

Construction of Tetrahedral Mesh for Modeling of the Flow around a Triangular Wing

I. A. Shirokov^{1,2}

¹*Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
Moscow, 119991, Russia*

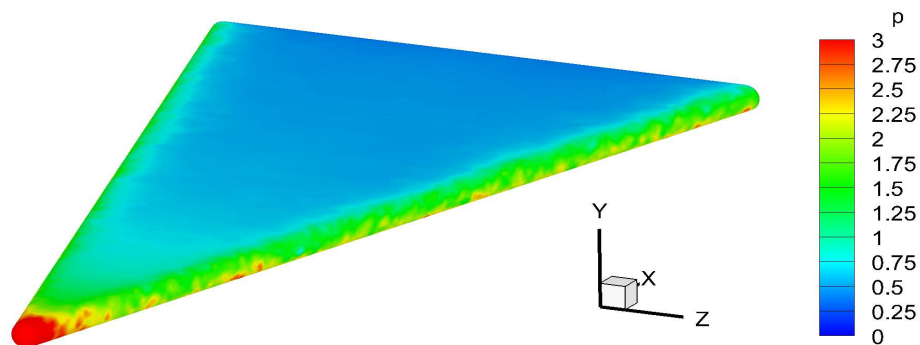
²*Keldysh Institute of Applied Mathematics,
Moscow, 125047, Russia*

ivanshirokov@inbox.ru

Abstract

An original algorithm for mesh construction on the surface of the model of a triangular wing is proposed. Generation of the tetrahedral mesh around the model is based on the surface mesh using the TetGen software. As an example of using the constructed mesh, a numerical simulation of the supersonic viscous gas flow around the model with realistic values of the Mach and Reynolds numbers is performed. The simulation is based on a system of quasi-gasdynamics equations. The results obtained show good agreement with experimental and calculated data from the literature.

Keywords: triangular wing, tetrahedral mesh, mesh generators, quasi-gasdynamics algorithm.



QGD-based modeling of the supersonic flow around the model: surface pressure

УДК 519.6.533. 5

Построение тетраэдральной расчетной сетки для моделирования обтекания треугольного крыла

И.А. Широков^{1,2}

¹ *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМК, Россия, Москва, 119991, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52*

² *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия, Москва, 125047, Миусская пл. 4а*

ivanshirokov@inbox.ru

Аннотация

Предложен оригинальный алгоритм построения расчетной сетки на поверхности модели треугольного крыла. Построение тетраэдральной расчетной сетки в пространстве вокруг модели производится на основе поверхностной сетки с помощью сеточного генератора TetGen. В качестве примера использования построенной сетки проведено численное моделирование внешнего сверхзвукового обтекания модели потоком вязкого газа при реалистичных значениях чисел Маха и Рейнольдса. Моделирование проводится на основе системы квазигазодинамических уравнений. Полученные результаты показывают хорошее согласие с экспериментальными и расчетными данными из литературы.

Ключевые слова: треугольное крыло, тетраэдральная сетка, сеточные генераторы, квазигазодинамический алгоритм.

1. Введение

Качество численного моделирования обтекания реальных летательных аппаратов, помимо характеристик разностного алгоритма, в большой мере определяется качеством используемой пространственной сетки. При этом качество сетки зависит не только от количества и размера ячеек, но и от их формы. Если некоторые ячейки тетраэдральной сетки заметно отличаются по форме от правильных тетраэдров, то аппроксимация уравнений на таких ячейках производится недостаточно хорошо, что может привести к потере устойчивости численного алгоритма. Таким образом, задача построения «хороших» пространственных сеток приобретает первостепенное значение. Обзоры некоторых методов построения расчетных сеток и программного обеспечения для их реализации приведены в [1, 2]. Влияние качества сеток на разрешение фронта ударной волны при внешнем обтекании затупленного тела исследовано в [3].

В данной работе предлагается алгоритм построения тетраэдральной расчетной сетки вокруг модели в форме треугольного крыла с затупленной цилиндрической передней кромкой, причем акцент сделан на построении относительно «хороших» тетраэдральных ячеек вблизи поверхности модели. Геометрия модели описана в [4, 5]. Модель имеет форму пластины в форме равнобедренного треугольника с углом между боковыми сторонами 2γ , $\gamma = 15^\circ$ (т.е. угол стреловидности передней кромки $90^\circ - \gamma = 75^\circ$). Толщина модели $2R = 16$ мм, радиус закругления передних кромок и носка $R = 8$ мм. Длина модели $L = 0.57$ м (рис. 1).

Отметим, что предложенный алгоритм можно использовать при различных значениях указанных параметров, но угол стреловидности должен быть больше 45° . Все линейные размеры ниже будем указывать в метрах. Используем декартову систему координат, в которой

плоскости $y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостями симметрии модели, причем модель занимает область между $x = 0$ и $x = L$.

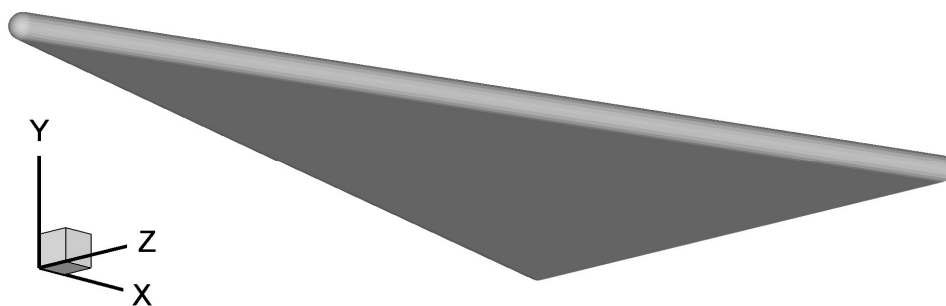


Рис. 1. Общий вид модели

На первом этапе строится поверхностная сетка. Целью настоящей работы является разработка алгоритма, позволяющего строить приблизительно равномерную сетку на всей поверхности модели. Для этого поверхность модели покрывается многоугольниками, по форме близкими к квадратам. Многоугольники, которые находятся вблизи друг друга, имеют примерно одинаковый размер. Другими словами, размер многоугольников плавно меняется вдоль поверхности. На втором этапе на основе поверхностной сетки с помощью генератора TetGen [6] строится нерегулярная тетраэдральная расчетная сетка в пространстве вокруг модели.

2. Построение поверхностной сетки

Поверхностная сетка состоит из точек и плоских ячеек (в терминологии TetGen это points и facets соответственно). Каждая точка имеет уникальный номер и декартовы координаты x, y, z . Все точки поверхностной сетки лежат на поверхности модели. Ячейка представляет собой многоугольник, углами которого являются точки сетки. Для определения ячейки требуется перечислить номера точек, которые будут являться её углами. При этом необходимо перечислить их по порядку следования, при обходе ячейки по часовой стрелке или против (направление обхода может быть свое в каждой ячейке).

Таким образом, построение сетки сводится к двум задачам: 1) задать координаты точек сетки, 2) перечислить номера точек, составляющих каждую ячейку. TetGen накладывает естественные ограничения на точки и ячейки поверхностной сетки: 1) каждая точка должна принадлежать какой-либо ячейке, 2) ячейки не должны пересекаться, 3) ячейки должны образовывать поверхность, топологически эквивалентную сфере («дырки» на поверхности не допускаются). Из этих требований вытекает не совсем очевидное условие: если три соседние точки попадают на одну прямую (две «крайние» и одна «средняя»), то при построении ячейки, содержащей две «крайние» точки, обязательно надо включить в ячейку и «среднюю» точку. Иначе получится либо пересечение с соседними ячейками (содержащими «среднюю точку»), либо «дырка» между ячейками. Это происходит из-за неизбежных ошибок округления при вычислениях координат точек (другими словами, невозможно гарантировать точное расположение трех точек на одной прямой).

Большая часть ячеек являются четырехугольниками (большинство из них квадраты). Иногда встречаются треугольники, пяти- и шестиугольники. Некоторые ячейки по форме четырехугольники, но на одной из сторон лежат три точки, и при определении этих ячеек указаны пять точек.

Условно разделим поверхность модели на несколько областей (рис. 2, 3): носовое закругление ($x < R$), верхняя ($y = R$) и нижняя ($y = -R$) плоские поверхности, область сопряжения $R < x < x_4$, боковые закругления ($x_4 \leq x \leq L$) и плоская хвостовая поверхность ($x = L$). Значение x_4 определено ниже.

На рис. 2 изображена модель целиком, на рис. 3 показан фрагмент носовой части в увеличенном масштабе. В качестве параметра, задающего размер сетки (количество точек и ячеек), введем общий шаг *Step*.

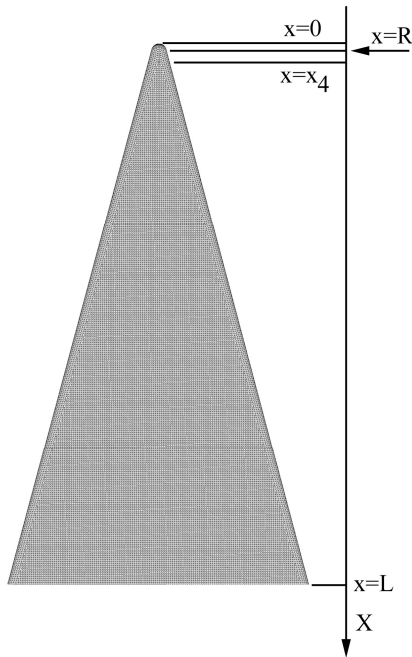


Рис. 2

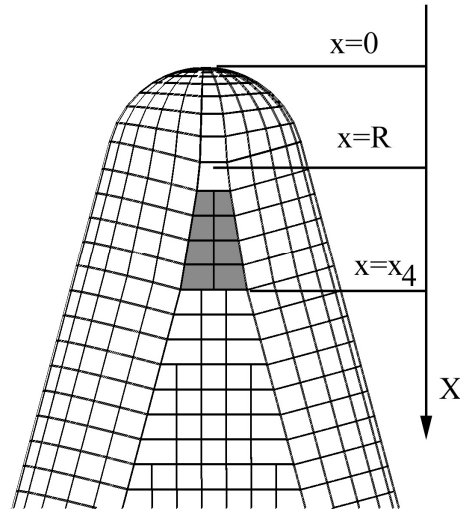


Рис. 3

Величина *Step* является внешним параметром, задаваемом в конфигурационном файле перед запуском программы построения сетки. Однако, для точного соблюдения заданной длины модели *L*, значение *Step* подвергается незначительной модификации

$$N_x = \frac{LL - R}{Step}, \quad (1)$$

$$Step = \frac{LL - R}{N_x} \quad (2)$$

В формуле (1) происходит округление и вычисление целого N_x . После этого по формуле (2) вычисляется новое значение *Step*, которое используется в дальнейшем. Если выполнено естественное условие $Step \ll L$, то модификация значения *Step* незначительна.

Боковые закругления составим из полуэллипсов (близких к полуокружностям) на расстоянии *Step* друг от друга вдоль оси *X* (рис. 4).

Полуэллипсы должны образовывать нужный радиус закругления *R* и плавно сопрягаться с хвостовой поверхностью. На каждом полуэллипсе будут равномерно располагаться точки сетки с координатами x_{kl}, y_{kl}, z_{kl} . Индекс *l* отмечает точки на полуэллипсе, индекс *k* определяет начальное сечение x_{k0} для каждого полуэллипса

$$x_{k0} = x_4 + k \cdot Step \quad (3)$$

Индекс *l* меняется от 0 до $N_R - 1$. Число этих точек на полуэллипсе N_R определим из условия близости расстояния между ними к величине *Step*: $N_R = \pi R / Step$. Координаты точек сетки на каждом полуэллипсе будем определять согласно следующим формулам:

$$x_{kl} = x_{k0} - \frac{\sin(\varphi(x_{k0}))}{\cos(\gamma - \varphi(x_{k0}))} R \sin\left(\frac{\pi l}{N_R - 1}\right), \quad (4)$$

$$y_{kl} = -R \cos\left(\frac{\pi l}{N_R - 1}\right), \quad (5)$$

$$z_{kl} = (x_{k0} - R) \operatorname{tg} \gamma + \frac{\cos(\varphi(x_{k0}))}{\cos(\gamma - \varphi(x_{k0}))} R \sin\left(\frac{\pi l}{N_R - 1}\right) \quad (6)$$

Боковое закругление, определяемое этими формулами, и плоская поверхность $y = R$ и имеют общую границу $z = (x - R) \operatorname{tg} \gamma$. Максимальное значение x_{k0} равно L , что соответствует задней поверхности модели. Угол $\varphi(x_{k0})$ является углом между плоскостью текущего полуэллипса и плоскостью YZ . Он линейно зависит от x_{k0} в диапазоне от γ до 0 в направлении от носовой части модели к хвостовой

$$\varphi(x_{k0}) = \frac{\gamma(L - x_{k0})}{L - x_4} \quad (7)$$

Таким образом, на задней поверхности модели ($x_{k0} = L$) угол $\varphi(x_{k0}) = 0$, и крайние полуэллипсы целиком лежат на плоскости $x = L$. Модификация значения $Step$ по формулам (1) и (2) гарантирует, что максимальное значение x_{k0} будет равно L .

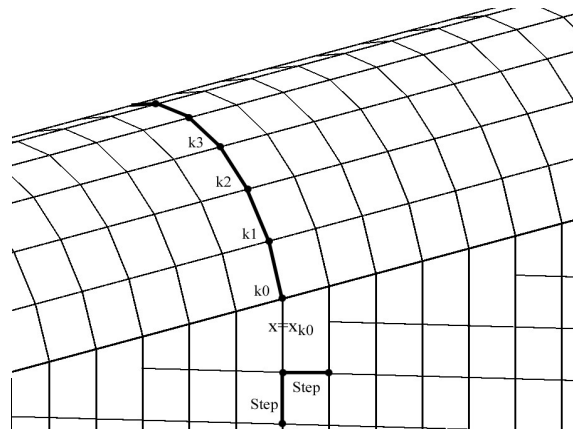


Рис. 4. Фрагмент бокового закругления

Носовое закругление ($x < R$) строится также посредством фрагментов эллипсов (отмечаются индексом k), но при этом требуется, чтобы эти фрагменты лежали на сфере радиуса R и с центром в точке $(R, 0, 0)$. (рис. 5).

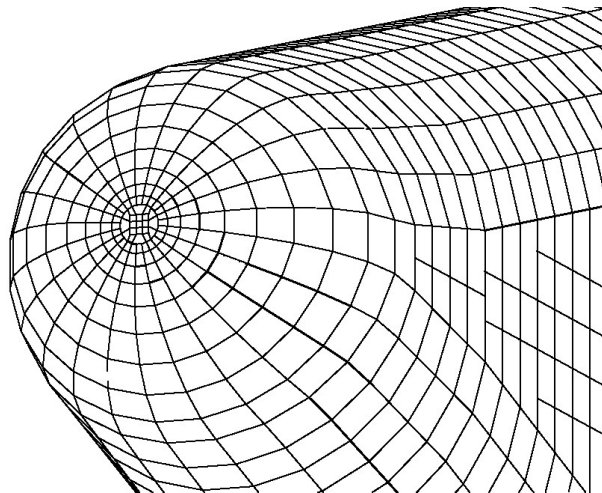


Рис. 5. Носовое закругление

Для этой цели введем дополнительные параметры $x_{k0}, r_{yk}, r_{zk}, L_k, \varphi_k$ в зависимости от индекса k .

Для $k = 0$

$$\varphi_k = \gamma, \quad SS_k = 0, \quad S = \frac{\pi R}{2 \left(N_R - 1 + \frac{1}{2 \cos \gamma} \right)}, \quad R_2 = R - \frac{S}{2 \cos \gamma},$$

$$x_{0k} = R - \frac{S}{2} \cdot \operatorname{tg} \gamma, \quad r_{yk} = R, \quad r_{zk} = R_2, \quad L_k = \frac{S}{2}$$

Для $k > 0$

$$\varphi_k = \frac{\gamma(R - SS_{k-1})}{R}, \quad R_2 = SS_{k-1} \left[-\sin \varphi_k + \left(\frac{R^2}{SS_{k-1}^2} - \cos^2 \varphi_k \right)^{1/2} \right],$$

$$S = \frac{\pi R_2}{2 \left(N_R - 1 + \frac{1}{2 \cos \varphi_k} \right)},$$

$$x_{k0} = R - SS_{k-1} - \frac{S}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad r_{yk} = \left[R^2 - (R - x_k)^2 \right]^{1/2}, \quad r_{zk} = R_2 - \frac{S}{2 \cos \varphi_k},$$

$$L_k = \frac{S}{2}, \quad SS_k = SS_{k-1} + \frac{S r_{yk}}{R}$$

Определив для каждого k величины $x_{k0}, r_{yk}, r_{zk}, L_k, \varphi_k$, построим точки носового закругления, лежащие на каждом полуэллипсе (то есть определим их координаты x_{kl}, y_{kl}, z_{kl} для всех нужных значений индексов)

$$x_{kl} = x_{k0} - \sin \varphi_k \left[-(R_b - r_{zk}) + R_b \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_b}{2} + \frac{\varphi_b l}{N_R - 1} \right) \right],$$

$$y_{kl} = -R_b \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_b}{2} + \frac{\varphi_b l}{N_R - 1} \right),$$

$$z_{kl} = L_k + \cos \varphi_k \left[-(R_b - r_{zk}) + R_b \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_b}{2} + \frac{\varphi_b l}{N_R - 1} \right) \right],$$

где

$$R_b = \frac{r_{yk}^2}{2r_{zk}} + \frac{r_{zk}}{2}, \quad \varphi_b = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{r_{yk}}{R_b - r_{zk}} \right)$$

Индекс l меняется от 0 до $N_R - 1$. Индекс k меняется от 0 до $0.9N_R - 1$. Построение сетки при $x \rightarrow 0$ требует особого алгоритма (рис. 6). Схема этого алгоритма основана на построении участка квадратной сетки вблизи $x = 0$ (точнее, $x = x_{kl}$ при $k = 0.9N_R - 1$, отмечен светло-серой заливкой на рис. 6) и дополнительных ячеек, сопрягающих границу этой квадратной сетки и круглую границу сетки носового закругления при $k = 0.9N_R - 1$ (отмечены темно-серой заливкой). Построение этих сопрягающих ячеек происходит путем перебора граничных точек квадратной сетки и выбора точки на круглой границе, ближайшей к текущей граничной точке квадратной сетки.

При $R < x < x_4$ строится сопряжение носового и бокового закругления. Этот фрагмент поверхности требует отдельного рассмотрения (см. рис. 3). Плоские фрагменты (при $y = R$ и

$y = -R$) делятся на четырехугольные ячейки (отмечены серой заливкой на рис. 3), расположенные симметрично относительно плоскости $z = 0$. Боковые закругления при $R < x < x_4$ строятся методом, аналогичным (4)–(6), но вместо линейной зависимости угла (7) берется постоянный угол $\varphi = \gamma$.

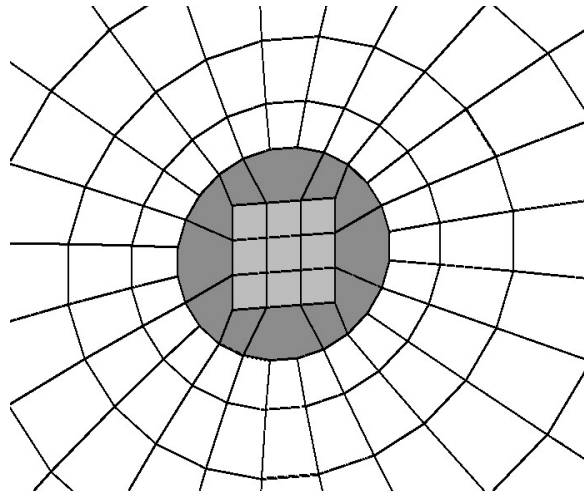


Рис. 6. Построение сетки носового закругления вблизи $x = 0$

Рассмотрим плоские фрагменты поверхности модели при $x_4 \leq x \leq L$: верхняя при $y = -R$, нижняя при $y = R$. Они покрываются квадратной сеткой, со стороной $Step$. Отметим, что x_4 определяется из условия, что между границами боковых закруглений $z = (x - R) \operatorname{tg} \gamma$ и $z = -(x - R) \operatorname{tg} \gamma$ при $x = x_4$ поместятся три ячейки этой квадратной сетки. Построение квадратной сетки не представляет трудностей (фрагменты этой сетки изображены на рис. 3–5). Сложность возникает при сопряжении квадратной сетки и сетки на боковых закруглениях. Решим этот вопрос следующим образом.

Пусть $y = R$. При фиксированном k построим точки квадратной сетки, расположенные при $z > 0$: $x = x_{k0}$ (1), $z = z_{kl} = (0.5 + l) \cdot Step$. При этом l возрастает от $l = 0$, пока выполнено условие $z_{kl} < z_{\text{lim}} - 0.5 \cdot Step - Step$, где $z_{\text{lim}} = (x_{k0} - R) \operatorname{tg} \gamma$ (т.е., пока точка с координатами x_{k0}, z_{kl} не приблизится к боковому закруглению). Обозначим максимальное значение l за l_{max} . При построении ячеек сетки надо рассмотреть два варианта сопряжения с боковыми закруглениями: 1) l_{max} при k и $k + 1$ одинаково. Тогда строится четырехугольная четырехточечная сопрягающая ячейка (рис. 7). 2) l_{max} при $k + 1$ превосходит таковое при k на единицу. Тогда строим четырехугольную пятиточечную сопрягающую ячейку (рис. 8).

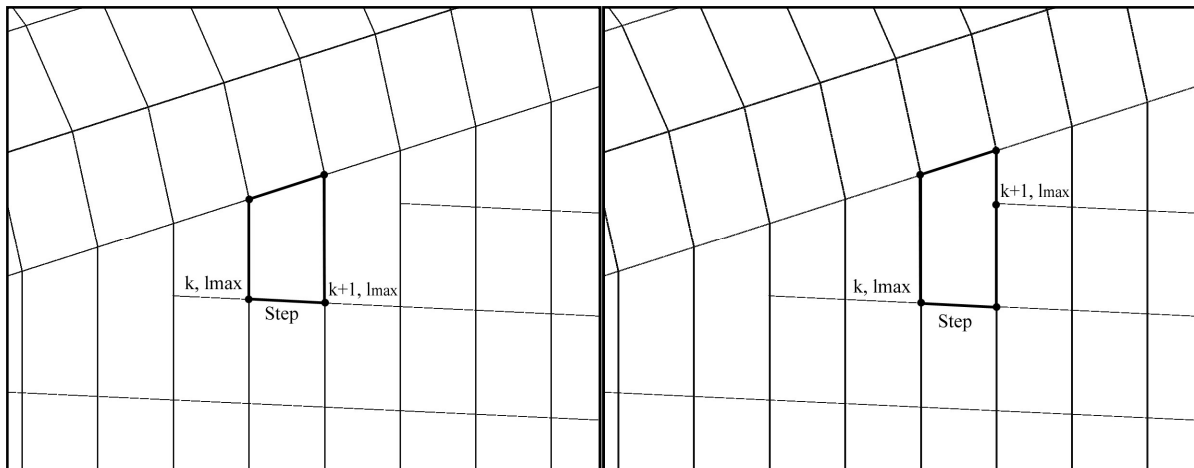


Рис. 7

Рис. 8

Случай, когда l_{\max} при $k+1$ превосходит l_{\max} при k на величину, большую единицы (тогда требовалась бы шеститочечная сопрягающая ячейка), невозможен для треугольной модели с углом стреловидности более 45° , поэтому этот случай не рассматриваем.

В силу симметрии модели, построение квадратной сетки на плоской поверхности и сопряжение ее с боковыми закруглениями для $z < 0$, $y = R$, а также при $y = -R$ проводим аналогично с необходимыми заменами знаков и индексов.

Наконец, рассмотрим плоскую заднюю поверхность модели: $x = L$ (рис. 9). На ней построим прямоугольную сетку. Шаг по оси Z равен $Step$, шаг вдоль оси Y вычисляется как $dy = 2R/(N_y + 1)$, где $N_y = 2R/Step - 1$ – число точек вдоль оси Y . Отметим, что величина dy близка к $Step$. При $z > 0$ координаты точек прямоугольной сетки на задней поверхности вычисляются как $y_j = -R + (j+1)dy$, $z_k = (0.5 + k) \cdot Step$. Таким образом, z -координаты точек на задней поверхности равны z -координатам точек на боковых поверхностях, и сопряжение прямоугольной сетки на задней поверхности ($x = L$) и квадратной сетки на боковых поверхностях ($y = R$, $y = -R$) не представляет трудностей.

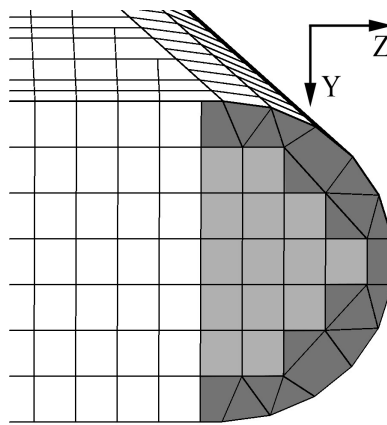


Рис. 9. Фрагмент сетки на задней поверхности модели и ее сопряжение с боковым закруглением

Сопряжение сетки на задней поверхности и на боковых закруглениях при $x = L$ требует отдельного рассмотрения и происходит способом, аналогичным построению сетки на носовом закруглении (см. рис. 6). При этом строится дополнительный участок прямоугольной сетки (отмечен на рис. 9 светло-серой заливкой) и сопрягающие ячейки (отмечены темно-серой заливкой). Построение сетки для $z < 0$ проводим аналогично с необходимыми заменами знаков и индексов.

Поверхностная сетка реализуется в виде файла `.poly`. Его формат описан в мануале TetGen. Файл содержит две части: в первой перечислены точки (points) и указанием их номера и декартовых координат, во второй части указаны плоские ячейки (facets), то есть для каждой ячейки перечислены номера точек, ее составляющих. Для сетки, построенной в качестве примера в настоящей работе, значение параметра шага $Step = 0.002$. При этом на поверхности модели располагаются 49526 точек.

3. Построение пространственной сетки

На основе построенной сетки на поверхности модели в формате файла `.poly` программа TetGen строит вокруг модели тетраэдральную пространственную сетку. Необходимо также задать в файле `.poly` поверхностную сетку на внешней границе расчетной области. Внешняя граница имеет форму усеченного конуса и целиком охватывает модель треугольного крыла. Общий вид расчетной области показан на рис. 10. Поверхностная сетка на внешней границе строится в целом аналогично сетке на поверхности модели (используются четырехугольные и треугольные ячейки).

Команда построения пространственной сетки выглядит так:

```
tetgen.exe -pq1.4/17a0.00007Y model5_1.poly
```

Спецификации вызова TetGen описаны в мануале [6, с. 31]. Отметим, что величина 1.4 означает предел отношения радиуса сферы, описанной около тетраэдральной ячейки, к длине ее самого короткого ребра (radius-edge ratio). Величина 17 определяет минимальный двугранный угол между сторонами тетраэдра (dihedral angle) в градусах [6, с. 39]. Величина 0.00007 указывает максимальный объем тетраэдральной ячейки [6, с. 41]. Спецификация Y указывает на сохранение поверхностной сетки, указанной в файле .poly, при построении пространственной сетки [6, с. 37]. Таким образом, построенная ранее поверхностная сетка подвергается триангуляции, то есть поверхностные ячейки, включающие более трех точек, делятся на треугольники дополнительными отрезками. При этом поверхностные треугольные ячейки получаются достаточно «хорошие», т.е. их углы не становятся слишком малы.

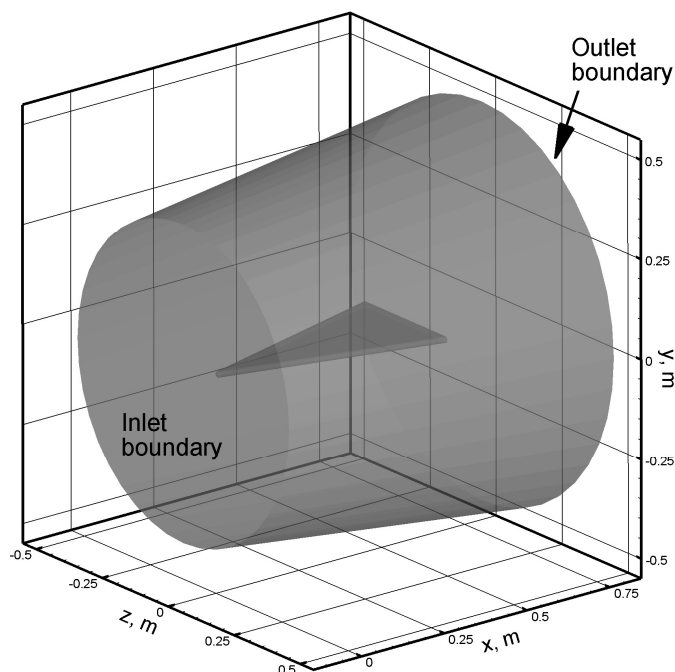


Рис. 10. Общий вид расчетной области и модели

На рис. 11–12 приведены фрагменты построенной расчетной сетки.

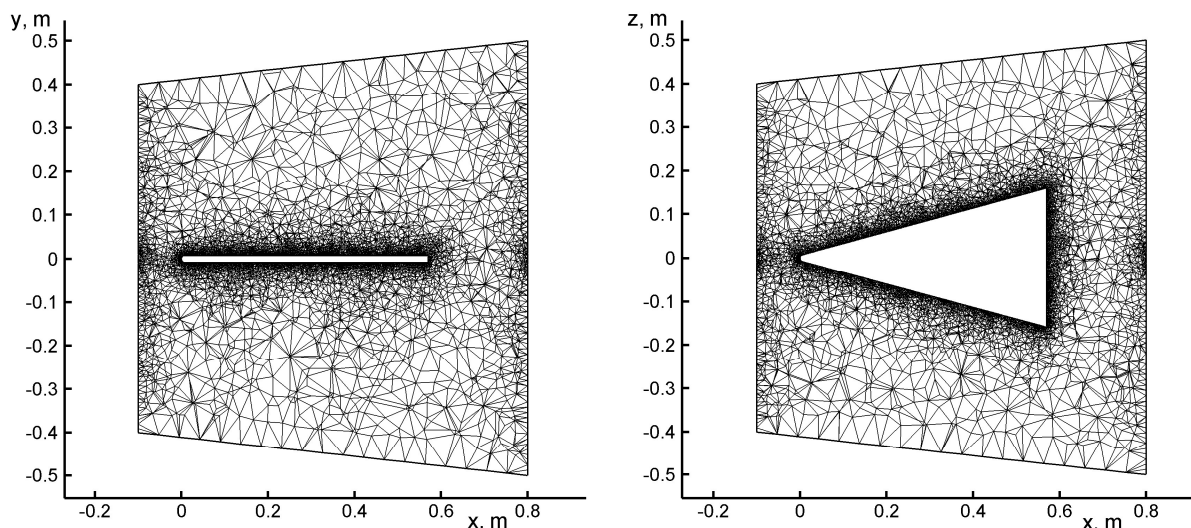


Рис. 11. Пространственная расчетная сетка в сечениях $z=0$ (слева) и $y=0$ (справа)

Параметры пространственной сетки следующие: общее число точек 166729, число тетраэдральных ячеек 865756, число точек на поверхности модели 49526, число треугольных ячеек на поверхности модели 99048. Хотя эта сетка является весьма грубой, она позволяет провести численное моделирование обтекания модели при достаточно реалистичных значениях чисел Маха и Рейнольдса.

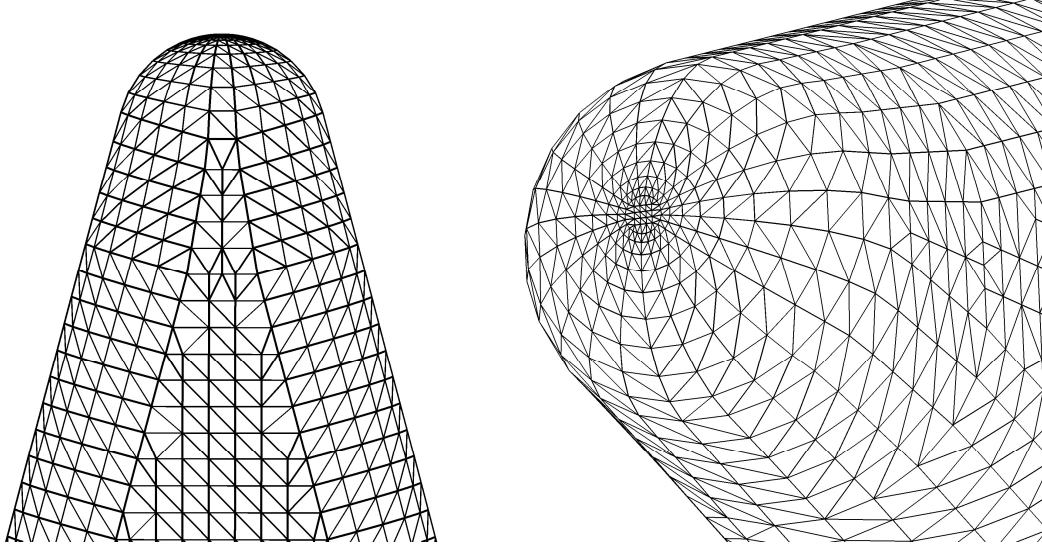


Рис. 12. Фрагменты расчетной сетки на поверхности модели после триангуляции

4. Алгоритм численного моделирования

Для иллюстрации использования построенной сетки приведем пример расчета обтекания модели при $M = 6$, $Re = 10^6$ (число Маха и число Рейнольдса определяются через параметры набегающего потока и характерный размер 1 м), угол атаки $\alpha = 10^\circ$. Набегающий поток направлен в сторону положительных значений x , векторы скорости набегающего потока параллельны плоскости $z = 0$. Моделирование проводилось на основе системы квазигидродинамических (КГД) уравнений для идеального политропного газа [7–10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i j_m^i &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho u^j + \nabla_i (j_m^i u^j) + \nabla^j p &= \nabla_i \Pi^{ij}, \\ \frac{\partial}{\partial t} E + \nabla_i (j_m^i H) + \nabla_i q^i &= \nabla_i (\Pi^{ij} u_j), \\ E &= \frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1}, \quad H = \frac{E + p}{\rho} \end{aligned}$$

Рассматривается газ со следующими параметрами: ρ – плотность; u^i – компоненты макроскопической скорости; $p = \rho RT$ – давление; T – температура; E – полная энергия единицы объема; H – полная удельная энтальпия; показатель адиабаты $\gamma = 1.4$. Выражения для вектора плотности потока массы j_m^i , тензора вязких напряжений Π^{ij} и теплового потока q^i записываются как

$$j_m^i = \rho(u^i - w^i), \quad w^i = \frac{\tau}{\rho} (\nabla_j \rho u^i u^j + \nabla^i p),$$

$$\begin{aligned} \Pi^{ij} &= \Pi_{NS}^{ij} + \tau u^i \rho \left(u_k \nabla^k u^j + \frac{1}{\rho} \nabla_j p \right) + \tau \delta^{ij} \left(u_k \nabla^k p + \gamma p \nabla^k u_k \right), \\ \Pi_{NS}^{ij} &= \mu \left(\nabla^i u^j + \nabla^j u^i - \frac{2}{3} \nabla^k u_k \right) + \zeta \delta^{ij} \nabla^k u_k, \\ q^i &= q_{NS}^i - \tau u^i \rho \left(u_j \nabla^j \varepsilon + p u_j \nabla^j \frac{1}{\rho} \right), \quad q_{NS}^i = -\kappa \nabla^i T \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon = p/\rho(\gamma-1)$ – внутренняя энергия единицы массы газа; Π_{NS}^{ij} и q_{NS}^i – тензор вязких напряжений и тепловой поток в системе НС; μ, ζ, κ – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости и теплопроводности соответственно. Коэффициент сдвиговой вязкости μ вычисляется через температурную зависимость

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\omega,$$

где μ_0 – вязкость газа при температуре набегающего потока T_0 ; $\omega = 0.74$ – показатель межмолекулярного взаимодействия. Число Рейнольдса и число Маха $Re = \rho_0 U_0 \cdot 1m/\mu_0$, $M = U_0/c_0$.

Коэффициент теплопроводности вычисляется как $\kappa = \mu/Pr(\gamma-1)$; число Прандтля $Pr = 0.737$. Коэффициент τ , определяющий дополнительную диссипацию в КГД алгоритме, определяется как

$$\tau = \frac{\mu}{\rho Sc} + \frac{\alpha h}{c}, \quad (8)$$

где первое слагаемое связывается с коэффициентом сдвиговой вязкости и имеет порядок характерного времени между столкновениями частиц газа, второе слагаемое обеспечивает дополнительную искусственную вязкость для обеспечения устойчивости КГД алгоритма при моделировании сверхзвуковых течений плотных газов. Величина искусственной добавки определяется настроечным параметром α (в настоящей работе $\alpha = 0.5$), при этом h – характерный размер пространственной ячейки; $c = \sqrt{T}$ – локальная скорость звука; $Sc = 0.799$ – число Шмидта.

Коэффициент объемной вязкости также представляется в виде двух слагаемых, первое из которых является аппроксимационной формулой, а второе вводит дополнительную искусственную вязкость, также для увеличения устойчивости алгоритма в сверхзвуковых областях

$$\zeta = \mu \left(\frac{5}{3} - \gamma \right) + \delta \frac{h}{c} p \quad (9)$$

Величина регуляризирующей добавки здесь так же, как в (8), определяется локальными параметрами и зависит от настроечного параметра δ . При вычислении δ использовалось следующая зависимость от локального числа Маха: при $M \leq 2$ $\delta = 9$; при $M \geq 3$ $\delta = 12$, в промежутке между указанными значениями числа Маха коэффициент δ линейно возрастает с числом Маха.

Методика численного моделирования описана в [10–12]. Для расчетов на нерегулярной тетраэдральной сетке применялся доработанный программный комплекс [13], позволяющий проводить расчеты нестационарных вязких газодинамических течений для тел произвольной формы. Газодинамические параметры (плотность, скорость, давление, температура, энергия) приводятся к безразмерному виду. В качестве размерных параметров выбраны характерная длина 1 м, плотность и скорость звука в набегающем потоке. При этом уравнение состояния в безразмерных переменных приобретает вид $p = \rho T/\gamma$, скорость звука $c = \sqrt{T}$.

Значения газодинамических параметров определяются в узлах сетки. Значения газодинамических переменных в точках расчетной области, расположенных между узлами сетки, определяются как среднее арифметическое значений в узлах. Конечно-разностная аппроксимация макроскопических КГД уравнений строится методом контрольных объемов. Баричесентрический контрольный объем строится вокруг каждого узла сетки. Поскольку диссипативные коэффициенты зависят от локальных параметров, на тетраэдральной сетке алгоритм имеет первый порядок аппроксимации по пространству.

В начальный момент на входной границе задаются параметры набегающего потока, внутри расчетной области задаются такие же параметры, кроме скорости: газ в начальный момент неподвижен. На входной границе значения набегающего потока поддерживаются постоянными. На выходной границе ставятся условия сноса, позволяющие газу свободно покидать область. На твердой границе модели ставятся условия прилипания (вектор скорости равен нулю), при этом используется дополнительное граничное условие КГД алгоритма: нормальная производная давления равна нулю. Условия на твердой границе модели считаются адиабатическими.

Решение начально-краевой задачи для сеточных аналогов КГД уравнений находится по явной по времени конечно-разностной схеме, имеющий первый порядок аппроксимации по времени. Шаг по времени вычисляется как $h_t = \beta_c h / c$, где $\beta_c = 0.01$ – число Куранта; h и c – те же локальные параметры, что в (8)–(9). Расчёты проводились на многопроцессорном вычислительном комплексе К-100 [14], при этом использовалось распараллеливание вычислений, основанное на декомпозиции расчетной области с применением стандарта передачи сообщений MPI и библиотеки METIS. Одновременно использовались 128 процессорных ядер. Было сделано около 2×10^7 итераций явной схемы, что потребовало около 4.5 суток машинного времени.

5. Результаты численного моделирования

На рис. 13 изображено распределение давления по поверхности модели. Заметны область повышенного давления на носовой части модели, а также повышенные на наветренной и пониженные на подветренной стороне значения давления, что приводит к появлению подъемной силы.

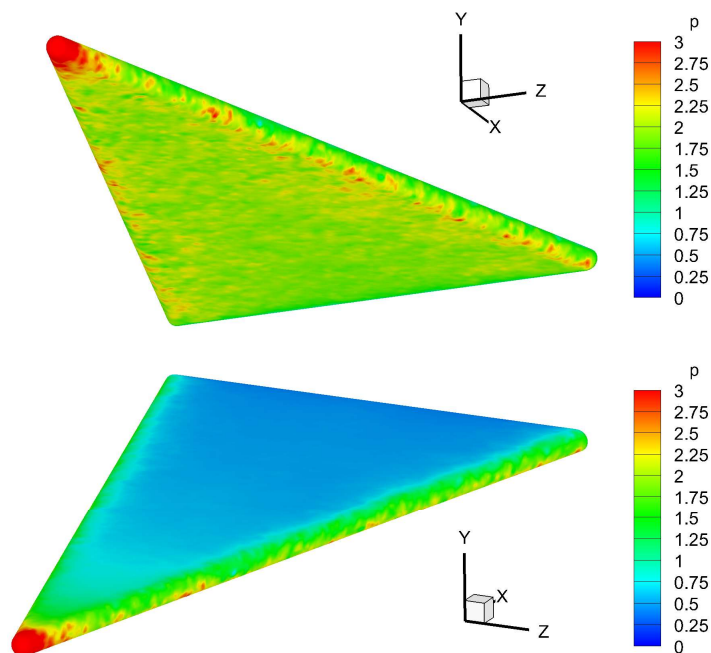


Рис. 13. Распределение безразмерного давления на поверхности модели: сверху с наветренной стороны, внизу с подветренной стороны

На рис. 14–15 в сечении $z = 0$ изображено распределение давления вокруг модели, а также в окрестности ее носовой и хвостовой части, и линии тока. В носовой части хорошо видна область повышенного давления. За хвостовой частью образовалась вихревая структура потока и область низкого давления. В этой области возможно нестационарное течение и возникновение колебаний. Возможность использования КГД алгоритма для моделирования нестационарных течений показана в [15].

Общая картина распределения давления в пространстве вокруг модели (рис. 14) аналогична распределению, полученному в [5] для расчета этой же модели треугольного крыла при $M = 6$, $Re = 4.2 \times 10^6$, $AoA = 10^\circ$. Отметим, что построенная сетка в пространстве вокруг носовой части является весьма неравномерной, и не позволяет детально разрешить фронт головной ударной волны в пространстве (рис. 15, слева). Вопрос о влиянии структуры сетки на результаты моделирования фронта ударной волны рассмотрен в работе [3], в которой делается вывод, что наилучшей пространственной сеткой для этой задачи является равномерная.

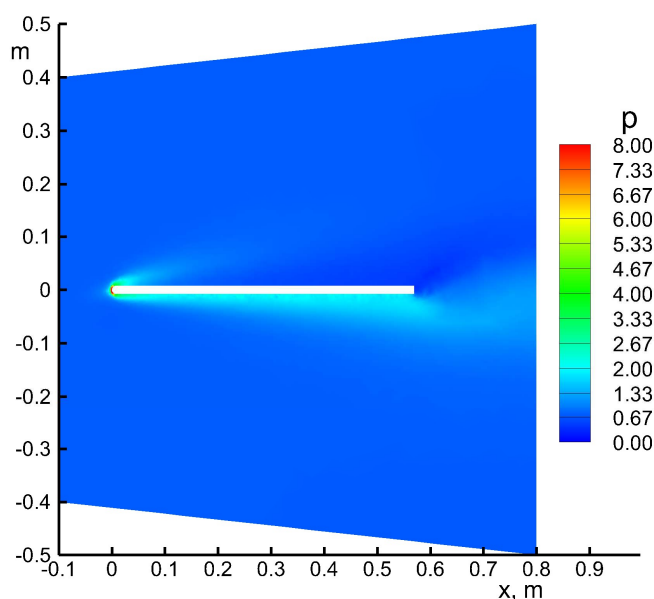


Рис. 14. Распределение безразмерного давления и линии тока в сечении $z = 0$

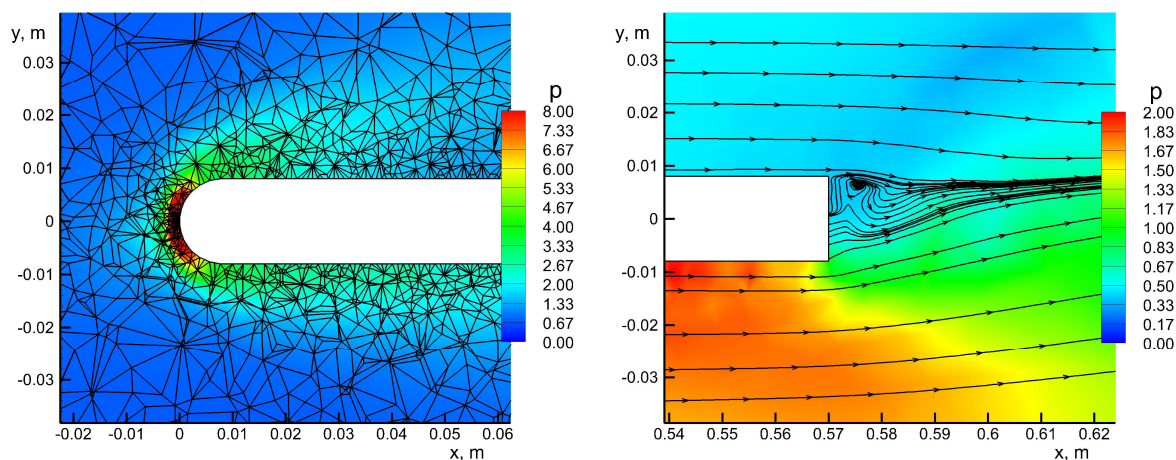


Рис. 15. Распределение безразмерного давления и линии тока в сечении $z = 0$

На рис. 16 изображено распределение скорости u_x вблизи поверхности модели в носовой и хвостовой части, а также фрагменты расчетной сетки. Видно, что пограничный слой частично разрешается.

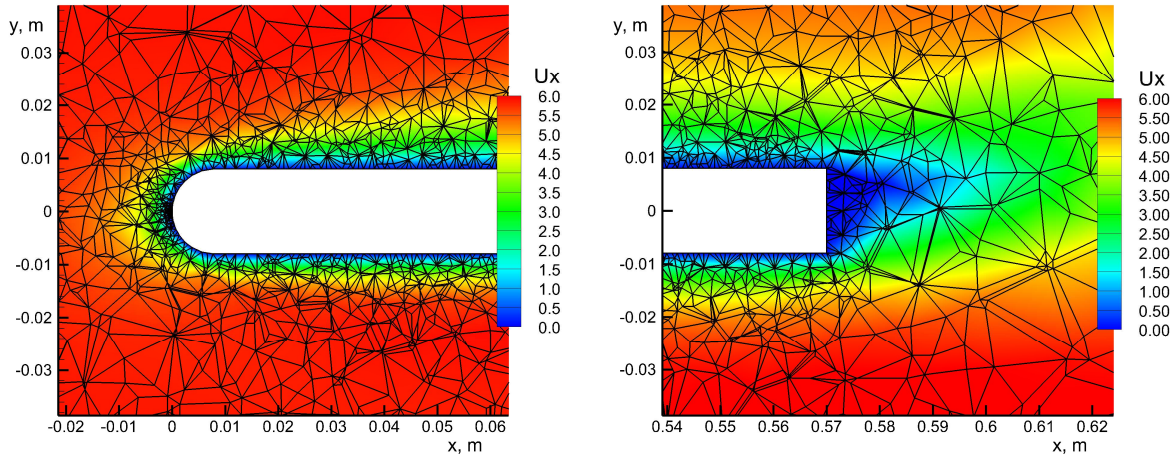


Рис. 16. Распределение скорости u_x и расчетная сетка в сечении $z = 0$

Используя полученное в результате моделирования распределение давления по поверхности модели (см. рис. 13), можно вычислить аэродинамические коэффициенты подъемной силы C_y и сопротивления C_x . Методика вычисления аэродинамических коэффициентов описана в [16]. В настоящей работе получены значения $C_y = 0.0716$, $C_x = 0.0173$, при этом аэродинамическое качество $K = C_y/C_x = 4.14$. За характерную площадь при этом бралась площадь модели в плане: $S = 0.09395 \text{ м}^2$.

В работе [17] представлены экспериментальные значения аэродинамического качества, полученные при обдуве моделей треугольного крыла с затупленной (цилиндрической) передней кромкой, то есть аналогичных модели, рассматриваемой здесь. Большинство параметров в одном из вариантов близки к параметрам настоящей работы, за исключением следующих: в [17] $M = 8.9$, отнесенное к 1 м $Re = 3 \times 10^6$, длина модели 0.12 м, толщина 0.004 м. Относительная толщина профиля (отношение толщины к длине) при этом равно 3.34 %. В настоящей работе относительная толщина профиля модели 2.81 %. Число Рейнольдса, отнесенное к длине модели (6×10^5), в [17] немного выше такового в настоящей работе (5.7×10^5).

Несмотря на указанные отличия, полученные в [17] экспериментальные значения аэродинамического качества можно использовать для сравнения с результатами настоящей работы, поскольку (как показано в [17]) уменьшение числа Рейнольдса уменьшает K , а уменьшение относительной толщины профиля увеличивает его. В [17] для угла стреловидности 75° и угла атаки 10° получено значение $K = 3.4$. Таким образом, можно сделать вывод о разумном согласии значения аэродинамического качества треугольного крыла, полученном в настоящей работе, и экспериментального значения. Отметим, что помимо указанных различий, присутствуют и другие: в [17] не учитывалось влияние донного давления; в настоящей работе оно учитывается, но не учитываются силы вязкого трения на поверхности модели (что может привести к завышению расчетного аэродинамического качества).

На рис. 17 приведено распределение безразмерного давления и линии тока в поперечном сечении $x = 0.208 \text{ м}$. Заметно вихреобразное течение на подветренной стороне.

В приведенном алгоритме построения расчетной сетки задается общий параметр шага $Step$. Для сетки, построенной в настоящей работе в качестве примера, значение этого параметра относительно велико, и построенная сетка в целом является довольно грубой. При уменьшении значения $Step$ возможно построение гораздо более подробных сеток. Отметим,

что представленный алгоритм допускает улучшения. В частности, в области сопряжения $R < x < x_4$ (см. рис. 3) четырехугольные ячейки можно строить более аккуратно, чтобы после триангуляции некоторые углы треугольных ячеек не получались слишком малыми (см. рис. 12).

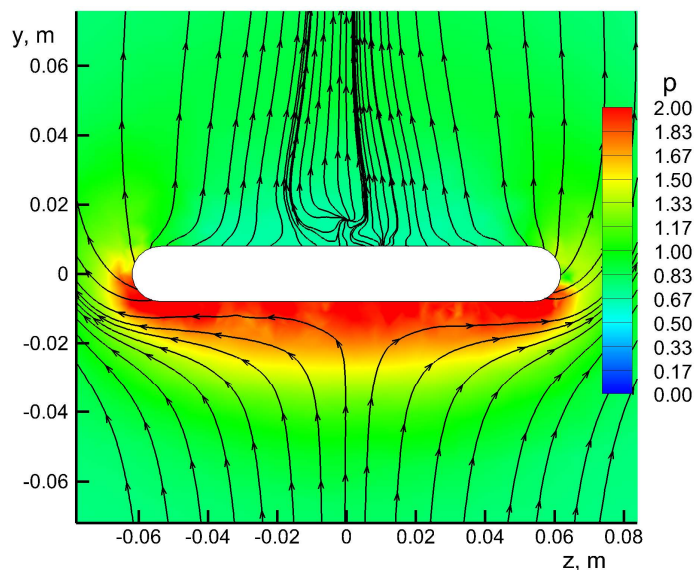


Рис. 17. Распределение безразмерного давления и линии тока в сечении $x = 0.208$ м

Кроме того, возможна доработка алгоритма с целью сгущения сетки на различных участках поверхности. В частности, можно сгустить сетку на закруглениях передних кромок, увеличивая параметр N_R в (4)–(6), или используя нелинейный закон распределения точек по закруглению. Отметим, что в существующей версии алгоритма сетка уже имеет сгущение в носовой части (см. рис. 5), что улучшает разрешение области повышенного давления в районе носовой части. Между тем, подробные поверхностные сетки с приблизительно равномерным распределением точек по поверхности могут оказаться полезными, поскольку картина обтекания заранее не известна, и на различных участках поверхности могут оказаться особенности обтекания, требующие разрешения (в том числе срывы потока).

Для расширения возможностей практического применения КГД алгоритма он был включен в качестве дополнительного вычислительного ядра в состав открытого программного комплекса OpenFOAM [18].

6. Заключение

В работе предложен перспективный алгоритм построения поверхностной сетки на треугольном крыле, служащий основой для построения пространственной расчетной сетки вокруг крыла. Алгоритм достаточно универсален и может использоваться в тех случаях, когда требуется относительно равномерная на поверхности модели расчетная сетка. Продемонстрирована возможность использования построенной сетки в задаче внешнего сверхзвукового обтекания крыла. Полученные результаты (общая картина обтекания и значение аэродинамического качества) показывают хорошее согласие с экспериментальными и расчетными данными из литературы.

Благодарности и ссылки на гранты

Автор благодарен Т. Г. Елизаровой и А. Е. Луцкому за плодотворное обсуждение представленной тематики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 19-01-00262А.

Литература

1. Суков С.А. Методы генерации тетраэдральных сеток и их программные реализации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 23 (2015), 22 с.
2. Поляков С.В., Чурбанов А.Г. Свободное программное обеспечение для математического моделирования // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 145 (2019), 32 с.
3. Широков И.А., Елизарова Т.Г. О влиянии структуры пространственной сетки на результаты численного моделирования ударной волны в задаче обтекания трехмерной модели//Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2019. Т. 20, вып. 1. <http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-1/articles/796/>
4. Александров С.В., Ваганов А.В., Шалаев В.И. Физические механизмы образования продольных вихрей, появления зон высоких тепловых потоков и раннего перехода в гиперзвуковом течении около треугольного крыла с затупленными передними кромками // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2016. № 45. С. 9–31.
5. Сильвестров П.В., Крюков И.А., Обносков Б.В. Численное моделирование гиперзвукового обтекания треугольного крыла//Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2018. Т. 19, вып. 1. <http://chemphys.edu.ru/issues/2018-19-1/articles/733/>
6. TetGen: A quality tetrahedral mesh generator. <http://tetgen.berlios.de/>
7. Chetverushkin V.N. Kinetic Schemes and Quasi-Gas Dynamic System of Equations. Barselona: CIMNE, 2008.
8. Elizarova T.G. Quasi-Gas Dynamic Equations. Dordrecht: Springer, 2009, ISBN 978-3-642-0029-5.
9. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016, 222 с.
10. Елизарова Т.Г., Широков И.А. Коэффициенты искусственной диссипации в регуляризованных уравнениях сверхзвуковой аэродинамики // Доклады Академии Наук. 2018. Т. 483. № 3. С. 260–264.
11. Широков И.А., Елизарова Т.Г. Компьютерное моделирование обтекания модели сверхзвуковым потоком вязкого сжимаемого газа на основе квазигазодинамического алгоритма // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2017. Т. 18, вып. 2. <http://chemphys.edu.ru/issues/2017-18-2/articles/721>
12. Широков И.А., Елизарова Т.Г. Вычислительный эксперимент в задаче сверхзвукового обтекания затупленного тела с хвостовым расширением//Математическое моделирование. 2019. Т. 31. № 10. С. 117–129.
13. Кудряшова Т.А., Поляков С.В., Свердлин А.А. Расчет параметров течения газа вокруг спускаемого аппарата // Математическое моделирование. Т. 20, № 7, 2008, С. 13–22.
14. K-100 System, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow; Available at <http://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.htm>
15. Елизарова Т.Г., Широков И.А. Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.:–МАКС Пресс. 2017. 136 с.
16. Железнякова А.Л., Суржиков С.Т. На пути к созданию модели виртуального ГЛА. I. –М.: ИПМех РАН, 2013. 159 с.
17. Горенбух П.И. Аэродинамическое качество плоского треугольного крыла с затупленными кромками при больших сверхзвуковых скоростях обтекания//Ученые записки ЦАГИ. 1989. Т. 20. № 1. С. 108–112.
18. Kraposhin M.V., Smirnova E.V., Elizarova T.G., Istomina M.A. Development of a new OpenFOAM solver using regularized gas-dynamic equations // Computers and Fluids. 2018. Vol. 166. Pp. 163–175.

References

1. Sukov, S. A., *Tetrahedral mesh generation algorithms and applications*, M: Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Science, Preprint No. 23, 2015, 22 p. Available at <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-23>
2. Polyakov, S. V., Churbanov, A. G., *Free and open source software for mathematical modeling*, M: Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Science, Preprint No. 145, 2019, 32 p. <http://doi.org/10.20948/prepr-2019-145>
Available at <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-145>
3. Shirokov, I. A., Elizarova T. G., “On the influence of a spatial grid structure on numerical simulation of a shock wave in a flow around 3D model,” *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, Vol. 20, No. 1, 2019. <http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-1/articles/796/>
4. Aleksandrov, S. V., Vaganov, A. V., Shalaev, V. I., “Fizicheskie mehanizmy obrazovaniya prodol'nykh vihref, pojavleniya zon vysokikh teplovykh potokov i rannego perehoda v giper-zvukovom techenii okolo treugol'nogo kryla s zatuplennymi perednimi kromkami,” *Vestnik PNIPU. Ajerokosmicheskaja tehnika*, No. 45, 2016, pp. 9–31.
5. Silvestrov, P. V., Kryukov, I. A., Obnosov, B. V., “Numerical Simulation of Hypersonic Flow around a Triangular Wing,” *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, Vol. 19, No. 1, 2018. Available at <http://chemphys.edu.ru/issues/2018-19-1/articles/733/>
6. TetGen: A quality tetrahedral mesh generator. <http://tetgen.berlios.de/>
7. Chetverushkin, B. N., *Kinetic Schemes and Quasi-Gas Dynamic System of Equations*, Barselona: CIMNE, 2008, 298 p.
8. Elizarova, T. G., *Quasi-Gas Dynamic Equations*, Dordrecht: Springer, 2009, ISBN 978-3-642-0029-5.
9. Sheretov, Yu. V., *Regularized Hydrodynamic Equations*, Tver State University, 2016, 222 p. elibrary.ru/item.asp?id=30097584
10. Elizarova, T. G., Shirokov I. A., “Artificial Dissipation Coefficients in Regularized Equations of Supersonic Aerodynamics,” *Doklady Mathematics*, Vol. 98, No. 3, 2018, pp. 648–651. Pleiades Publishing, Ltd., 2018. DOI: <http://dx.doi.org/10.31857/S086956520003242-9>
11. Shirokov, I. A., Elizarova, T. G., “Computer simulation of the supersonic flow of a viscous compressible gas around a model body on the basis of the quasi-gas-dynamic algorithm,” *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, Vol. 18, No. 2, 2017. <http://chemphys.edu.ru/issues/2017-18-2/articles/721>
12. Shirokov, I. A., Elizarova, T. G., “Computational experiment in the problem of supersonic flow around a blunt body with tail expansion,” *Mathematical Modeling*, Vol. 12, No. 3, 2020, pp. 433–444.
13. Kudryashova, T. A., Polyakov, S. V., Sverdlin, A. A., “Calculation of gas flow parameters around re-entry vehicle,” *Matematicheskoe Modelirovanie*, Vol. 20, No. 7, 2008, pp. 13–22; *Mathematical Models and Computer Simulations*, Vol. 1, No. 4, 2009, pp. 445–452.
14. *K-100 System*, M: Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS. <http://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.htm>
15. Elizarova, T. G., Shirokov, I. A., *Regularized equations and examples of their use in the modeling of gas-dynamic flows*, M: MAKS Press, 2017. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29352202>
16. Zheleznyakova, A. L., Surzhikov, S. T. *Na puti k sozdaniyu modeli virtual'nogo GLA. I* (On the way to creating a virtual HV model. I), M.: IPMeh RAN, 2013, 159 p.
17. Gorenbukh P. I., “Aerodynamic quality of a plane delta wing with blunted edges at large supersonic flow velocities,” *TsaGI, Uchenye Zapiski*, Vol. 20, No. 1, 1989, pp. 108–112.
18. Kraposhin, M. V., Smirnova, E. V., Elizarova, T. G., Istomina, M. A., “Development of a new OpenFOAM solver using regularized gas-dynamic equations,” *Computers and Fluids*, Vol. 166, 2018, pp. 163–175.

Статья поступила в редакцию 31 мая 2020 г.