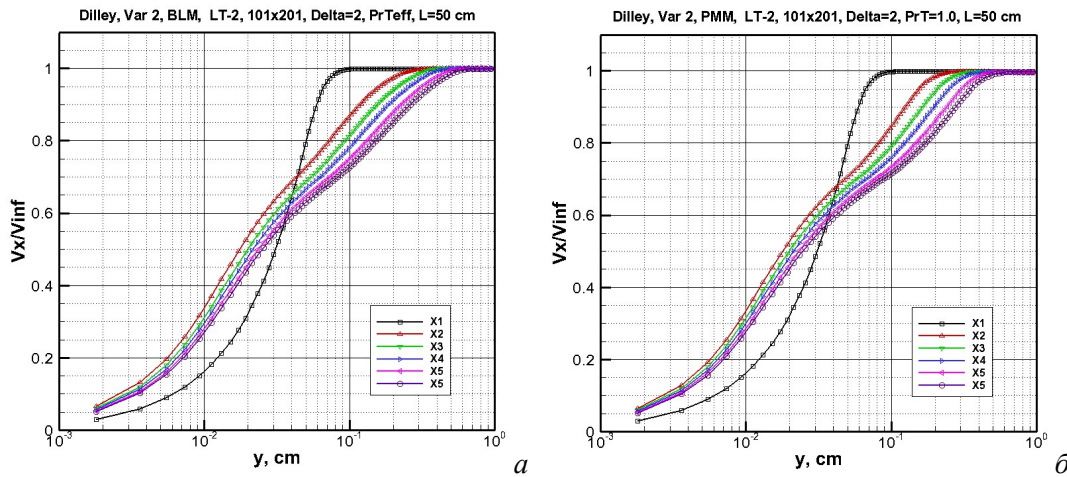


Рис. 2.11. Профили функции скорости в зависимости от $\lg x$ в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) ВЛМ и (б) РММ для исходных данных варианта № 2

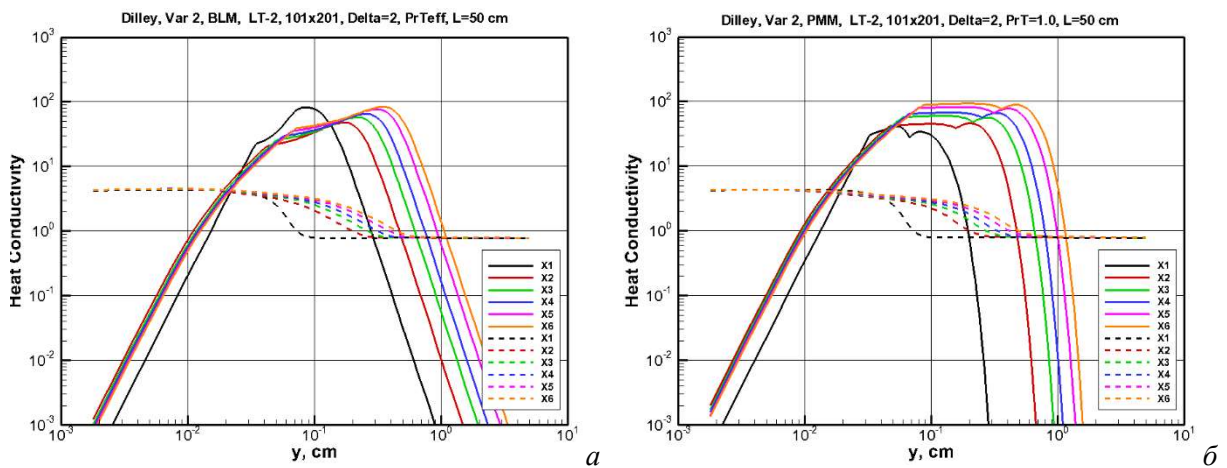


Рис. 2.12. Профили молекулярной (штриховые кривые) и турбулентной (сплошные кривые) теплопроводности в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) ВЛМ и (б) РММ для исходных данных варианта № 2

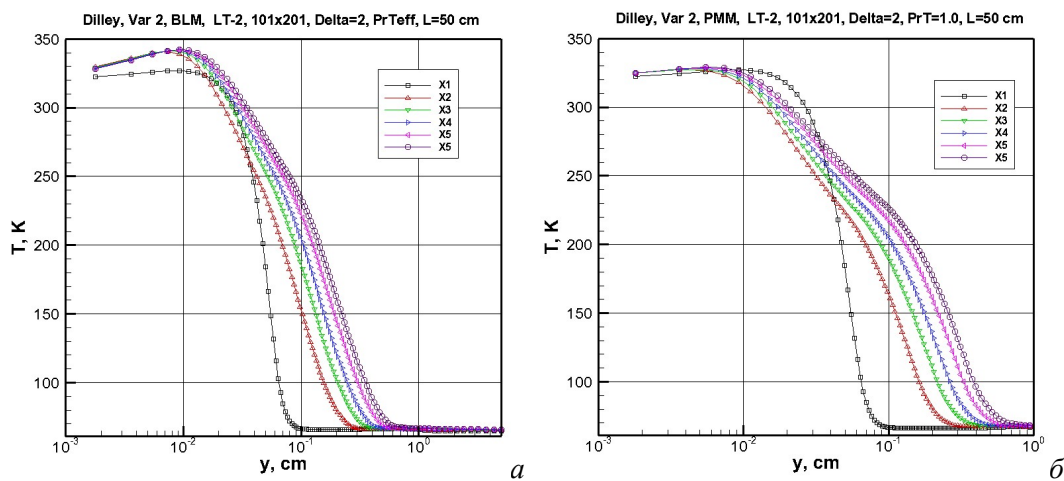


Рис. 2.13. Профили температуры в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) ВЛМ и (б) РММ для исходных данных варианта № 2

3.3. Тестовая задача #3 [19]

В данной тестовой задаче, реализованной в эксперименте в [19], также задается относительно высокая температура поверхности. По сравнению с вариантом #2 здесь несколько более разреженный поток набегающего газа и, как следствие, более низкая температура торможения. Заметим, что для этого варианта наблюдается наилучшее согласие расчета с экспериментом в работе [3].

Расчеты выполнены на умеренной конечно-разностной сетке $N_I \times N_J = 101 \times 301$ при эффективном числе Прандтля. Задавался плавный ламинарно-турбулентный переход, начиная от $Re_{t,cr} = 3 \times 10^6$ и квадратичная зависимость затухания функции $\Omega = |\text{rot } \mathbf{V}|$ во внешней области пограничного слоя.

На рис. 3.1 и 3.2 показаны поля у-компоненты скорости потока v . Ламинарно-турбулентный переход реализуется на расстоянии $x \sim 13$ см от начала расчетной области. Сравнение распределений скорости v (рис. 3.1, 3.2), чисел Маха (рис. 3.3), поля функции $\Omega = |\text{rot } \mathbf{V}|$ (рис. 3.4) и давления (рис. 3.5) показывает близость результатов, получаемых с использованием моделей BLM и PMM. Как и прежде, обратим внимание на заметное возмущение поля давления в окрестности ЛТП.

Сравнение с экспериментальными данными по конвективному нагреву (рис. 3.6) показывает хорошее согласие для двух использованных моделей. Однако, в данном случае обращает на себя внимание значительная роль нагрева, обусловленная трением. Такое различие, в отличие от вариантов, рассмотренных ранее, требует дополнительного анализа.

На рис. 3.8–3.13 представлены распределения газодинамических функций по нормали к обтекаемой поверхности в различных сечениях вдоль оси x : $x_1 = 10$ см, $x_2 = 18$ см, $x_3 = 21$ см, $x_4 = 24$ см, $x_5 = 27$ см, $x_6 = 29.9$ см. Наибольшие значения турбулентной вязкости $\sim 10^2$ достигаются на внешней границе пограничного слоя (при $y \sim 0.3$ см). В ламинарном подслое (при $y \sim 2 \times 10^{-2}$ см) турбулентная вязкость стабильно существенно меньше молекулярной на разных расстояниях от среза пластины.

Распределения вихря скорости в пограничном слое оказываются также подобными вдоль пластин. От значений на поверхности до границы пограничного слоя эта функция падает более, чем на два порядка.

Распределение продольной скорости (рис. 3.10, 3.11) демонстрируют классическую трехзонную структуру турбулентного пограничного слоя.

На рис. 3.12 показаны распределения ламинарной и турбулентной теплопроводности. Вне области пограничного слоя эффективная турбулентная теплопроводность исчезающе мала.

Температурные профили, показанные на рис. 3.13, демонстрируют относительно малые температурные градиенты вблизи поверхности. В этом случае, как обсуждалось выше, эффективность дополнительного нагрева поверхности за счет турбулентных пульсаций снижается, поэтому введенная поправка на турбулентное число Прандтля позволяет получить лучшее согласие с экспериментальными данными, чем в [3].

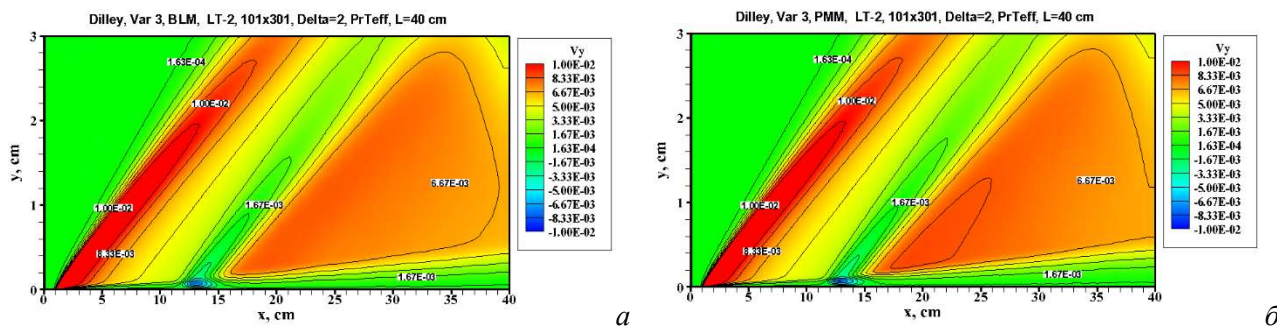


Рис. 3.1. Поле скорости $V_y = v/V_\infty$, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 3

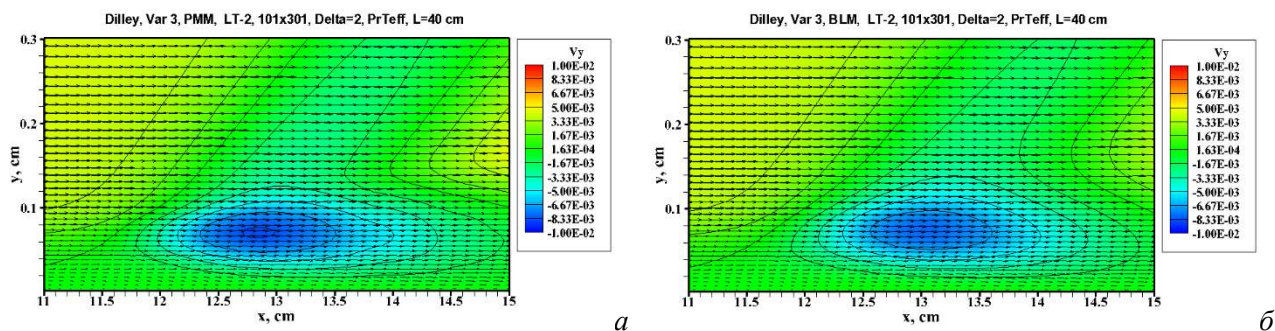


Рис. 3.2. Поле скорости $V_y = v/V_\infty$ вблизи сечения ламинарно-турбулентного перехода, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 3

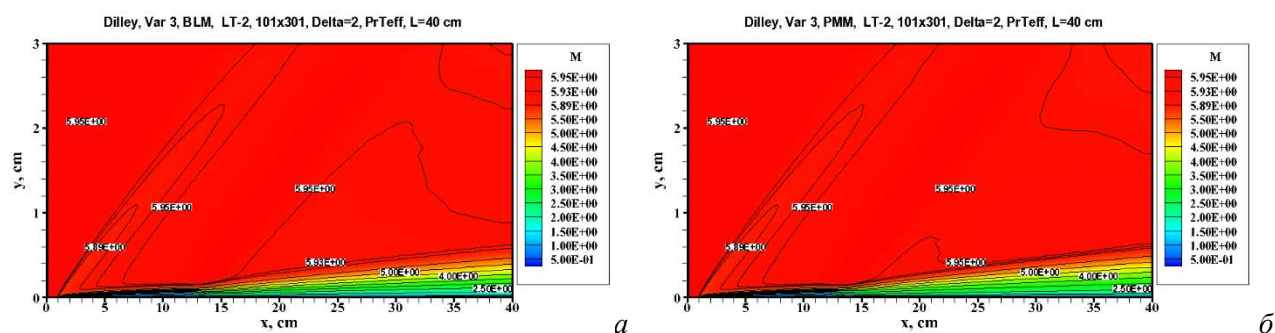


Рис. 3.3. Поле чисел Маха, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 3

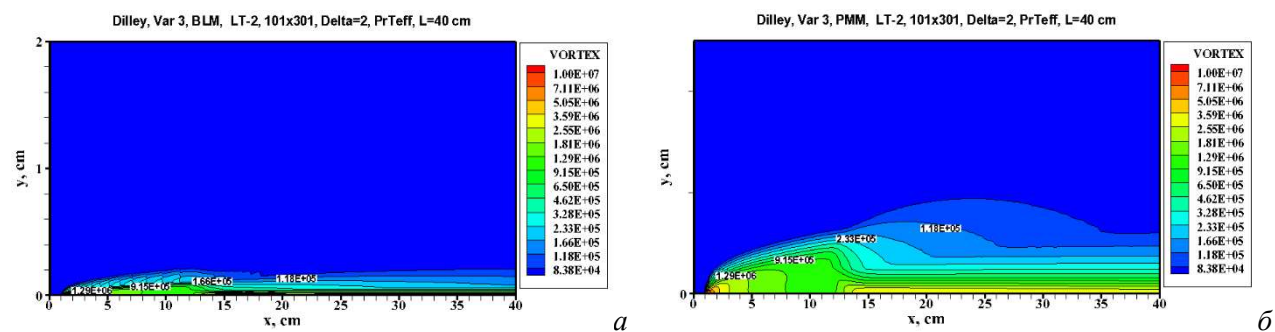


Рис. 3.4. Поле функции $\Omega = |\text{rot}V|$, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 3

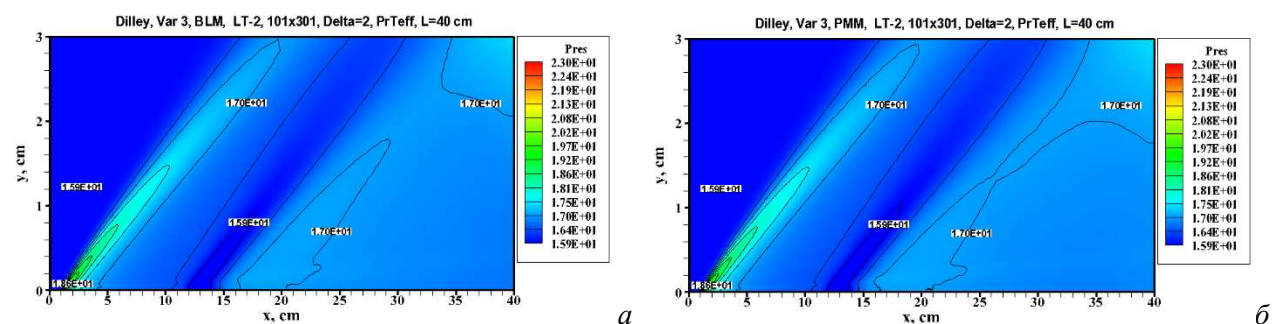


Рис. 3.5. Поле давления Pres (в Торр), рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 3

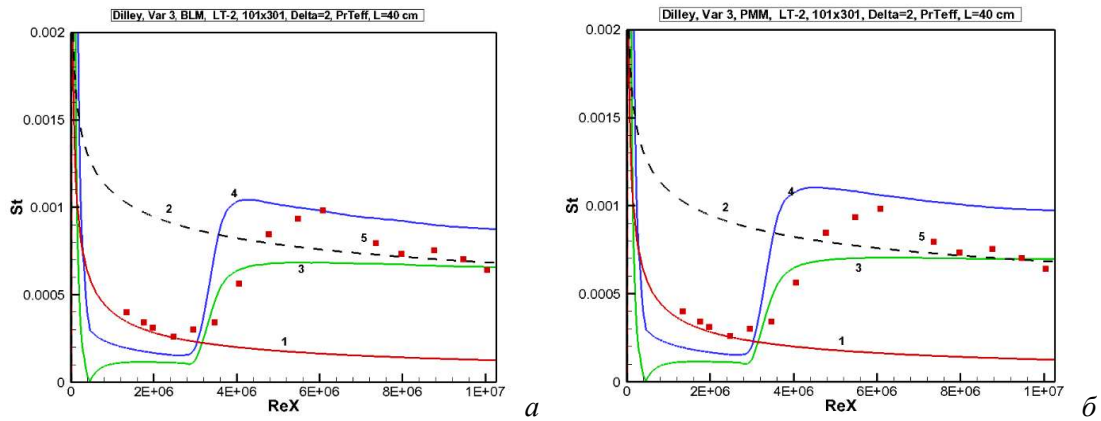


Рис. 3.6. Распределение чисел Стантона (St) вдоль поверхности пластины, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 3

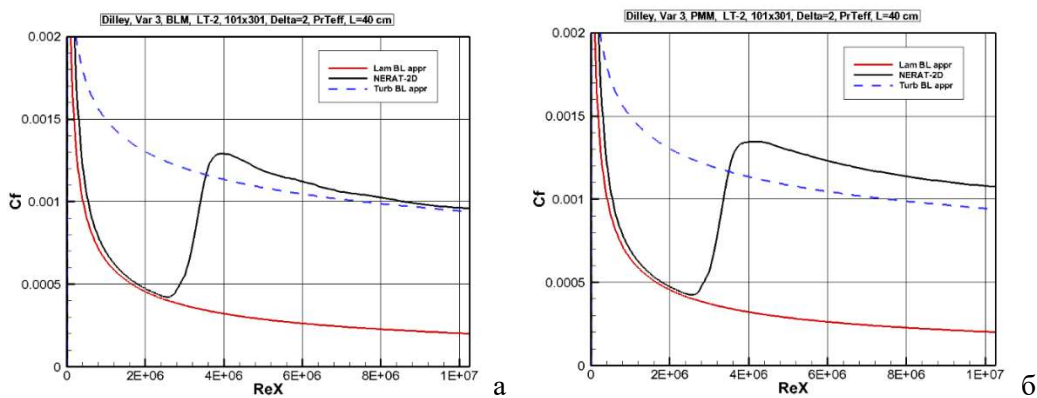


Рис. 3.7. Распределение коэффициента поверхностного трения (C_f), рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 3

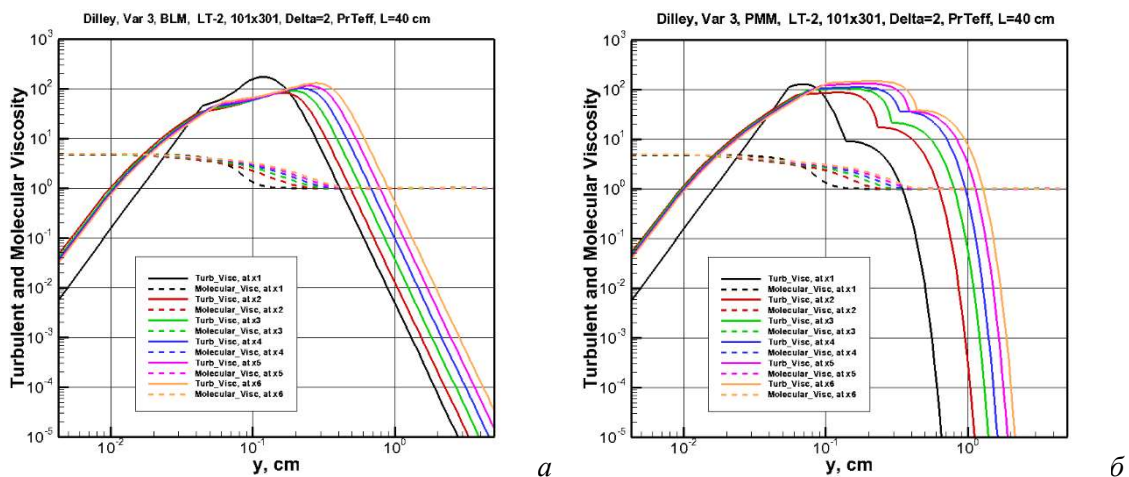


Рис. 3.8. Профили молекулярной (штриховые кривые) и турбулентной (сплошные кривые) вязкости в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 3

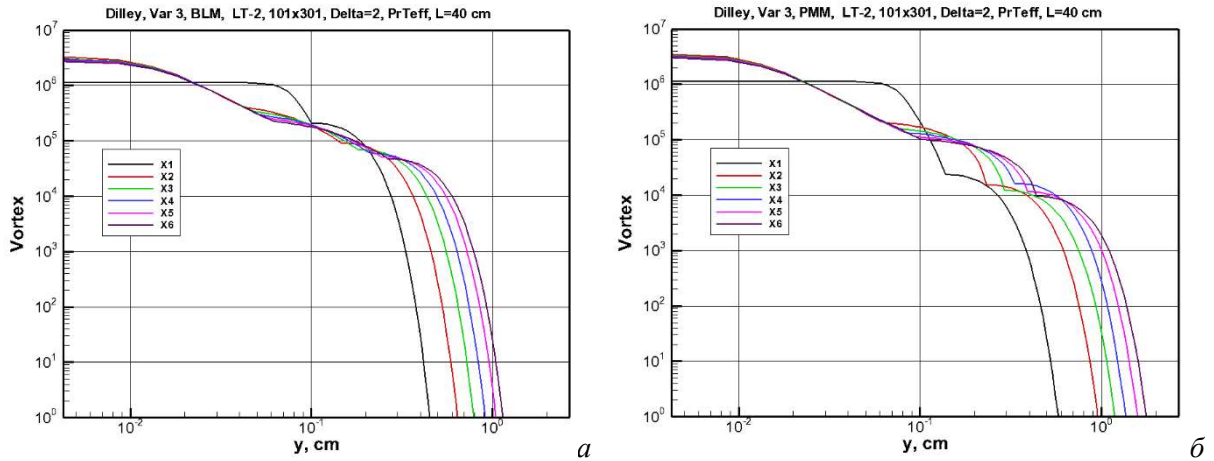


Рис. 3.9. Профили функции $\Omega = |\text{rot} \mathbf{V}|$ в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 3

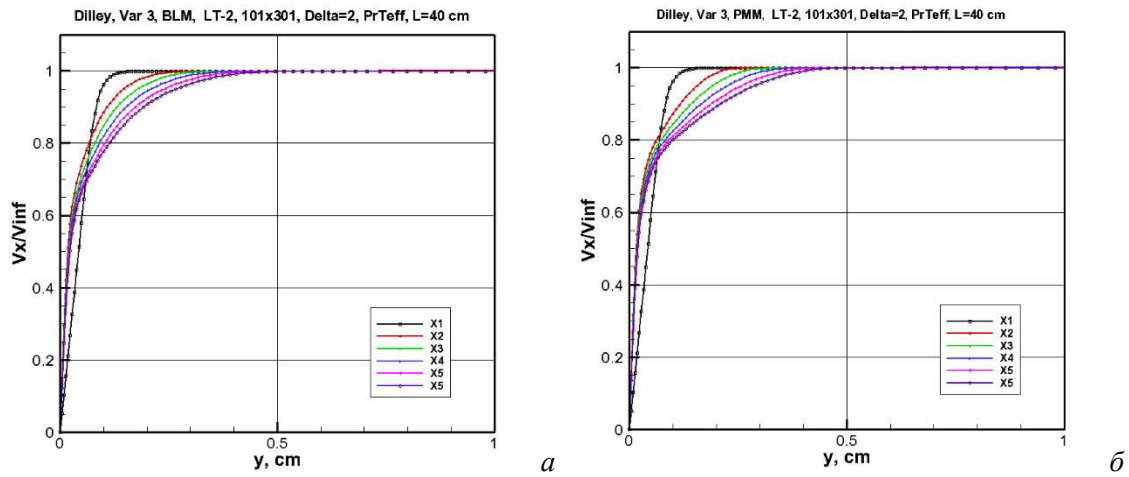


Рис. 3.10. Профили функции $V_x = u/V_\infty$ в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 3

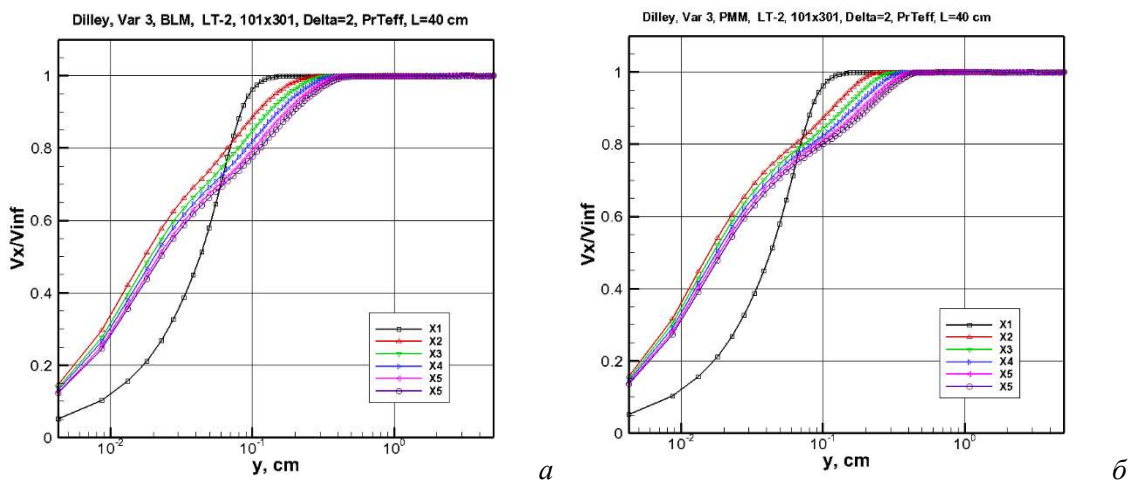


Рис. 3.11. Профили функции скорости в зависимости от $\lg x$ в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 3

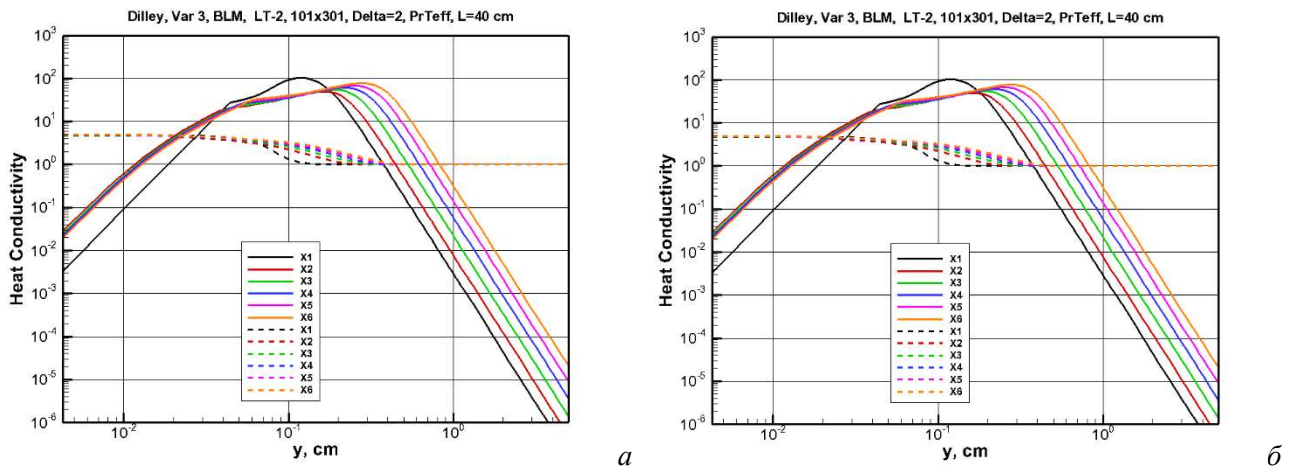


Рис. 3.12. Профили молекулярной (штриховые кривые) и турбулентной (сплошные кривые) теплопроводности в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 3

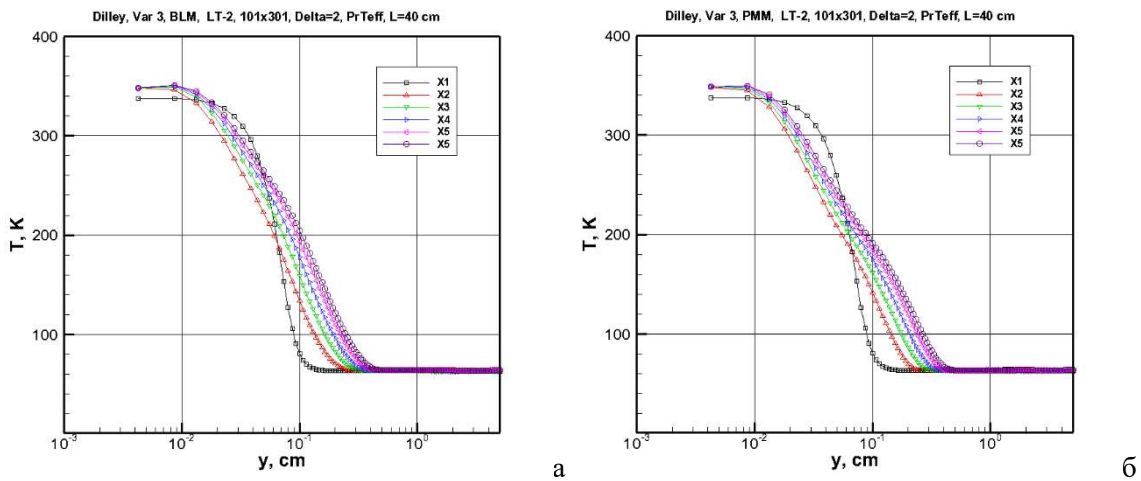


Рис. 3.13. Профили температуры в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 3

3.4. Тестовая задача #4 [20]

Исходные данные этой тестовой задачи приведены в табл. 1 и 2. Этот вариант отличается наибольшей из исследованных в исследуемой экспериментальной серии температурой торможения, $T_0 = 2680$ К. В отличие от предыдущих вариантов здесь весьма высокая температура набегающего потока, $T_\infty = 240$ К и увеличенное число Маха $M = 7.12$. Несмотря на высокую температуру поверхности $T_w = 299$ К отношение $T_w/T_0 = 0.11$ является минимальным из исследованных. Еще одной отличительной особенностью является увеличенная протяженность обтекаемой поверхности $L = 100$ см.

При использовании модели BLM применялось сглаживание ламинарно-турбулентного перехода (модель LT2), турбулентное число Прандтля $Pr_t = 0.7$ и квадратичный показатель экспоненциального снижения функции $\Omega = |\text{rot } \mathbf{V}|$ во внешней части пограничного слоя. Для модели PMM применялась модель мгновенного ламинарно-турбулентного перехода (модель LT1) и $Pr_t = 1$.

На рис. 4.1 и 4.2 показаны распределения y -й компоненты скорости v . Как и прежде, хорошо идентифицируются две области газодинамических возмущений у передней кромки и в зоне ламинарно-турбулентного перехода. Естественно, что в случае мгновенного ЛТ-перехода наблюдается заметно более сильное возмущение.

Распределения чисел Маха (рис. 4.3) показывают, что расчетное значение толщины пограничного слоя достигает в расчетной области величины порядка $\delta \sim 1$ см. Видно, что скорость нарастания толщины пограничного слоя резко изменяется за область ЛТП.

На распределениях функции Ω видны две области максимальных величин у кромки и в области ЛТ-перехода. Эти распределения показывают, что, хотя величина Ω и падает во внешней области течения более, чем на два порядка, чем в пограничном слое, она не близка к нулю, что заметно отличает решаемую задачу от погранслоистой постановки, где функция Ω равна нулю.

На распределениях давления в расчетной области (рис. 4.5) отметим видимые возмущения, наблюдаемые ниже по течению (при $x > 70$ см). Такого типа распределения будут также отличаться для других расчетных вариантов для протяженной поверхности.

На рис. 4.6 дано сравнение расчетных и экспериментальных данных по конвективному нагреву вдоль обтекаемой поверхности. Отметим хорошее согласие этих данных. Расчетные данные показывают также хорошее согласие с корреляционными зависимостями по конвективному нагреву в ламинарном (кривая 1) и турбулентном (кривая 2) пограничных слоях, и по коэффициенту поверхностного трения (рис. 4.7).

Структура турбулентного пограничного слоя в поперечных к пластине сечениях $x_1 = 20$ см, $x_2 = 50$ см, $x_3 = 75$ см, $x_4 = 100$ см, $x_5 = 125$ см, $x_6 = 150$ см представлены на рис. 4.8, 4.9 и 4.12 соответственно для коэффициентов турбулентной вязкости, функции вихря скорости и коэффициентов турбулентной теплопроводности. Отметим хорошее описание ламинарного подслоя ($x \lesssim 10^{-2}$ см) и быстрое убывание всех функций над верхней границей пограничного слоя. Ламинарный подслой также хорошо виден на рис. 4.11, где дано распределение продольной скорости в логарифмической шкале по нормали к поверхности. Та область течения, где турбулентная вязкость начинает превосходить молекулярную (см. рис. 4.8, $x \gtrsim 0.01$ см) отражается на рис. 4.11 началом линейного участка распределения скорости u . Из рис. 4.10 граница скоростного пограничного слоя в конце расчетной области ($x \sim 100$ см) достигает $\delta \sim 2$ см, что не столь отчетливо видно на распределениях чисел Маха (рис. 4.3).

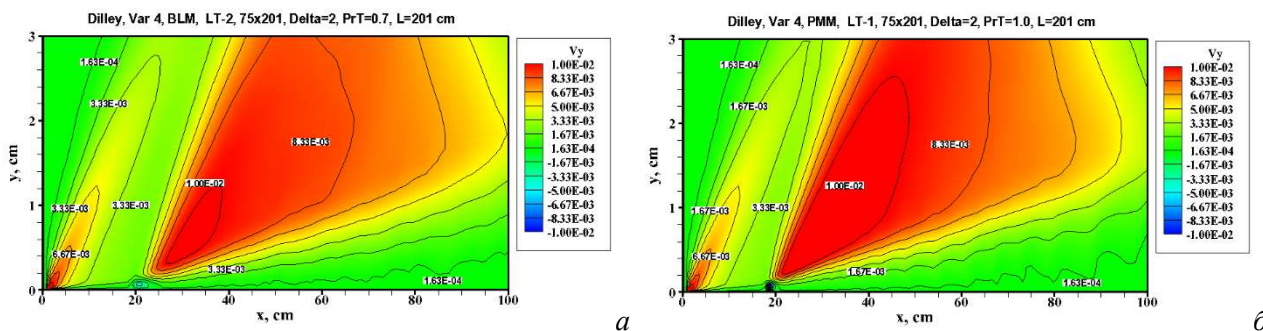


Рис. 4.1. Поле скорости $V_y = v/V_\infty$, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 4

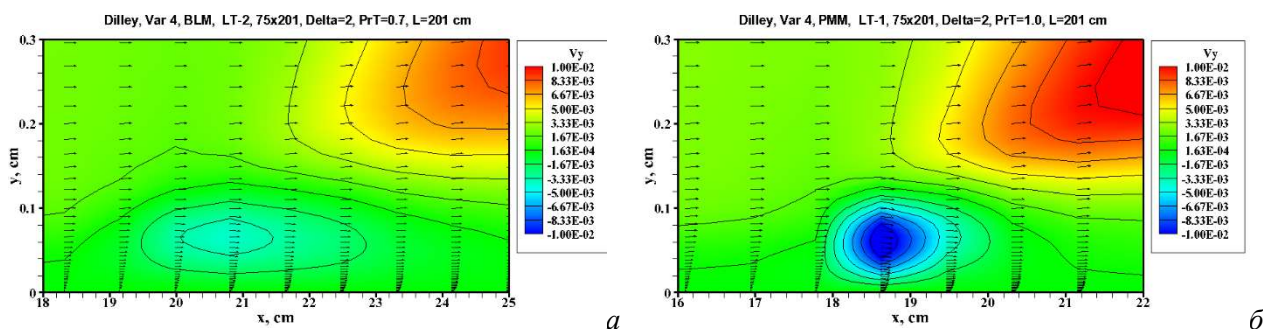


Рис. 4.2. Поле скорости $V_y = v/V_\infty$ вблизи сечения ламинарно-турбулентного перехода, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 4

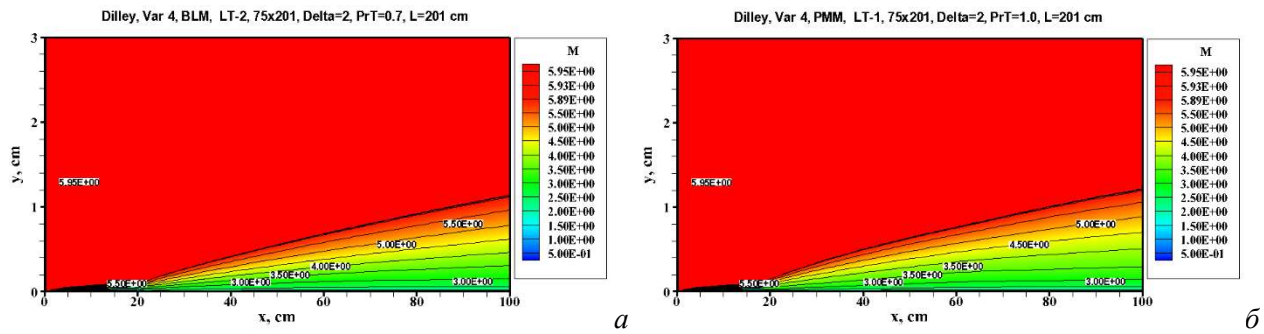


Рис. 4.3. Поле чисел Маха, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 4

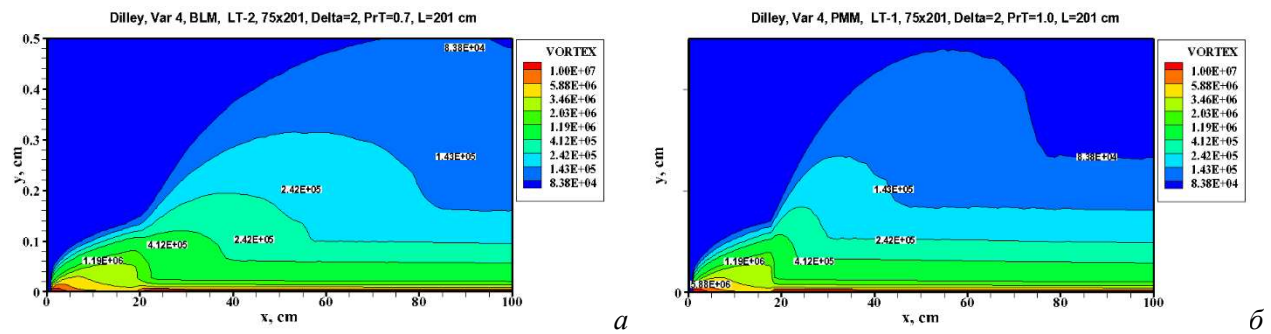


Рис. 4.4. Поле функции $\Omega = |\text{rot} \mathbf{V}|$, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 4

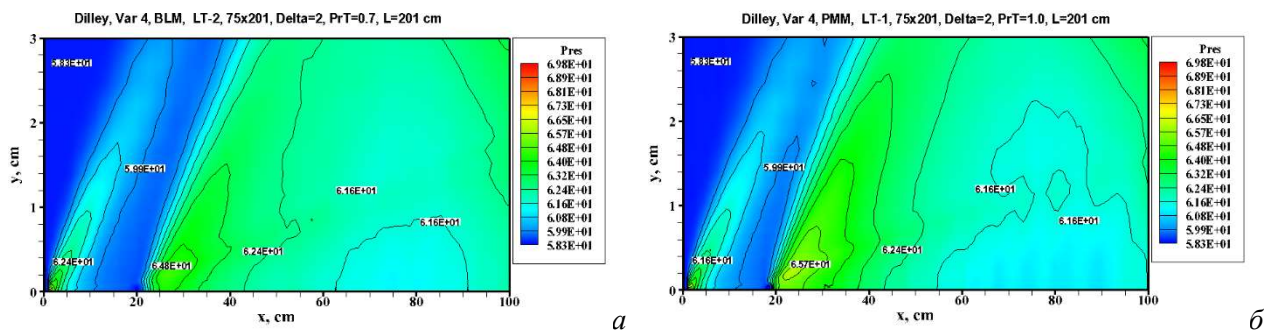


Рис. 4.5. Поле давления Pres (в Торр), рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 4

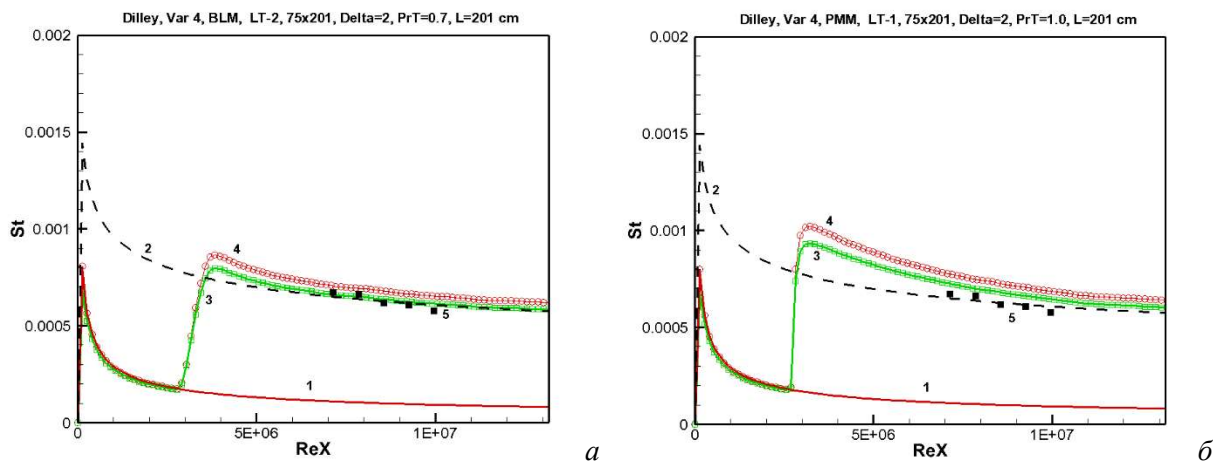


Рис. 4.6. Распределение чисел Стантона (St) вдоль поверхности пластины, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 4

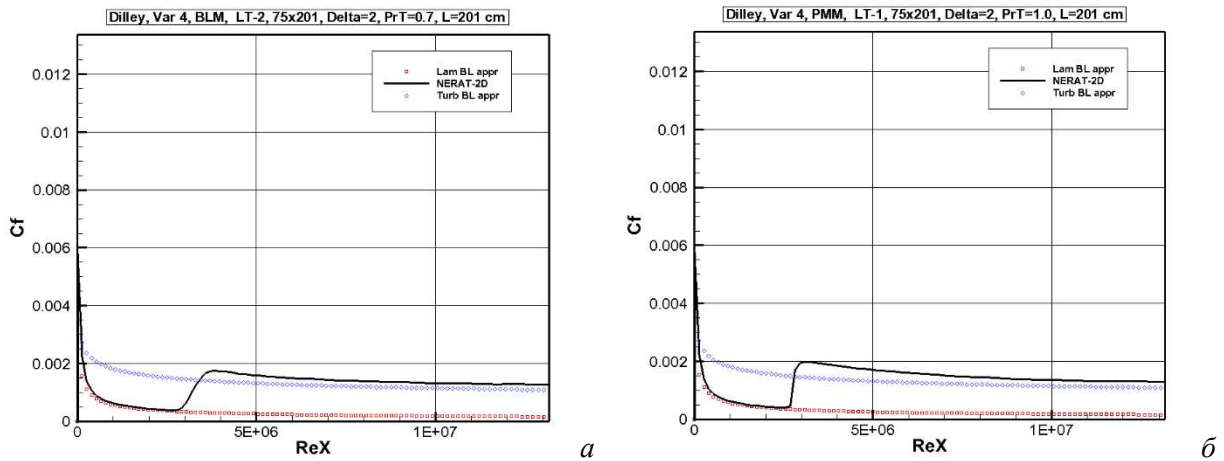


Рис. 4.7. Распределение коэффициента поверхностного трения (C_f), рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 4

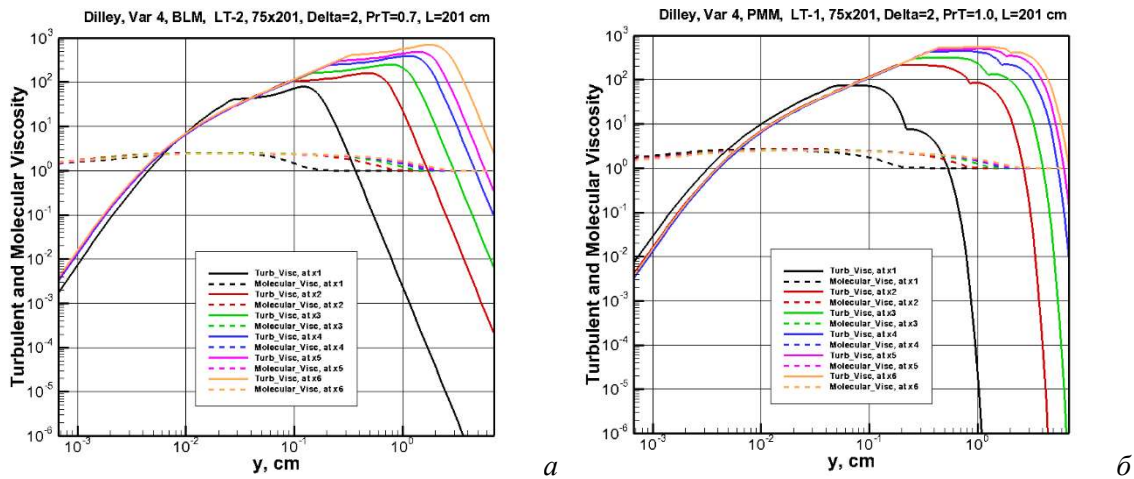


Рис. 4.8. Профили молекулярной (штриховые кривые) и турбулентной (сплошные кривые) вязкости в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 4

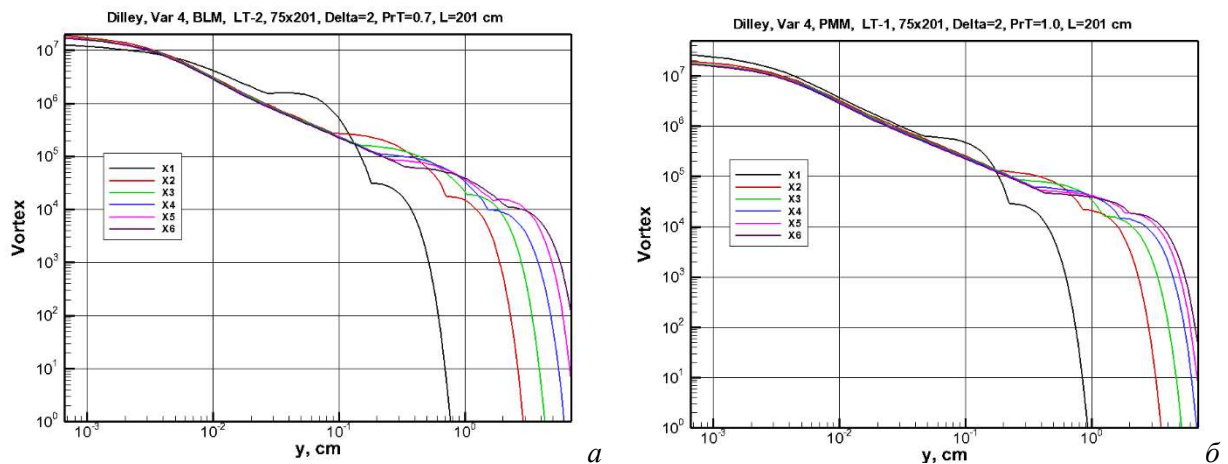


Рис. 4.9. Профили функции $\Omega = |\text{rot V}|$ в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 4

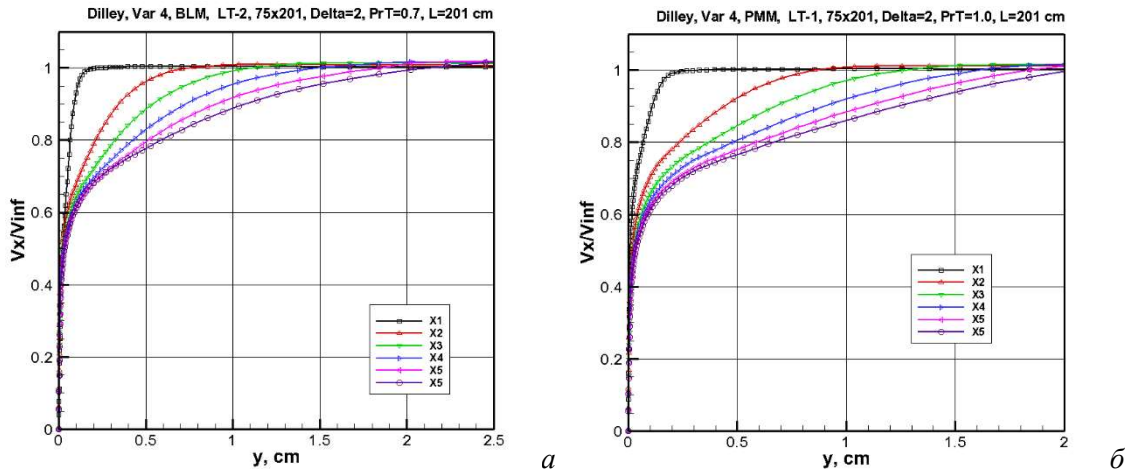


Рис. 4.10. Профили функции $V_x = u/V_\infty$ в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 4

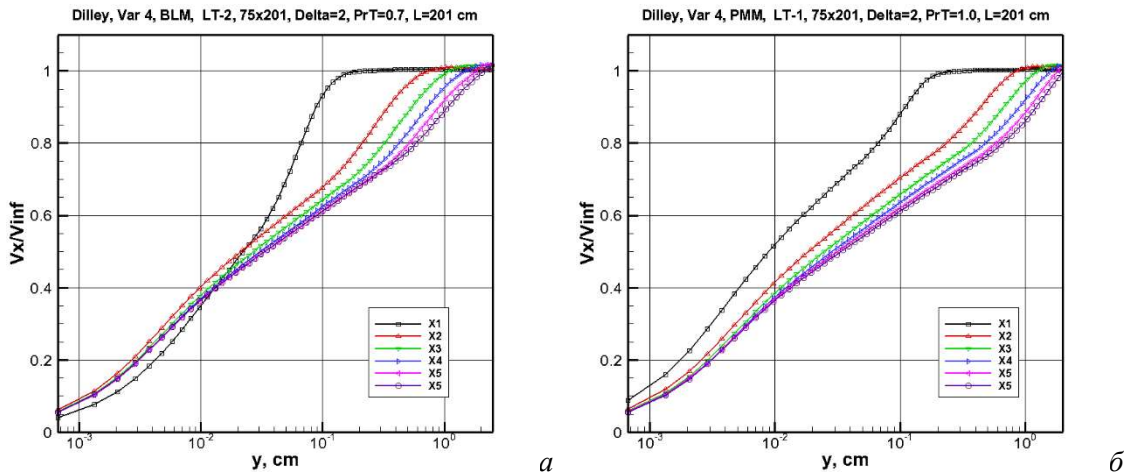


Рис. 4.11. Профили функции скорости в зависимости от $\lg x$ в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 4

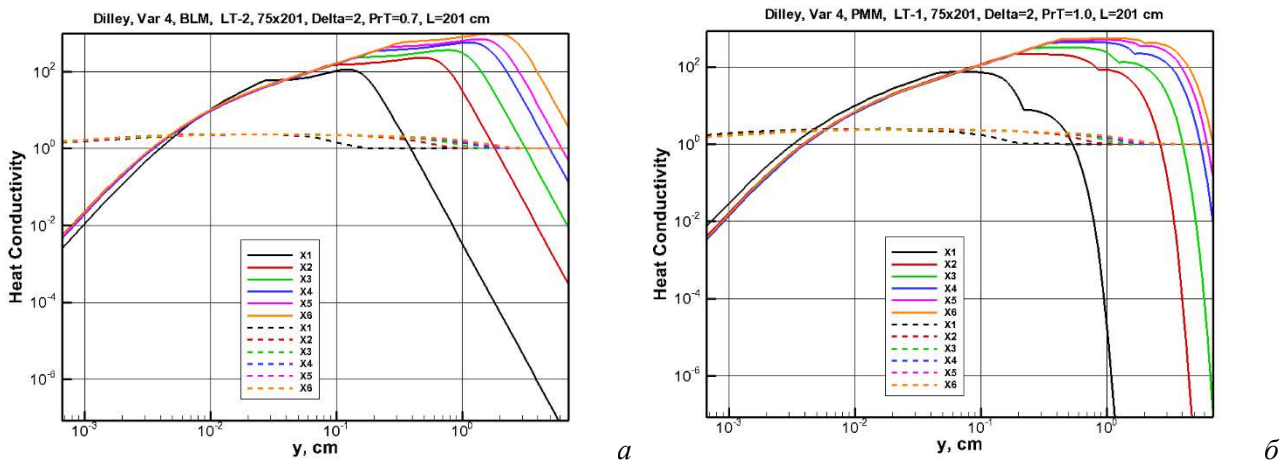


Рис. 4.12. Профили молекулярной (штриховые кривые) и турбулентной (сплошные кривые) теплопроводности в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 4

Из анализа рис. 4.13 можно сделать вывод, что толщина теплового пограничного слоя δ_T также несколько превосходит величину 2 см в конце расчетной области при $x = 100$ см.

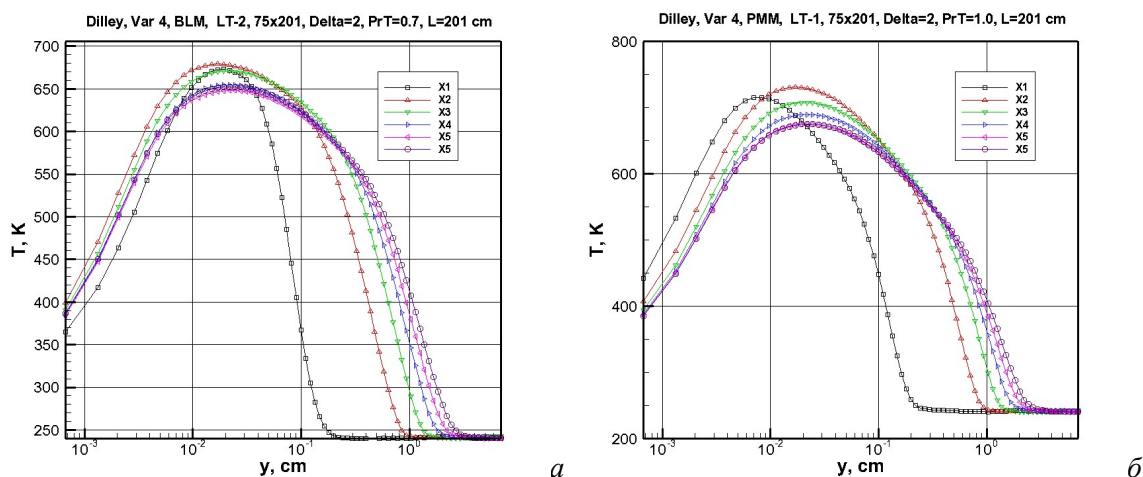


Рис. 4.13. Профили температуры в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 4

3.5. Тестовая задача #5 [20]

В этом расчетном варианте задавалось максимальное число Маха $M = 8.8$ (см. табл. 1). Температура в набегающем потоке $T_\infty = 94$ К, что значительно меньше температуры поверхности $T_w = 296$ К. Особенностью данного варианта является протяженная поверхность $L = 200$ см. Расчеты по моделям BLM и PMM велись при одинаковых параметрах: модель LT-перехода LT2, $\delta = 2$, $Pr_T = 0.7$. При заданном диапазоне критических чисел Рейнольдса $Re_{кр} = (3 \div 4) \times 10^6$ LT-переход происходит на расстоянии $x = 6$ см от среза пластин. На рис. 5.2 хорошо видно резкое изменение структуры течения. Из анализа рис. 5.1 по распределению скорости v можно сделать вывод по частичному проявлению численной неустойчивости решения в расчетной области большой протяженности. Примечательно, что обычные рецепты изменения конечно-разностных схем (повышение порядка аппроксимации, изменение шага интегрирования по времени и т.п.) не всегда приводят к исчезновению отмеченных проявлений неустойчивости. Сравнение полей Маха на рис. 5.3, полученных с использованием моделей BLM и PMM при прочих равных условиях расчета показывает, что на качество получаемого решения несомненно оказывает влияние и сама алгебраическая модель турбулентности.

Поля функций вихря на рис. 5.4 показывают несколько большую толщину динамического пограничного слоя, получаемую в модели PMM.

Поля давления на рис. 5.5 также демонстрируют проявление численных неустойчивостей ниже по течению.

Распределение чисел Стантона St и коэффициентов C_f вдоль обтекаемой пластины демонстрирует хорошее совпадение с экспериментальными данными и с корреляционными зависимостями, хотя для модели PMM отметим небольшое завышение данных. Тем не менее, заметим, что указанные расхождения не являются критичными.

На рис. 5.8, 5.9 и 5.12 показаны распределения турбулентной вязкости, функции вихря и турбулентной теплопроводности в сечениях $x_1 = 4$ см, $x_2 = 20$ см, $x_3 = 50$ см, $x_4 = 80$ см, $x_5 = 100$ см, $x_6 = 150$ см. Отметим хорошую корреляцию распределений μ_t и λ_t с распределениями молекулярной вязкости и теплопроводности, отражающих структуру температурного пограничного слоя. На расстоянии $1 \div 2$ см над внешней условной границей пограничного слоя μ_t и λ_t становятся исчезающе малыми.

На рис. 5.10 и 5.11 даны распределения продольных скоростей в указанных выше сечениях. На распределениях скоростей в логарифмической шкале по x хорошо идентифицируются классические участки турбулентного пограничного слоя. Эти же участки турбулентного пограничного слоя хорошо видны на распределениях температуры на рис. 5.13.

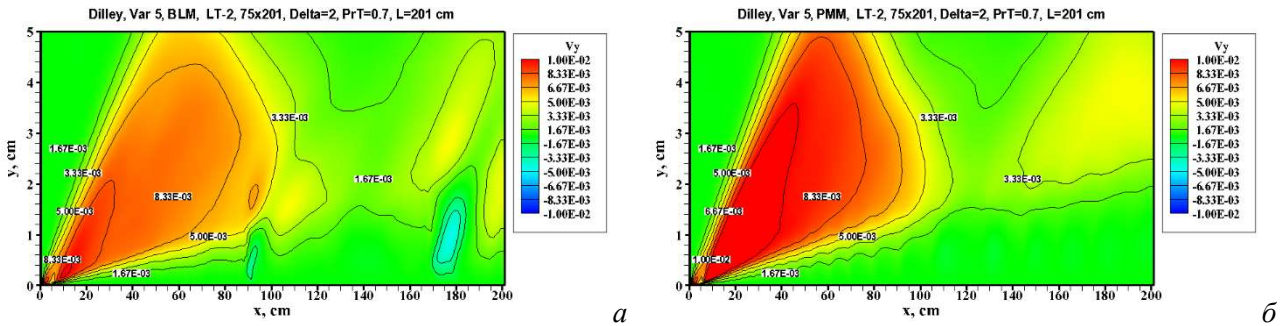


Рис. 5.1. Поле скорости $V_y = v/V_\infty$, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 5

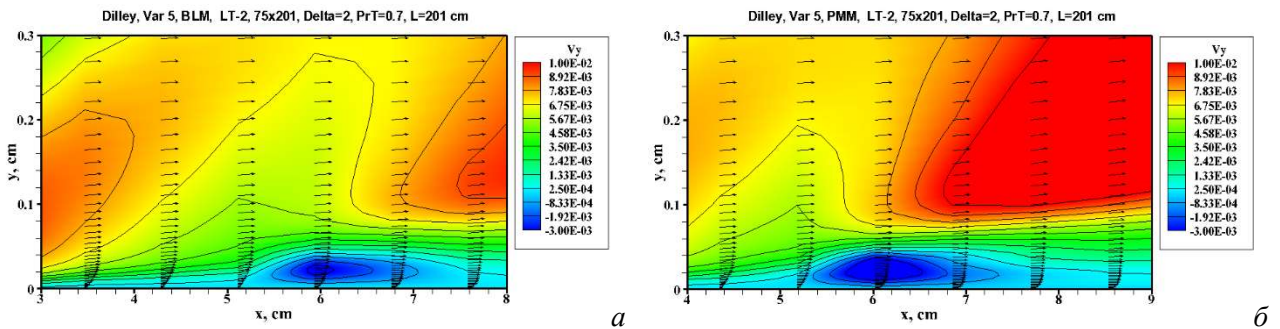


Рис. 5.2. Поле скорости $V_y = v/V_\infty$ вблизи сечения ламинарно-турбулентного перехода, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 5

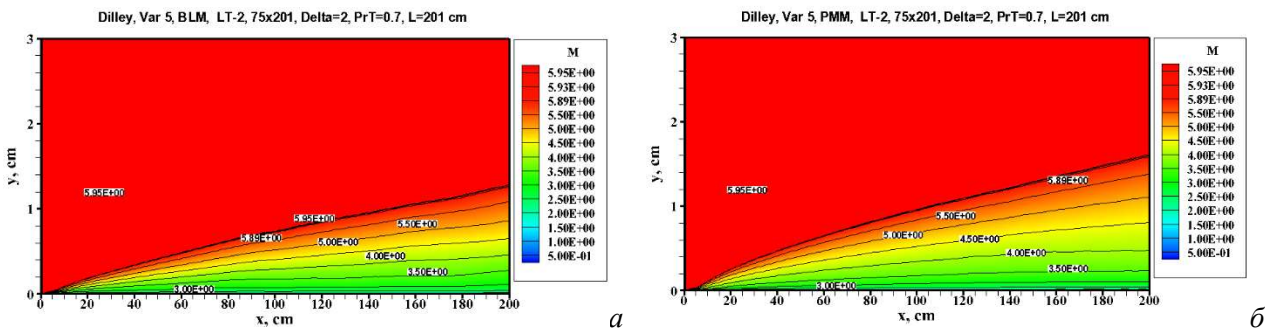


Рис. 5.3. Поле чисел Маха, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 5

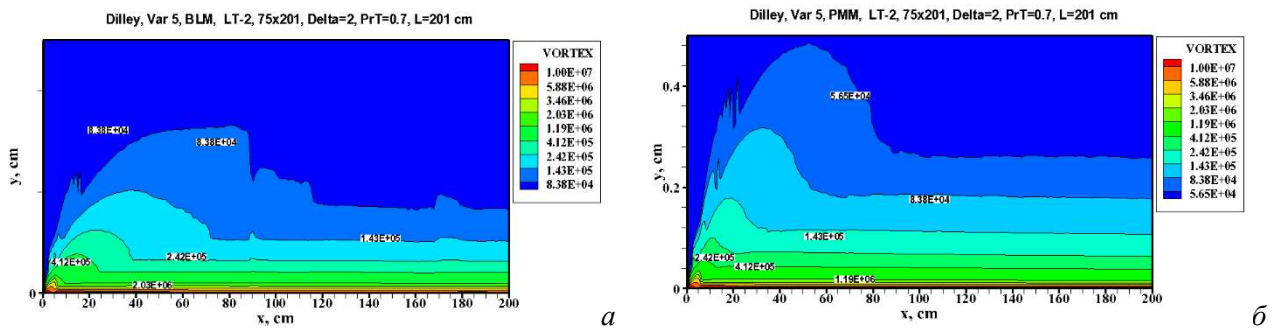


Рис. 5.4. Поле функции $\Omega = |\text{rot V}|$, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 5

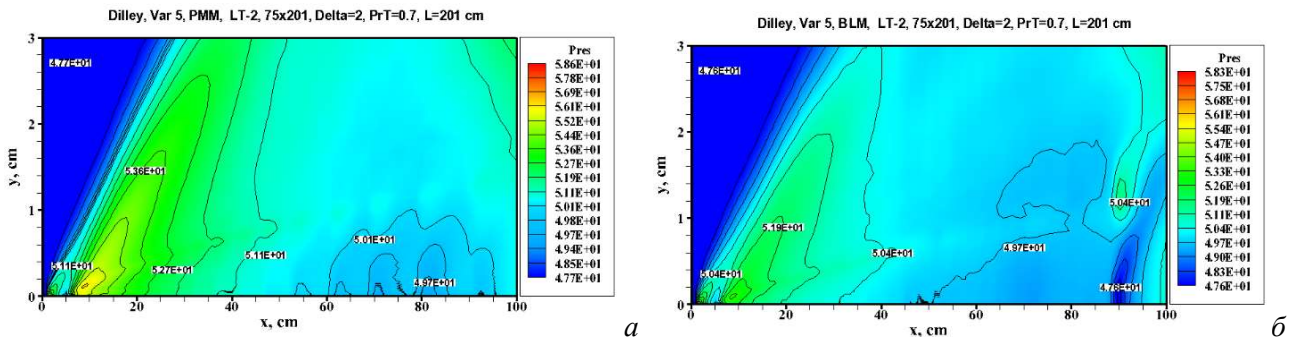


Рис. 5.5. Поле давления Pres (в Торр), рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 5

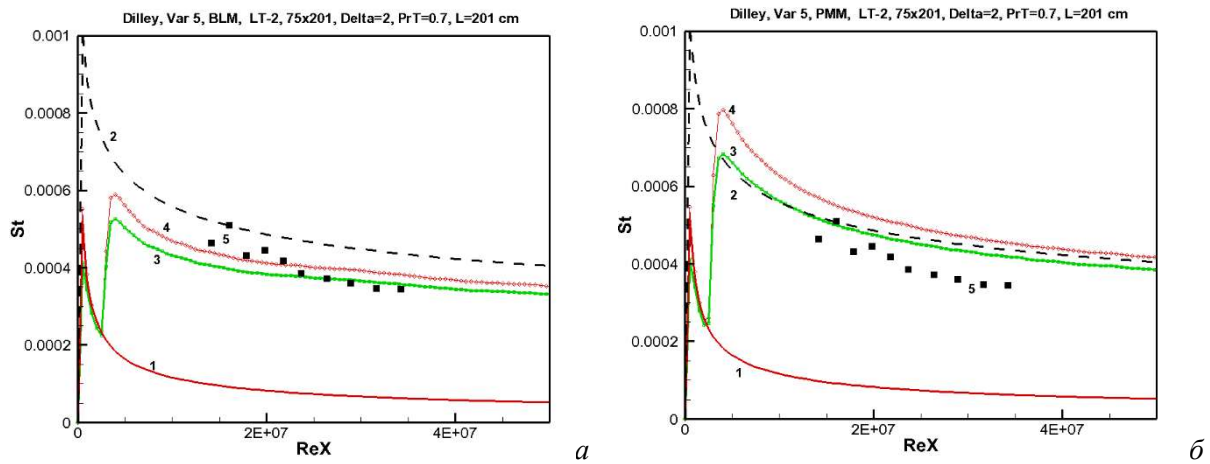


Рис. 5.6. Распределение чисел Стантона (St) вдоль поверхности пластины, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 5

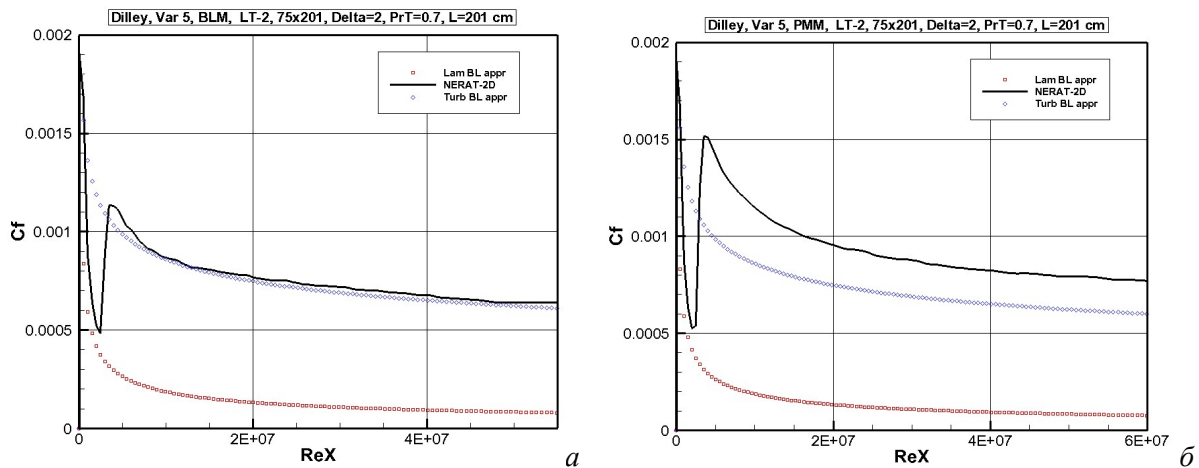


Рис. 5.7. Распределение коэффициента поверхностного трения (C_f), рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 5

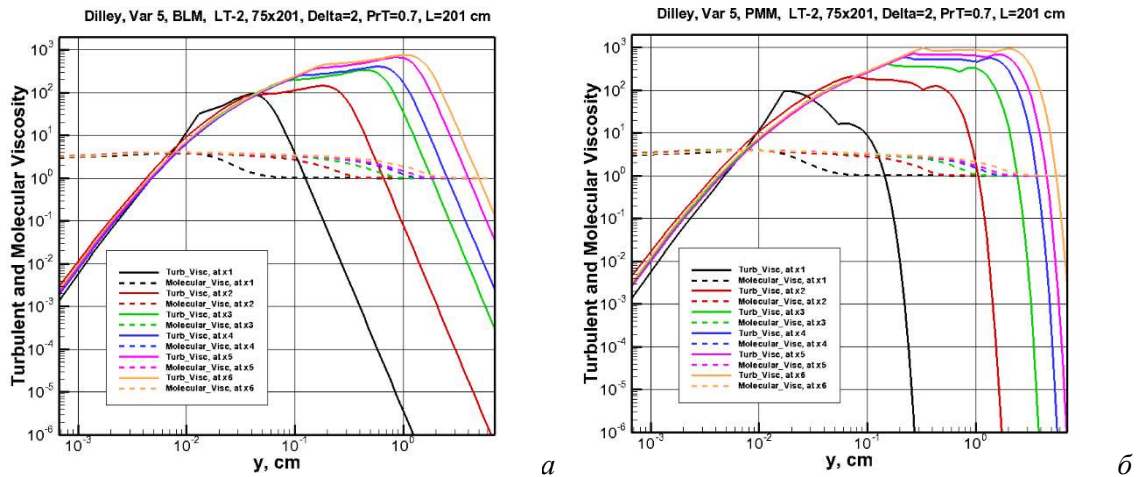


Рис. 5.8. Профили молекулярной (штриховые кривые) и турбулентной (сплошные кривые) вязкости в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 5

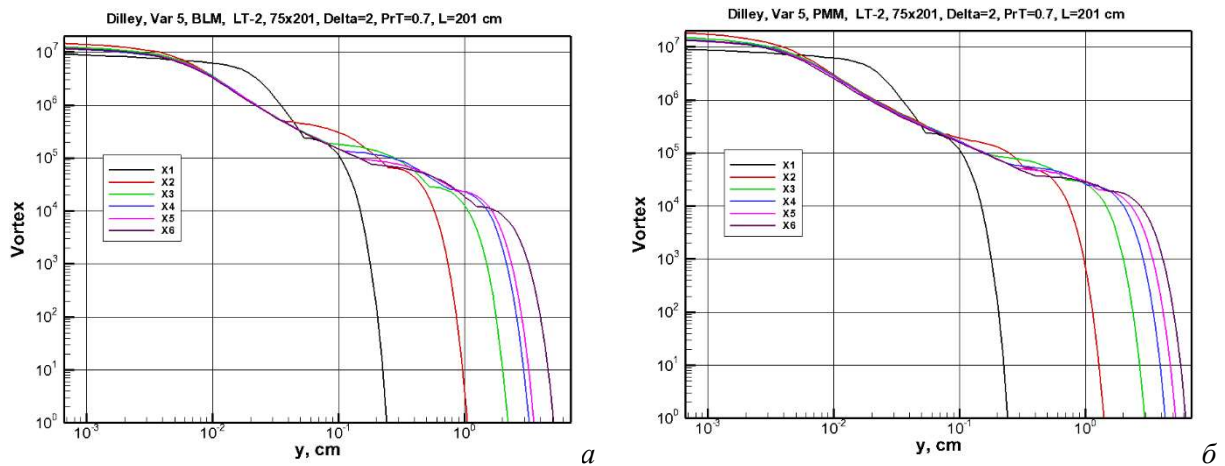


Рис. 5.9. Профили функции $\Omega = |\text{rot } \mathbf{V}|$ в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 5

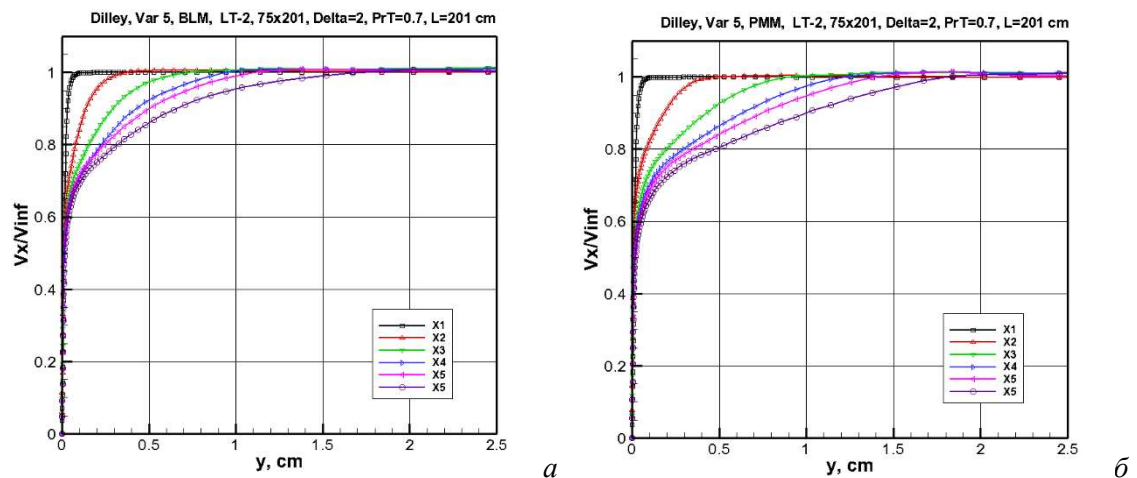


Рис. 5.10. Профили функции $V_x = u/V_{\infty}$ в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 5

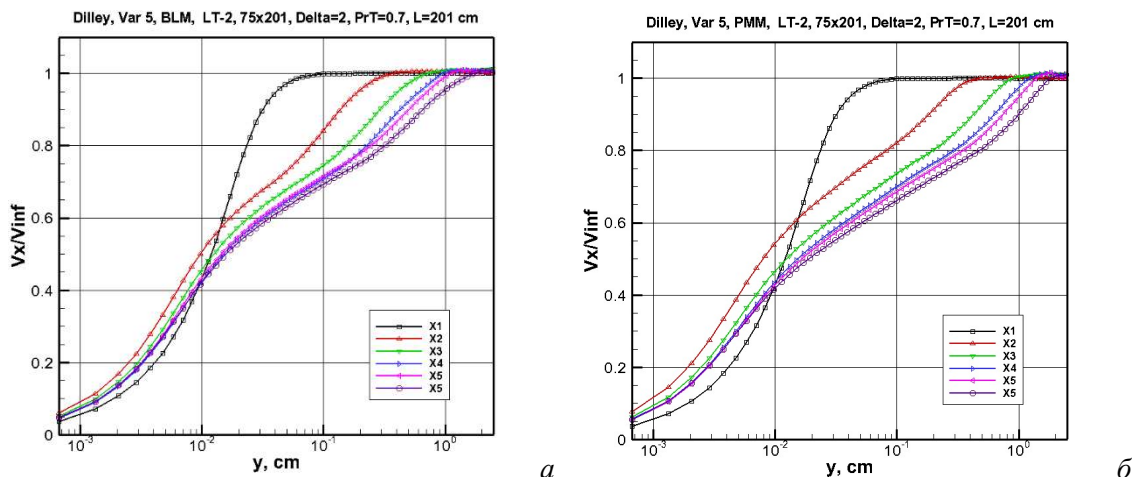


Рис. 5.11. Профили функции скорости в зависимости от $\lg x$ в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 5

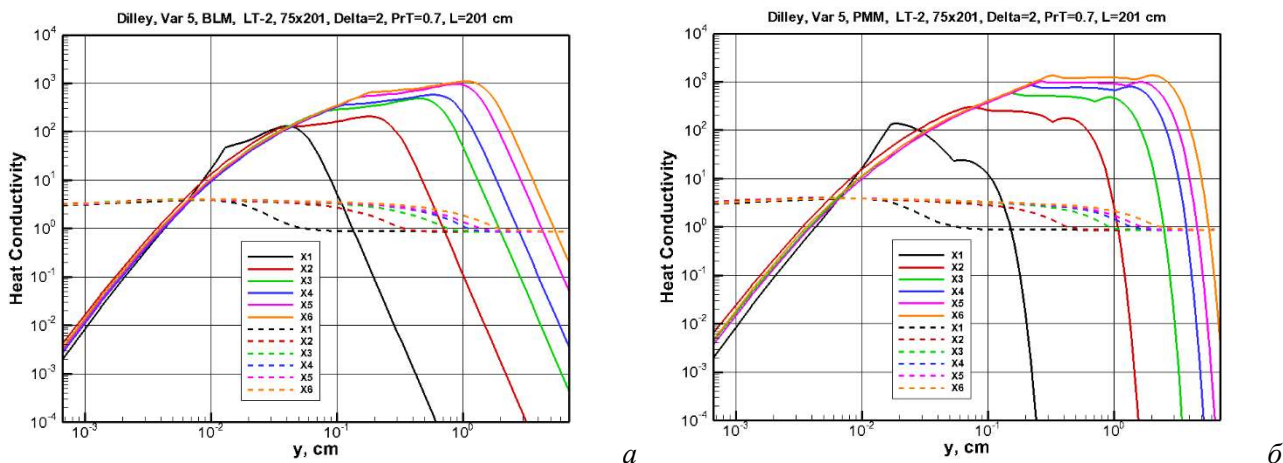


Рис. 5.12. Профили молекулярной (штриховые кривые) и турбулентной (сплошные кривые) теплопроводности в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 5

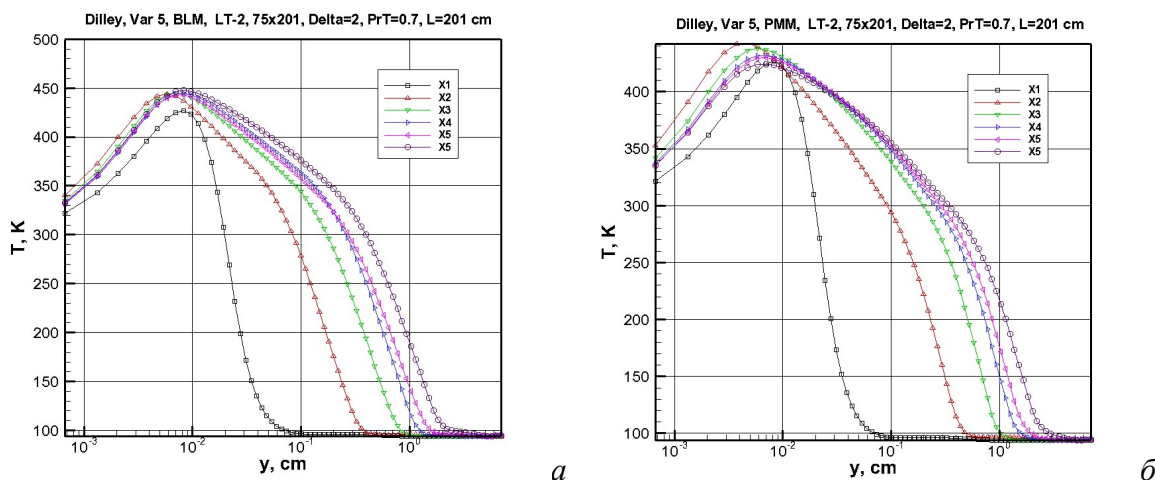


Рис.5.13. Профили температуры в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 5

3.6. Тестовая задача №6 [20]

Особенностью данной тестовой задачи от предыдущих является увеличение давления от 2-х до 5-ти раз и до 2-х раз плотности в набегающем потоке. Температурный фактор задачи $T_w/T_0 = 296/1105 = 0.26$ (см. табл. 1). Расчет проводится для протяженной поверхности $L = 200$ см при числе Маха $M = 7$.

Несмотря на проявление небольшой численной неустойчивости на рис. 6.1, где показано поле скорости нормальной компоненты V вектора скорости \mathbf{V} отметим что в данном варианте, по сравнению с тестовой задачей №5, получено весьма устойчивое решение (см. поле чисел Маха на рис. 6.3 и функции $\Omega = |\text{rot}\mathbf{V}|$ на рис. 6.4). При заданном критическом числе Рейнольдса в модели PMM (модель LT1) $Re_{LTT} = 3 \times 10^6$, LT-переход наблюдается на расстоянии $x_{LTT} \sim 3.5$ см от среза пластины (рис. 6.2). Напомним, что численное решение уравнений RANS-модели проводится в расчетной области, включающей область невозмущенного течения. Координата передней кромки пластины $x_0 = 1$ см. В данной задаче при использовании модели BLM применялась модель плавного LT-перехода (модель LT2; $Re_{LTT, \min} = 3 \times 10^6$, $Re_{LTT, \max} = 4 \times 10^6$). Заметим, что из анализа поля давления на рис. 6.5 становится ясным, что при решении RANS уравнений наблюдаются его заметные возмущения как вдоль, так и поперек потока.

Данные по конвективному нагреву и поверхностному трению на рис. 6.6 и 6.7 показывают хорошее согласие результатов численного моделирования как с экспериментальными данными (рис. 6.6), так и с корреляционными соотношениями (рис. 6.6 и 6.7).

На рис. 6.8–6.13 показаны распределения газодинамических функций поперек пограничного слоя в сечениях $x_1 = 4$ см, $x_2 = 20$ см, $x_3 = 50$ см, $x_4 = 80$ см, $x_5 = 100$ см, $x_6 = 150$ см (от среза пластины). Профили функций μ_t (рис. 6.8) и λ_t (рис. 6.12) показывают исчезающе малые величины в ламинарном подслое и во внешней области пограничного слоя. Заметим, что в ламинарном подслое функции вихря скорости достигает своих максимальных значений (рис. 6.9).

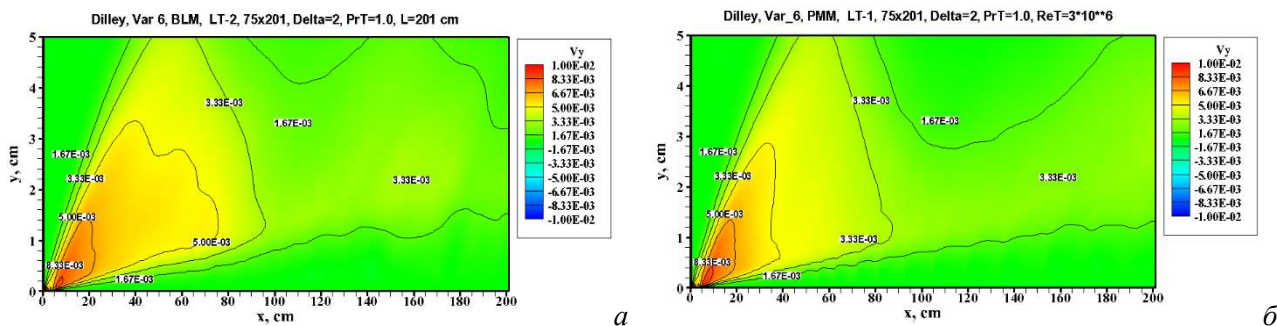


Рис. 6.1. Поле скорости $V_y = v/V_\infty$, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 6

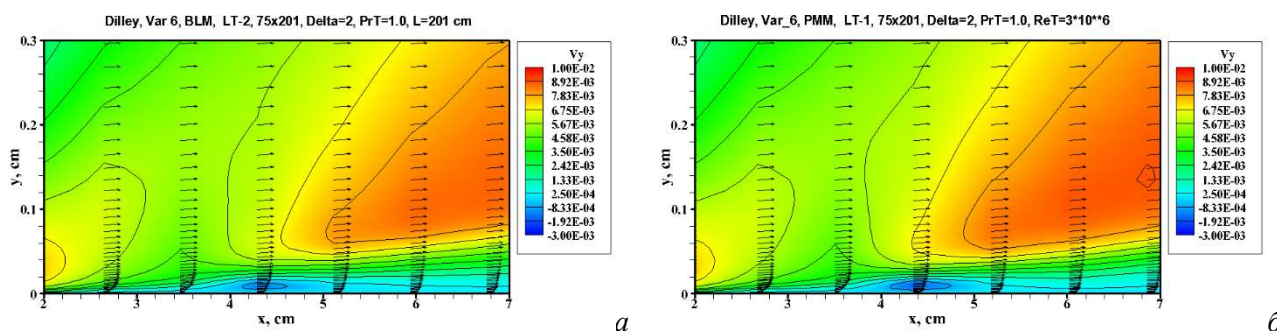


Рис. 6.2. Поле скорости $V_y = v/V_\infty$ вблизи сечения ламинарно-турбулентного перехода, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 6

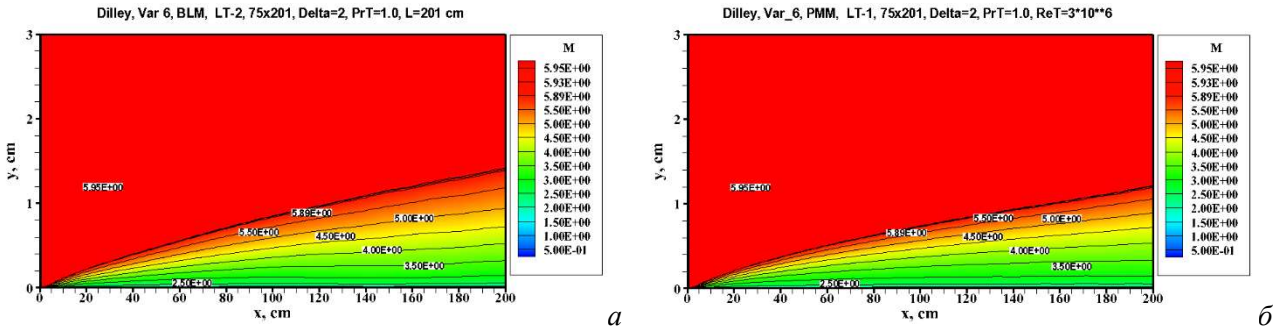


Рис. 6.3. Поле чисел Маха, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 6

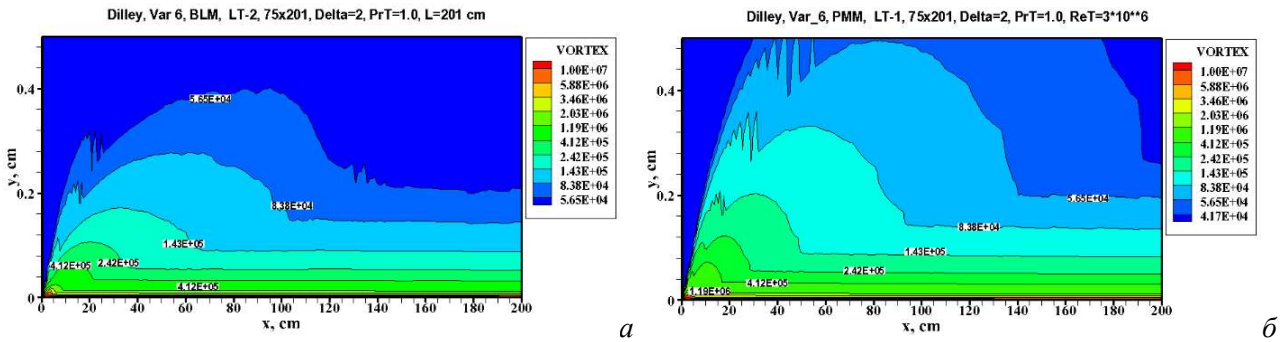


Рис. 6.4. Поле функции $\Omega = |\text{rot} \mathbf{V}|$, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 6

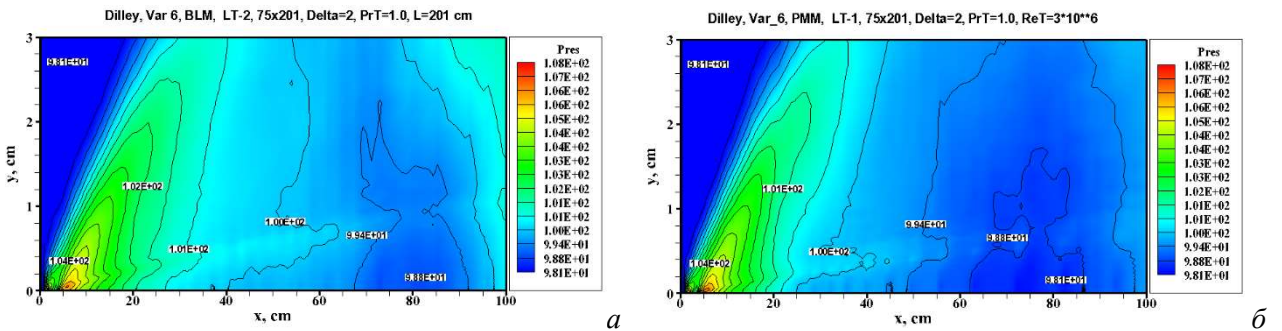


Рис. 6.5. Поле давления Pres (в Торр), рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 6

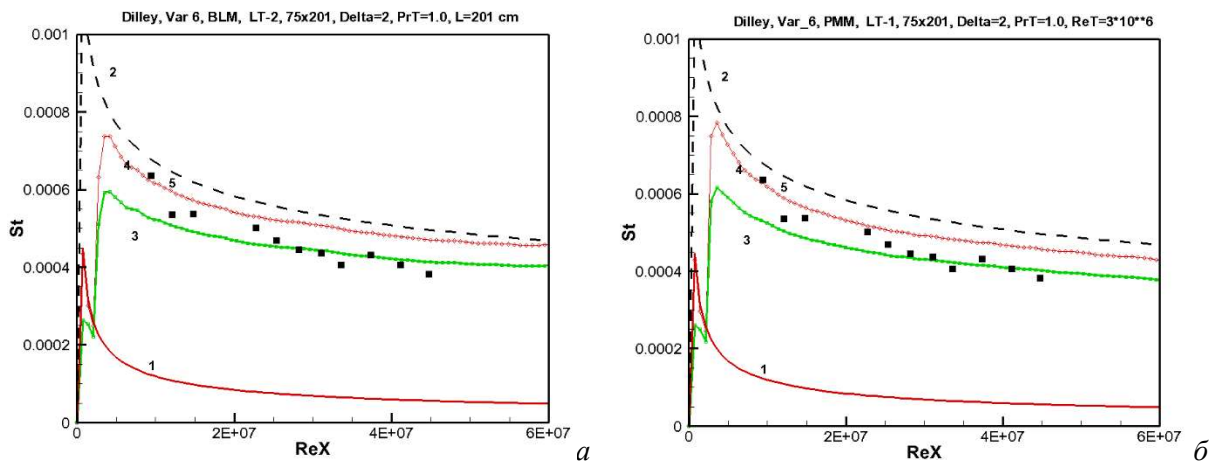


Рис. 6.6. Распределение чисел Стантона (St) вдоль поверхности пластины, рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 6

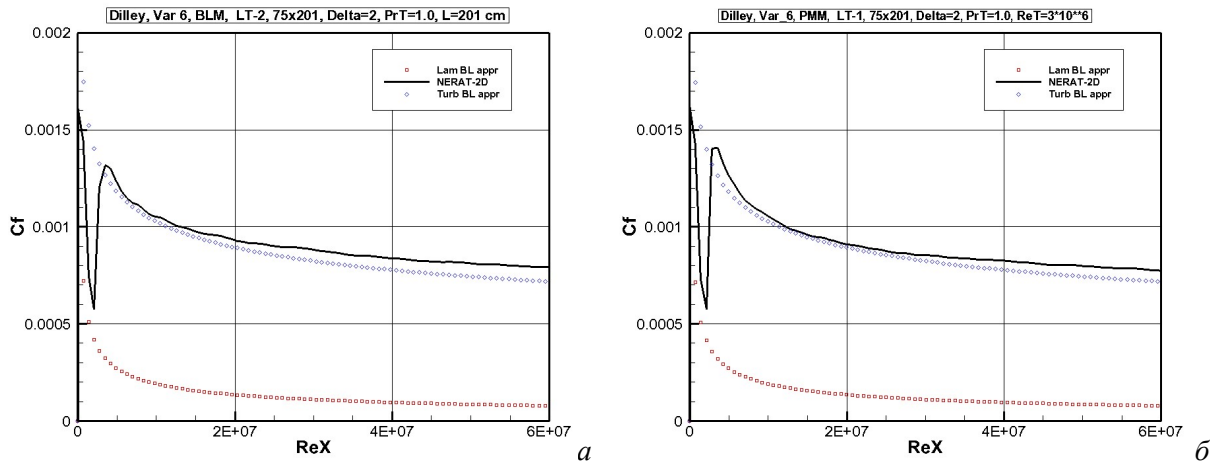


Рис. 6.7. Распределение коэффициента поверхностного трения (C_f), рассчитанное с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 6

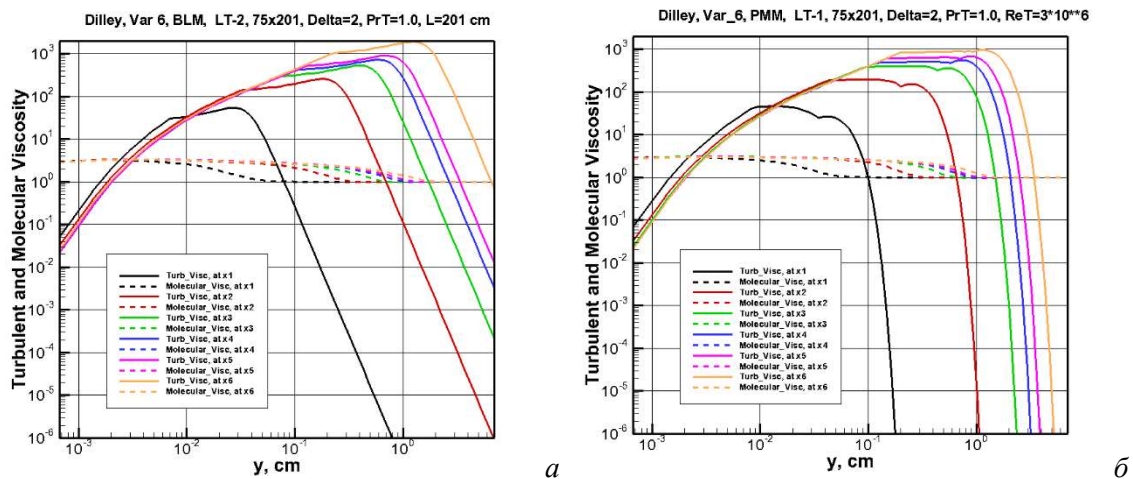


Рис. 6.8. Профили молекулярной (штриховые кривые) и турбулентной (сплошные кривые) вязкости в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 6

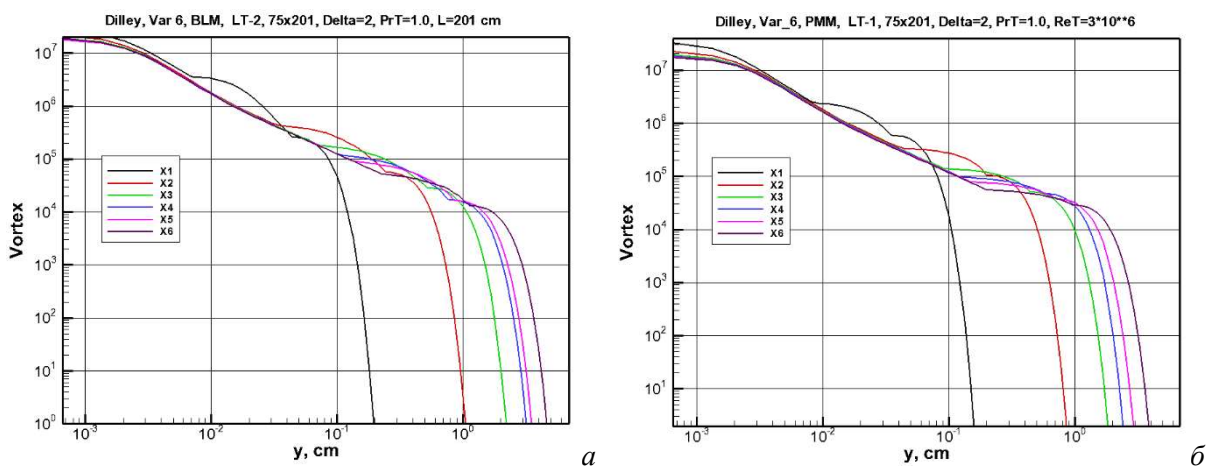


Рис. 6.9. Профили функции $\Omega = |\text{rot } \mathbf{V}|$ в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 6

Распределение продольной скорости в пограничном слое на рис. 6.10 и 6.11 демонстрируют хорошее разрешение классической структуры турбулентного пограничного слоя. Это же можно сказать о характерном распределении температуры на рис. 6.13.

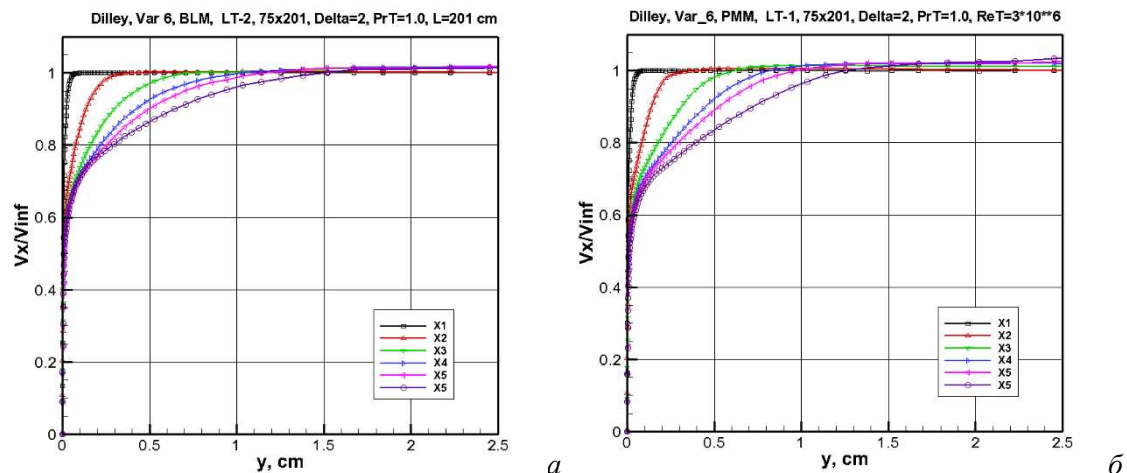


Рис. 6.10. Профили функции $V_x = u/V_{\infty}$ в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 6

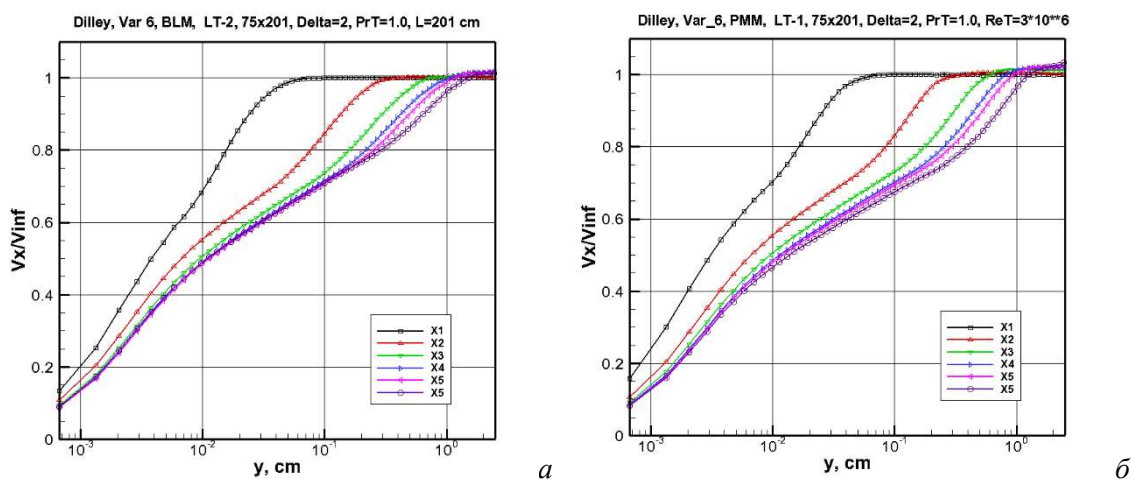


Рис. 6.11. Профили функции $\lg V_x = \lg(u/V_{\infty})$ в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 6

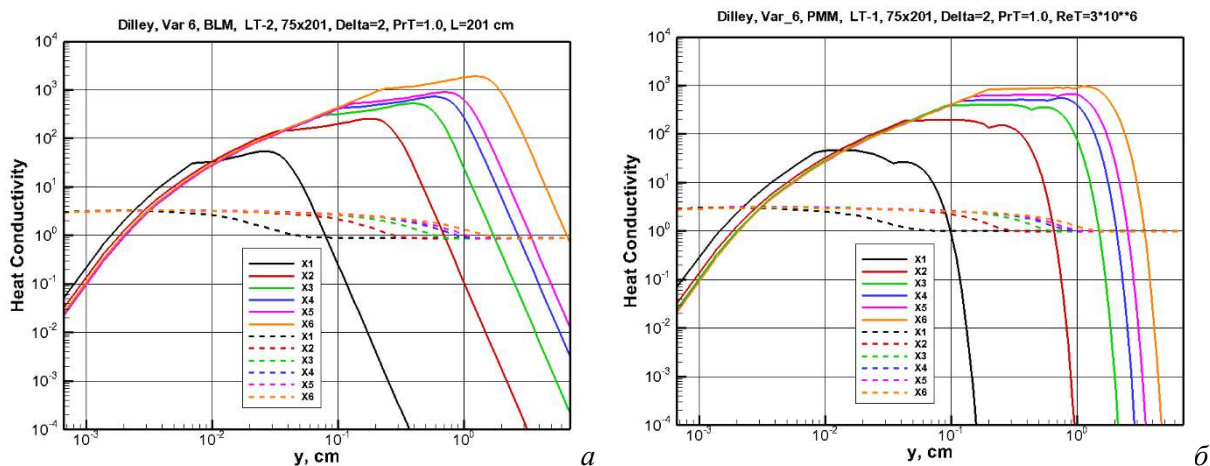


Рис. 6.12. Профили молекулярной (штриховые кривые) и турбулентной (сплошные кривые) теплопроводности в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 6

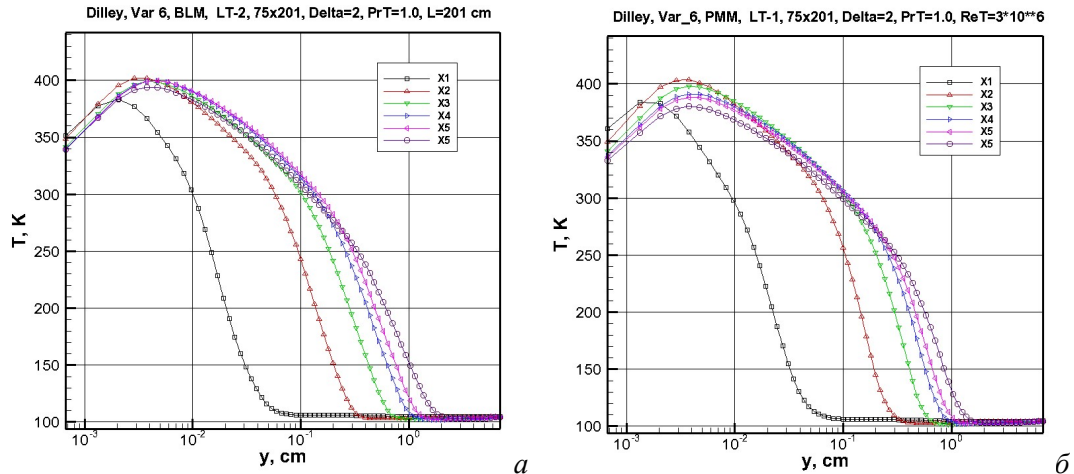


Рис. 6.13. Профили температуры в разных сечениях вдоль поверхности пластины, рассчитанные с использованием модели (а) BLM и (б) PMM для исходных данных варианта № 6

4. Заключение

С использованием модифицированной двухмерной RANS модели нагрева поверхности острой пластины, основанной на двух алгебраических моделях турбулентности, выполнен систематический численный анализ шести вариантов экспериментальных данных по сверхзвуковому обтеканию заостренной пластины. В расчетную модель введено экспоненциальное уменьшение функции вихря скорости по мере отхода от условий границы пограничного слоя, эффективное турбулентное число Прандтля и участок постепенного перехода от ламинарного к турбулентному течению. Выполнено сравнение интенсивности конвективного нагрева плоских поверхностей протяженностью $L = 40 \div 200$ см при $M \sim 6 \div 9$.

Дан анализ полей газодинамических функций вблизи лидирующей кромки пластины и в области ламинарно-турбулентного перехода. Показано, что в этой области наблюдается заметное возмущение поля давления. Введение пространственного диапазона, в котором происходит ламинарно-турбулентный переход, позволило снизить возмущения газодинамических функций при достижении критического числа Рейнольдса. Специальный выбор параметров расчета и топологии расчетных сеток позволили получить подробные распределения газодинамических функций по толщине пограничного слоя при разных температурных факторах обтекания.

Особый анализ расчетных данных уделен распределению газодинамических параметров на внешней границе турбулентного пограничного слоя, где вводится искусственная функция локализации турбулентного пограничного слоя вблизи поверхности.

Выполненный расчетный анализ двухмерной RANS-модели турбулентного нагрева острой пластины в сверхзвуковом потоке показал, что удовлетворительного описания экспериментальных данных даже для простейшего случая обтекания удалось достичь лишь при тщательном выборе расчетных параметров модели.

Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена по теме государственного задания РАН (№ гос. регистрации АААА-А20-120011690135-5).

Литература

1. James C. S. Observations of Turbulent-burst Geometry and Growth in Supersonic Flow. NASA TN-4235.1958. 85 p.
2. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир. 1986. 180 с.

3. Dilley A. D. Evaluation of CFD Turbulent Prediction Techniques and Comparison with Hypersonic Experimental Data. NASA/CR–2001–210837. 2001. 26 p
4. Суржиков С. Т. Турбулентный теплообмен на поверхности острой пластины при сверхзвуковом обтекании при $M=6 \div 8$ // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2019. Т.20, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-4/articles/890/>
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Главная редакция физико-математической литературы. 1974. 711 с.
6. Лунев В. В. Течение реальных газов с большими сверхзвуковыми скоростями. М.: Физматлит. 2007. 760 с.
7. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М. «Наука». Гл. ред. Физ-мат. лит. 1982. 312 с.
8. Гинзбург И. П. Теория сопротивления и теплопередачи. Л.: Изд-во Ленинградского университета. 1979. 375 с.
9. Землянский Б. А., Лунев В. В., Власов В. И. и др. Конвективный теплообмен летательных аппаратов. М.: Физматлит. 2014. 330 с.
10. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа. Новосибирск. СО АН СССР. 1962.
11. Baldwin B. S., Lomax H. Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows. AIAA Paper 78–0257. 1978.
12. Visbal M., Knight D. The Baldwin–Lomax Turbulence Model for Two-Dimensional Shock-Wave/Boundary-Layer Interaction // AIAA J. 1984. Vol. 22. No. 7. Pp. 921–928.
13. Tannehill J. C., Anderson D. A., Pletcher R. H. Computational Fluid Mechanics and Heat transfer. 1997. Taylor&Francis. 792 p.
14. Cebeci T., Bradshaw P. Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer. Springer–Verlag. 2012. 486 p.
15. Wilcox D. C. Turbulence modeling for CFD. DCW Industries, Inc. 2006. 515 p.
16. Shirazi S. A., Truman C. R. Comparison of Algebraic Turbulence Model for PNS Predictions of Supersonic Flow Past a Sphere-Cone. AIAA 87-0544. 1987.
17. Shang J. S., Scherr S. J. Navier–Stokes Solution for a Complete Re-Entry Configuration // J. Aircraft. 1986. Vol. 23. No. 12. Pp 881–888.
18. Bertram M. H., Cary Jr., A. M., Whitehead Jr. A. H. Experiments with Hypersonic Turbulent Boundary Layers on Flat Plate and Delta Wings. AGARD Specialists’ Meeting on Hypersonic Boundary Layers and Flow Fields. London. England. May 1968.
19. Bertram M. H., Neal Jr. L. Recent Experiments in Hypersonic Turbulent Boundary Layer. AGARD Specialists’ Meeting on Recent Developments in Boundary Layer Research. Italy, 1965.
20. Wallace J. E. Hypersonic Turbulent Boundary Layer Studies at Cold Wall Conditions. Proc/ of the 1967 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute. Stanford University Press. 1967. Pp. 427–451.

References

1. James C. S., Observations of Turbulent-burst Geometry and Growth in Supersonic Flow. NASA TN-4235.1958. 85 p.
2. Van-Dyke M., *An album of fluid motion*, M.: Mir, 1986, 180 p. [in Russian].
3. Dilley A. D., Evaluation of CFD Turbulent Prediction Techniques and Comparison with Hypersonic Experimental Data. NASA/CR–2001–210837. 2001. 26 p
4. Surzhikov S. T., Turbulent Heat Exchange on the Surface of a Sharp Plate at a Supersonic Flow at $M=6 \div 8$, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2019, vol. 20, iss. 4. [in Russian]. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.20.4.890>
5. Schlichting H., *Boundary-Layer Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2017, 805 p.

6. Lunev V. V., *Flow of real gases with large supersonic velocities*, M.: Fizmatlit, 2007, 760 p. [in Russian].
7. Lapin Yu. V., *Turbulent boundary layer in supersonic gas flows*, M.: «Nauka», Fizmatlit editorial board, 1982, 312 p. [in Russian].
8. Ginzburg I. P., *Theory of resistance and heat transfer*, L.: Izd-vo Leningradskogo universiteta, 1979, 375 p. [in Russian].
9. Zemljanskij B. A., Lunev V. V., Vlasov V. I., *Convective heat transfer of aircrafts*, M.: Fizmatlit, 2014, 330 p.
10. Kutateladze S. S., Leontiev A. I., *Turbulent boundary layer of compressible gas*, Novosibirsk, SO AN SSSR, 1962. [in Russian].
11. Baldwin B. S., Lomax H., *Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows*, AIAA Paper 78-0257. <https://doi.org/10.2514/6.1978-257>
12. Visbal M., Knight D., *The Baldwin – Lomax Turbulence Model for Two-Dimensional Shock-Wave/ Boundary – Layer Interaction*, *AIAA Journal*, 1984, vol. 22, no. 7, pp. 921–928. <https://doi.org/10.2514/3.48528>
13. Tannehill J. C., Anderson D. A., Pletcher R. H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Taylor&Francis, 1997, 792 p.
14. Cebeci T., Bradshaw P., *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer*, Springer-Verlag, 2012, 486 p.
15. Wilcox D. C., *Turbulence modeling for CFD*, DCW Industries, Inc., 2006, 515 p.
16. Shirazi S. A., Truman C. R., *Comparison of Algebraic Turbulence Model for PNS Predictions of Supersonic Flow Past a Sphere-Cone*. AIAA Paper 87-0544. <https://doi.org/10.2514/6.1987-544>
17. Shang J. S., Scherr S. J., *Navier – Stokes Solution for a Complete Re-Entry Configuration*, *J. Aircraft*, 1986, vol. 23, no. 12, pp 881–888.
18. Bertram M. H., Cary Jr., A. M., Whitehead Jr. A. H., *Experiments with Hypersonic Turbulent Boundary Layers on Flat Plate and Delta Wings*, AGARD Specialists' Meeting on Hypersonic Boundary Layers and Flow Fields. London. England. May 1968.
19. Bertram M. H., Neal Jr. L., *Recent Experiments in Hypersonic Turbulent Boundary Layer*. AGARD Specialists' Meeting on Recent Developments in Boundary Layer Research. Italy, 1965.
20. Wallace J. E., *Hypersonic Turbulent Boundary Layer Studies at Cold Wall Conditions*, Proc/ of the 1967 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press, 1967, pp. 427–451.

Статья поступила в редакцию 30 мая 2023 г.