

Development of a Method for Assessing Thermal Stresses in Structural Elements of Aircraft

R. K. Seleznev, V. V. Kuzenov

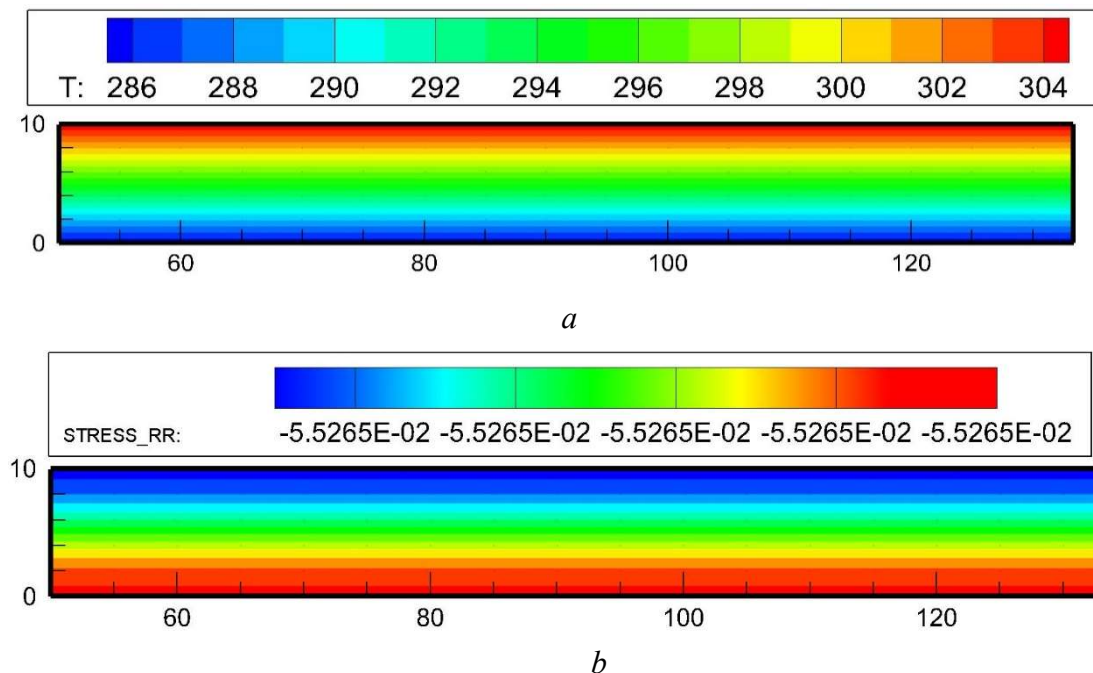
*Dukhov Research Institute of Automatics (VNIIA),
Moscow, 127055, Russia*

rkseleznev@gmail.com; vik.kuzenov@gmail.com

Abstract

A 2D computational-theoretical technique (on a structured computational grid) has been developed that makes it possible to find a solution to a system of equations of linear thermoelasticity with boundary conditions of a general form for key elements of an aircraft moving at supersonic and hypersonic speeds in the Earth's atmosphere. It is assumed in the work that the effect of coupling between the deformation and temperature fields is small.

Keywords: mathematical modeling, thermal deformation, development of numerical methods, aircraft



Temperature T [K] (a) and radial stress distribution σ_{yy} [GPa] (b), obtained from the calculation of thermal expansion of an infinitely large plate

УДК 621.039.05, 621.039.06, 539.1

Разработка методики оценки термонапряжений в элементах конструкции летательных аппаратов

Р. К. Селезнев, В. В. Кузенов

*Федеральное государственное унитарное предприятие
«Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова»,
Россия, Москва, 127055, ул. Суцёвская, д.22
rkseleznev@gmail.com; vik.kuzenov@gmail.com*

Аннотация

Разработана 2D расчетно-теоретическая методика (для структурированной расчетной сетки), позволяющая находить решение системы уравнений линейной термоупругости с граничными условиями общего вида для ключевых элементов летательного аппарата, движущегося со сверхзвуковой и гиперзвуковой скоростью в атмосфере Земли. В работе принято, что эффект связанности полей деформации и температуры мал.

Ключевые слова: математическое моделирование, термическая деформация, разработка численных методов, летательный аппарат.

1. Введение

Одной из наиболее важных и сложных задач при разработке конструкции высокоскоростного летательного аппарата является задача (экспериментального и расчетно-теоретического) моделирования сопряженного теплообмена на внешней (обтекаемой) поверхности летательного аппарата (ЛА).

В общем случае для решения такой задачи необходимо провести расчетно-теоретическое изучение особенностей структуры и пространственных распределений газодинамических параметров потока вблизи поверхности ЛА, на основе этого изучения выполнить оценку конвективных тепловых потоков, а затем (используя значение теплового потока вдоль внешней поверхности ЛА) найти решение системы уравнений термоупругости внутри конструкции ЛА с граничными условиями общего вида. Известно, что воздействие достаточно интенсивного теплового потока приводит к эффекту связности. Этот эффект приводит к взаимодействию полей деформации и температуры внутри конструкции ЛА. Однако в кристаллических телах этот эффект обычно мал.

В данной работе для частичного решения этой сложной задачи выполнена формулировка 2D приближенного метода оценки термонапряжений в ключевых элементах (кромках корпуса и крыльев, носовом обтекателе и т.д.) летательного аппарата, имеющих простейшие пространственные формы, например: в форме сферы или клина сопряженного с цилиндром и т.д. Здесь заметим, что в рассматриваемой ситуации сжатый и нагретый (в ударной волне) до высокой температуры (> 1000 К) воздух конвективным способом переносит энергию в материал стенки головной части ЛА. Эта энергия далее перераспределяется вдоль стенок рабочего отсека ЛА. При этом именно в ключевых элементах и в головной части ЛА материал стенки испытывает максимальную тепловую нагрузку. Основная особенность термомеханических процессов в данном случае связана с тем, что они протекают в широком диапазоне температур. Поэтому в принципе, используемая математическая модель термомеханических

процессов должна учитывать зависимость свойств материалов конструктивных элементов ЛА от температуры T , а также описывать возможные фазовые переходы (плавление и структурные превращения при высоких температурах).

Физико-математическая модель, предназначенная для оценок термонапряжений в отдельных простых пространственных элементах конструкции летательных аппаратов, основывается на решении квазистатической задачи линейной термоупругости [1–3] (т.е. перемещения \bar{U} и деформации ε_{ij} считаются малыми величинами по сравнению с характерными размерами ЛА).

Она включает в себя уравнения механического равновесия линейно-упругой среды с учетом температурных напряжений (однако эта математическая модель не позволяет проводить полное описание термомеханических процессов, так как в ней отсутствуют основные физические механизмы, учитывающие пластическое деформирование конструктивных материалов) и уравнение теплопроводности специального вида. Как правило, «физическая» область (в которой ищется решение) имеет криволинейные границы, а их форма в процессе математического моделирования может изменяться под действием тепловых и механических нагрузок. Для решения задач линейной термоупругости в такой сложной ситуации криволинейная расчетная область преобразуется к пространственной области, в которой возможно введение регулярной (структурированной) сетки.

При оценке термонапряжений в ключевых элементах ЛА вводятся следующие, упрощающие предположения: принимается, что конструкционный материал является изотропной сплошной средой; геометрия и теплонапряженное состояние конструкционного элемента ЛА описывается в двумерной (2D) постановке; изначально задаются внешние механические (силы, поля давлений) и тепловые воздействия (конвективный и радиационный тепловые потоки); считается, что скорость акустических волн в конструктивных элементах летательных аппаратов существенно больше скорости распространения в них тепловых волн.

2. Математическая модель оценки термонапряжений в элементах конструкции летательных аппаратов

Сформулируем пространственно-двумерную математическую модель, учитывающую зависимость транспортных свойств материала ЛА от температуры T и наличие фазовых переходов. Для упрощения (в этом случае в разрешающие уравнения не входят транспортные коэффициенты материала ЛА) математического описания краевую задачу сформулируем относительно напряжений σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} . Для этого в декартовой системе координат (X, Y) рассмотрим (в предположении линейной теории упругости) двумерные уравнения динамики упругого тела в напряжениях σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} :

$$\rho \frac{D(v_x)}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho F_x, \quad \rho \frac{D(v_y)}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho F_y,$$

$$\rho \frac{DH}{Dt} = \text{div}(\lambda_q \text{grad} \theta) + Q + (\sigma : \varepsilon), \quad \theta = T - T_0,$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \left[\lambda \sum_k^2 \varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \theta \right] \delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right),$$

$$\frac{D(v_x)}{Dt} = \frac{\partial(v_x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 v_i \frac{\partial(v_x)}{\partial x_i}, \quad \frac{D(v_y)}{Dt} = \frac{\partial(v_y)}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 v_i \frac{\partial(v_y)}{\partial x_i},$$

где ρ – локальная плотность тела ЛА; σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} – компоненты тензора напряжений; ε_{yy} , ε_{xy} , ε_{xx} – компоненты тензора деформаций; U_x , U_y – перемещения координат точек тела ЛА

относительно недеформированного состояния; $\vec{v} = (v_x = \partial U_x / \partial t, v_y = \partial U_y / \partial t)^T$ – компоненты скорости точек тела ЛА в декартовой системе координат (X, Y) ; Q – объемная мощность тепловых источников внутри тела ЛА; μ, λ – коэффициенты Ламэ; $H(T)$ – энтальпия материала ЛА. Выражение $(\sigma : \varepsilon)$ определяется следующим образом:

$$(\sigma : \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} (\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij})$$

Зависимость температуры T от энтальпии H имеет вид [2]

$$T(H) = \begin{cases} \frac{H}{c_s}, & H \leq c_s T_p, \\ T_p, & c_s T_p < H < c_s T_p + L \\ \frac{(H-L)}{c_\ell} - \frac{T_p(c_\ell - c_s)}{c_\ell}, & H \geq c_s T_p + L \end{cases}$$

Здесь c_s, c_ℓ – теплоемкость твердой и жидкой фазы; s – обозначает твердую фазу; ℓ – обозначает жидкую фазу; T_p – температура плавления; L – скрытая теплота плавления (затвердевания).

Если температура T в некоторой точке ЛА превышает значение температуры плавления T_p , то в этой пространственной области начинается фазовое превращение материала ЛА. В этом случае могут одновременно существовать твердая s и жидкая ℓ фазы [2]

$$s(H) = \begin{cases} 1, & H \leq c_s T_p, \\ 1 - \frac{(H - c_s T_p)}{L}, & c_s T_p < H < c_s T_p + L, \\ 0, & H \geq c_s T_p + L \end{cases}$$

Коэффициент теплопроводности λ_q определяется следующим способом [2]:

$$\lambda_q = \begin{cases} \lambda_s, & s = 1, \\ \lambda_\ell, & 0 \leq s < 1, \quad \ell = 1 - s \end{cases}$$

Для получения замкнутой системы дифференциальных уравнений в частных производных (первого порядка) гиперболического типа продифференцируем соотношения Дюамеля – Неймана [4] и тензор деформации ε_{ij} по времени t

$$\begin{aligned} \frac{D\sigma_{xx}}{Dt} &= 2\mu \frac{\partial(v_x)}{\partial x} + \left[\lambda \left(\frac{\partial(v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y)}{\partial y} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \frac{D\theta}{Dt} \right], \\ \frac{D\sigma_{yy}}{Dt} &= 2\mu \frac{\partial(v_y)}{\partial y} + \left[\lambda \left(\frac{\partial(v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y)}{\partial y} \right) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \frac{D\theta}{Dt} \right], \\ \frac{D\sigma_{xy}}{Dt} &= 2\mu \left(\frac{\partial(v_x)}{\partial y} + \frac{\partial(v_y)}{\partial x} \right), \quad \frac{D\varepsilon_{ij}}{Dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

Отметим, что в данной ситуации наиболее целесообразно решать уравнения динамической термоупругости относительно лагранжевых переменных.

Теперь рассмотрим более простую математическую постановку задачи оценки термонапряжений в элементах конструкции летательных аппаратов относительно перемещений \vec{U} . В этом случае задача сводится к численному решению системы двумерных уравнений квазистатической линейной термоупругости, которые позволяют определить поля температур T и перемещений \vec{U} , компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} в конструктивных элементах ЛА [3]

$$\mu \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\vec{U})) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{U})) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \operatorname{grad}(\theta) = 0, \quad (1)$$

$$\rho c_{\varepsilon=0} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \alpha_T (3\lambda + 2\mu) T_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right) = \operatorname{div}(\lambda_q \operatorname{grad} \theta),$$

$$\nabla \vec{U} = (\nabla U_r = \nabla u(r, z, t), \nabla U_z = \nabla v(r, z, t))^T,$$

где t, x_j – время и декартовы координат; $\vec{U} = (U_r = u(r, z, t), U_z = v(r, z, t))^T$ – вектор, описывающий перемещение точки тела ЛА; T – температура материала конструкции ЛА; T_0 – исходная (начальная) температура тела; $\theta = T - T_0$ – избыточная температура; ρ – плотность вещества в теле ЛА; $c_{\varepsilon=0}$ – теплоемкость при нулевой деформации; λ_q – коэффициент теплопроводности (табл. 1); μ, λ – коэффициенты Ламэ; α_T – коэффициент термического расширения.

Таблица 1

Теплофизические параметры материалов

Материал	Температура плавления T_p, C	Теплопроводность $\lambda_q, \text{Вт/м}\cdot\text{К}$		Теплоемкость $C_p, \text{Дж/кг}\cdot\text{К}$	Плотность $\rho, \text{кг/м}^3$
Графит МПГ-8 изотропный	3700	25		1500	2000
Графит УВП-1П ортотропный	3700	λ_{\perp}	λ_{\parallel}	2000	1500
		1.6	534		
Алюминий	657	200		897	2700
Вольфрам	3422	173		134	19300
Молибден	2610	142		256	10200
Сталь 20	1470	52		486	7770
Сталь 08X18H10	1470	17		504	7874

В случае изотропного тела (табл. 2) модуль всестороннего сжатия K связан с модулем Юнга E , первым λ и вторым μ параметрами Ламэ и коэффициентом Пуассона ν соотношениями

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad K = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{3},$$

где K – модуль всестороннего сжатия; μ – модуль сдвига.

При условии $\Delta T/T \ll 1$ температурную деформацию ε_{ij}^T в ЛА можно считать пропорциональной изменению температуры $\varepsilon_{ij}^T = (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \Delta T$, где α_T – является коэффициентом теплового расширения материалов ЛА. В этом случае тензор напряжений σ_{ik} будет определяться соотношением Дюамеля–Неймана [4]

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \left[\lambda \sum_k^3 \varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0) \right] \delta_{ij}$$

Слагаемое $(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0)\delta_{ij}$ в приведенном соотношении представляет собой дополнительные напряжения, связанные с изменением температуры T тела;

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \text{тензор деформации.}$$

Таблица 2

Термомеханические параметры материалов

Материал	Модуль Юнга E , ГПа	Коэффициент Пуассона ν	Коэффициент термического (теплого) расширения α_T , 1/К	Степень черноты материала стенки ЛА, ε_Γ
Алюминий	70	0.34	0.0000239	0.11 ÷ 0.19
Дюралюминий	74	0.34	0.0000239	0.11 ÷ 0.19
Железо	180	0.25	0.0000112	0.78
Латунь	95	0.35	0.0000172	0.61 ÷ 0.69
Медь	110	0.35	0.0000166	0.57 ÷ 0.87
Вольфрам	350	0.29	0.0000045	0.75
Молибден	330	0.3	5.2×10^{-6}	0.12
Титан	112	0.32	$(7.7 \div 10.4) \times 10^{-6}$	0.63
Сталь	190 ÷ 210	0.25	0.0000112	0.4

Объединение всех найденных в одной точке компонент тензора напряжений σ_{ik} в единственную величину $\hat{\sigma}$ выполняется с помощью гипотезы формоизменения Мизеса [6]: переход материала в предельное состояние произойдет тогда, когда величина удельной потенциальной энергии формоизменения достигнет предела текучести. Эквивалентные напряжения $\hat{\sigma}$ по этой гипотезе называются эквивалентными напряжениями по Мизесу [6] и определяются формулой

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}{2}}, \quad (i, k = x, y, z),$$

где $\hat{\sigma}$ – эквивалентное напряжение по Мизесу [6] характеризует величины термоупругих напряжений, возникающих в элементах конструкции летательных аппаратов в процессе их высокоскоростного полета в атмосфере Земли.

Граничные условия для температуры T формулируются путем задания теплового потока на поверхности элемента конструкции ЛА

$$-\lambda_q \frac{\partial T}{\partial x_i} \Big|_\Gamma = q_i - \varepsilon_\Gamma \sigma T_\Gamma^4,$$

где λ_q – коэффициент теплопроводности; ε_Γ – степень черноты материала стенки на поверхности Γ летательного аппарата; q_i – конвективный тепловой поток, поступающий на поверхность Γ из внешней окружающей среды; Γ – символ, который обозначает поверхность ЛА.

Механические граничные условия в виде перемещений \bar{U} или напряжений σ_{ij} на поверхности ЛА задаются аналогично работе [3].

$$\bar{U}(x, y) \Big|_\Gamma = \bar{U}_{0i}, \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = f_i,$$

где \bar{U}_{0i} , f_i – заданные функции; n_j – нормаль к поверхности ЛА.

Начальные условия (момент времени $t = 0$) определяются в виде изначально заданного пространственного распределения температуры T и перемещений \bar{U} .

Граничные условия, необходимые для решения квазистатической задачи линейной термоупругости конечно-разностным методом, удобно реализуются, когда границы расчетной области Ω совпадают с координатными линиями в некоей обобщенной системе координат (ξ, η) . При этом расчетная область Ω переходит в параметрическую область Ω_p (например: в прямоугольник, см. рис. 1).

Введем преобразование координат вида $r = r(\xi, \eta)$, $z = z(\xi, \eta)$

При известных в «физическом» пространстве координатах узлов сетки в расчетной области ξ, η метрические коэффициенты в общем случае могут быть найдены путем численного дифференцирования по формулам

$$J = \frac{\partial(r, z)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi},$$

$$\xi_r = J^{-1} \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \eta_r = -J^{-1} \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \xi_z = -J^{-1} \frac{\partial r}{\partial \eta}, \quad \eta_z = J^{-1} \frac{\partial r}{\partial \xi},$$

где $J = \partial(r, z)/\partial(\xi, \eta)$ – якобиан перехода от цилиндрической системы координат r, z к криволинейной системе координат ξ, η .

Для поиска функций $r = r(\xi, \eta)$, $z = z(\xi, \eta)$ может быть использована система уравнений, полученная в работе [14, 17, 18]. Данные уравнения гарантируют, что найденные функции $r = r(\xi, \eta)$, $z = z(\xi, \eta)$ являются гладкими функциями координат ξ, η . Однако в некоторых случаях созданная таким образом расчетная сетка по тем или иным причинам может быть признана неудачной. В этой ситуации (вместе с дифференциальными способами) целесообразно использовать аналитические алгебраические преобразования [5].

Напомним, что в общем случае для оператора $\text{grad}(\text{div} \bar{U})$ справедливо дифференциальное соотношение

$$\text{grad}(\text{div}(\bar{U})) = \text{div}(\text{grad}(\bar{U})) + \text{rot}(\text{rot}(\bar{U}))$$

При условии (см. [3], $\text{rot}(\bar{U}) = 0$) возможности введения термоупругого потенциала перемещений Φ оператор $\text{rot}(\text{rot}(\bar{U})) \equiv 0$, $\bar{U} = \text{grad}(\Phi)$. Таким образом, расчет деформаций \bar{U} внутри конструкции ЛА в этом случае сводится к решению квазистационарной задачи линейной термоупругости [3]

$$\text{div}(\text{grad}(\Phi)) = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)} \alpha_T \theta = \frac{(1 + \sigma)}{(1 - \sigma)} \alpha_T \theta, \quad \bar{U} = \text{grad}(\Phi),$$

где σ – коэффициент Пуассона; $\bar{U} = \bar{r}^* - \bar{r}$ – перемещение; α_T – коэффициент термического расширения. Здесь \bar{r} и \bar{r}^* радиус векторы точек областей до \bar{r} и после \bar{r}^* термической деформации. Пространственное распределение термических напряжений σ_{ik} находится подстановкой найденных значений термоупругого потенциала Φ в выражение $\bar{U} = \text{grad}(\Phi)$ и далее в соотношение

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \left[\lambda \sum_k^3 \varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) \right] \delta_{ij}$$

Однако в двумерном случае применение оператора $\text{rot}(\text{rot}\bar{U})$ к 2D вектору $\bar{U} = (U_r, U_z)^T$ позволяет получить относительно простую форму записи

$$\text{rot}(\text{rot}\bar{U}) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right) \vec{e}_z$$

Преобразуя дальше данную форму оператора $\text{rot}(\text{rot}\bar{U})$, получим

$$\text{rot}(\text{rot}\bar{U}) \Big|_r = -\text{div}(\text{gradu}) + \bar{P} \Big|_r, \quad \text{rot}(\text{rot}\bar{U}) \Big|_z = -\text{div}(\text{gradv}) + \bar{P} \Big|_z,$$

$$\text{где } \bar{P}(\bar{U}) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial r} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} + \frac{\alpha}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right)^T.$$

Здесь отметим, что аналогичный результат может быть получен прямым вычислением (в системе координат r, z) выражения $\text{grad}(\text{div}(\bar{U}))$.

Таким образом, первому уравнению системы (1) можно придать более простую форму

$$\mu \text{div}(\text{grad}(\bar{U})) + (\lambda + \mu) \bar{P}(\bar{U}) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \text{grad}(\theta) = 0 \quad (2)$$

Приведем вид дифференциальных операторов, входящих в уравнение (2) в криволинейной системе координат ξ, η .

Оператор $\mu \text{div}(\text{grad}(\bar{U}))$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mu \text{div}(\text{grad}(\bar{U})) \Big|_r &= \frac{\mu}{J} \frac{\partial (J(\xi_r^2 + \xi_z^2) u_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\mu}{J} \frac{\partial (J(\eta_r^2 + \eta_z^2) u_\eta)}{\partial \eta} + f_r, \\ f_r &= \frac{\mu}{J} \frac{\partial \{J(\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z) u_\eta\}}{\partial \xi} + \frac{\mu}{J} \frac{\partial \{J(\eta_r \xi_r + \eta_z \xi_z) u_\xi\}}{\partial \eta} + \alpha \frac{\mu}{r} \left\{ \xi_r \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_r \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\}, \\ \mu \text{div}(\text{grad}(\bar{U})) \Big|_z &= \frac{\mu}{J} \frac{\partial (J(\xi_r^2 + \xi_z^2) v_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\mu}{J} \frac{\partial (J(\eta_r^2 + \eta_z^2) v_\eta)}{\partial \eta} + f_z, \\ f_z &= \frac{\mu}{J} \frac{\partial \{J(\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z) v_\eta\}}{\partial \xi} + \frac{\mu}{J} \frac{\partial \{J(\eta_r \xi_r + \eta_z \xi_z) v_\xi\}}{\partial \eta} + \alpha \frac{\mu}{r} \left\{ \xi_r \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_r \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\}, \\ u_\xi &= \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad u_\eta = \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad v_\xi = \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad v_\eta = \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{aligned}$$

Радиальной компоненте $\bar{P} \Big|_r$ вектора $\bar{P}(\bar{U})$ в системе координат ξ, η можно придать следующую форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \xi_r \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi_r \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \eta_r \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta_r \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \xi_r \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta_r \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \eta_r \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\xi_r \frac{\partial u}{\partial \xi} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial r} &= \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi_r \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta_r \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta_r \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\xi_r \frac{\partial v}{\partial \xi} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= \xi_r u_\xi + \eta_r u_\eta \end{aligned}$$

Продольная компонента $\bar{P}|_z$ вектора $\bar{P}(\bar{U})$ в системе координат ξ, η имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi_z \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta_z \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta_z \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\xi_z \frac{\partial v}{\partial \xi} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} &= \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi_r \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta_r \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta_r \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\xi_r \frac{\partial u}{\partial \xi} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \xi_z u_\xi + \eta_z u_\eta\end{aligned}$$

Для оператора $(3\lambda + 2\mu)\alpha_T \text{grad}(\theta)$ приведем следующую форму записи:

$$\begin{aligned}(3\lambda + 2\mu)\alpha_T \text{grad}(\theta)|_r &= (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \left[\xi_r \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \eta_r \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right], \\ (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \text{grad}(\theta)|_z &= (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \left[\xi_z \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right],\end{aligned}$$

где $u(r, z, t) = U_r$, $v(r, z, t) = U_z$ – проекции вектора перемещения $\bar{U}(r, z, t)$ на оси r и z , $\alpha = 0$ – соответствует плоскому и $\alpha = 1$ – осесимметричному случаям деформаций.

Для криволинейной системы координат ξ, η укажем математическую форму уравнения (3), описывающего перенос внутренней энергии процессом теплопроводности.

$$\rho c_{\varepsilon=0} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{J} \frac{\partial (J \lambda_q (\xi_r^2 + \xi_z^2) \theta_\xi)}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial (J \lambda_q (\eta_r^2 + \eta_z^2) \theta_\eta)}{\partial \eta} + f, \quad (3)$$

$$S_\lambda = \frac{1}{J} \frac{\partial \{ J \lambda_q (\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z) \theta_\eta \}}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial \{ J \lambda_q (\eta_r \xi_r + \eta_z \xi_z) \theta_\xi \}}{\partial \eta} + \alpha \frac{\lambda_q}{r} \left\{ \xi_r \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \eta_r \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right\},$$

$$D_\lambda = -\alpha_T (3\lambda + 2\mu) T_0 \left[\frac{1}{J} \frac{\partial J (\partial U_\xi / \partial t)}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial J (\partial U_\eta / \partial t)}{\partial \eta} \right] - \alpha \frac{\alpha_T (3\lambda + 2\mu) T_0}{r} \frac{\partial u}{\partial t},$$

где $f = S_\lambda + D_\lambda$.

3. Численный метод расчета

При численной реализации уравнений (2), (3) в параметрической области Ω_p вводится прямоугольная сетка

$$\omega_h = \{ \xi_j, \eta_k; j = \overline{0, J}, k = \overline{0, K} \}, \quad \omega_h \in \Omega_h.$$

Здесь $h_\xi = \xi_j - \xi_{j-1}$, $\xi_{j+1/2} = \xi_j + 0.5h_\xi$, $\xi_{j-1/2} = \xi_j - 0.5h_\xi$, $h_\eta = \eta_k - \eta_{k-1}$, $\eta_{k+1/2} = \eta_k + 0.5h_\eta$, $\eta_{k-1/2} = \eta_k - 0.5h_\eta$.

Численное решение системы уравнений (2), (3) осуществляется в два этапа. На первом этапе неявно разрешается уравнение теплопроводности специального вида (3). Затем на втором этапе (также неявно и с учетом, найденного на первом этапе слагаемого $(3\lambda + 2\mu)\alpha_T \text{grad}(\theta)$) находится решение уравнений линейной термоупругости (2).

При решении «тепловой» части двумерных уравнений квазистатической линейной термоупругости, которые описывают перенос внутренней энергии процессом теплопроводности (4), применяется следующая неявная двухшаговая разностная схема Дугласа – Писмана – Рекфорда [6]:

$$c_{j,k} \frac{\theta_{j,k}^{n+1/2} - \theta_{j,k}^n}{\Delta/2} = \frac{a_{j+1/2,k} (\theta_{j+1,k}^{n+1/2} - \theta_{j,k}^{n+1/2}) - a_{j-1/2,k} (\theta_{j,k}^{n+1/2} - \theta_{j-1,k}^{n+1/2})}{Jh_\xi^2} + F_\xi^n + O(h_\xi^2, h_\eta^2),$$

$$\theta = \theta(\xi, \eta, t = t^n), \quad F_\xi = \frac{\partial (J\lambda_q (\eta_r^2 + \eta_z^2) \theta_\eta)}{J\partial\eta} + f,$$

$$c_{j,k} \frac{\theta_{j,k}^{n+1} - \theta_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta/2} = \frac{a_{j,k+1/2} (\theta_{j,k+1}^{n+1} - \theta_{j,k}^{n+1}) - a_{j,k-1/2} (\theta_{j,k}^{n+1} - \theta_{j,k-1}^{n+1})}{Jh_\eta^2} + F_\eta^{n+1/2} + O(h_\xi^2, h_\eta^2),$$

$$\theta = \theta\left(\xi, \eta, t = t^n + \frac{\Delta t}{2}\right), \quad F_\eta = \frac{\partial (J\lambda_q (\xi_r^2 + \xi_z^2) \theta_\xi)}{J\partial\xi} + f, \quad (4)$$

где n – верхний индекс, относящийся к моменту «времени» $t = n\Delta t$, Δt – шаг по «времени»; $c = \rho c_{\varepsilon=0} J$; $a_\xi = J\lambda_q (\xi_r^2 + \xi_z^2)$. Данная разностная схема (вдоль пространственных направлений ξ, η) легко разрешается скалярной прогонкой.

Для численного решения деформационного уравнения (2) или «теплого» уравнения (1) представим их в операторной форме $A\vec{U} = \vec{F}$.

Вектор \vec{F} , входящий в правую часть уравнения $A\vec{U} = \vec{F}$ в случае расчета термодиформационной части задачи можно записать следующим образом:

$$\vec{F} = \left[(3\lambda + 2\mu) \alpha_T \text{grad}(\theta)|_r, (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \text{grad}(\theta)|_z \right]^T$$

При решении «тепловой» части двумерных уравнений квазистатической термоупругости вектор $\vec{F} = \alpha_T (3\lambda + 2\mu) T_0 \text{div}(\partial\vec{U}/\partial t)$.

Разностный оператор A для термодиформационной части задачи в произвольной криволинейной системе координат ξ, η , определяется, следующим из уравнений (2), векторным соотношением

$$A\vec{U} = \mu \text{div}(\text{grad}(\vec{U})) + (\lambda + \mu) \vec{P}(\vec{U})$$

В случае рассмотрения «тепловой» части задачи оператор A имеет вид

$$A\theta = \text{div}\left(\left[\lambda_q / \rho c_{\varepsilon=0}\right] \text{grad}(\theta)\right)$$

Для поиска решения уравнения $A\vec{U} = \vec{F}$ можно воспользоваться методом установления [7] $\partial\vec{U}/\partial t = A\vec{U} - \vec{F}, t \rightarrow \infty$ и векторным вариантом двухшаговой разностной схемы Дугласа-Писмана-Рекфорда [6] или же неявным итерационным методом вариационного типа – методом минимальных невязок [8]

$$\vec{U}_{j,k}^{n+1} = \vec{U}_{j,k}^n + c\Delta t \vec{R}_{j,k}^n, \quad c \approx 0.9, \quad \Delta t = \frac{(\vec{R}, A\vec{R})}{\|A\vec{R}\|^2},$$

где Δt играет роль «времени», \vec{R} – вектор невязок. Вектор \vec{R} определяется следующим образом:

$$R_{1,j,k}^n = (AU_{j,k})_1^n - b_{1,j,k}^n, \quad R_{2,j,k}^n = (AU_{j,k})_2^n - b_{2,j,k}^n,$$

$$\vec{b}_{j,m}^n = \{b_{1,j,k}^n, b_{2,j,k}^n\} = \{(3\lambda + 2\mu) \alpha_T \text{grad}(\theta)|_r, (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \text{grad}(\theta)|_z\}, \quad j = \overline{1, J-1}, k = \overline{1, K-1}$$

Для удобства изложения введем далее скалярное произведение [6]

$$(\vec{g}, \vec{d}) = \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{k=1}^{K-1} (g_{1,j,k} d_{1,j,k} h_{\xi} h_{\eta}) + \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{k=1}^{K-1} (g_{2,j,k} d_{2,j,k} h_{\xi} h_{\eta}),$$

$$\vec{g}_{j,k} = (g_1, g_2)_{j,k}, \quad \vec{d}_{j,k} = (d_1, d_2)_{j,k} \quad (5)$$

При нахождении «времени» $\Delta t = (\vec{R}, A\vec{R}) / \|A\vec{R}\|^2$ минимизируем значение квадрата невязки $\vec{R}_{j,k} = A\vec{U}_{j,k} - \vec{b}_{j,k}$, используя модифицированный вариант итерационного метода вариационного типа – метод минимальных невязок [8].

При численной реализации описанных выше вычислительных методов для аппроксимации производных от переменных u, v, θ зададим на введенной выше сетке $\omega_h \in \Omega_h$ следующее конечно-разностное представление производных [9]:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[a \frac{\partial g}{\partial \xi} \right]_{j,k} = \frac{a_{j+1/2,k} (g_{j+1,k} - g_{j,k}) - a_{j-1/2,k} (g_{j,k} - g_{j-1,k})}{h_{\xi}^2} + O(h_{\xi}^2), \quad a_{j\pm 1/2,k} = \frac{a_{j,k} + a_{j\pm 1,k}}{2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[a \frac{\partial g}{\partial \eta} \right]_{j,k} = \frac{a_{j+1,k} (g_{j+1,k+1} - g_{j+1,k-1}) - a_{j-1,k} (g_{j-1,k+1} - g_{j-1,k-1})}{4h_{\xi} h_{\eta}} + O(h_{\xi}^2, h_{\eta}^2)$$

Отметим, что в принципе для корректной работы описанного алгоритма необходимо: после каждого расчетного шага (т.к. произошла деформация границ расчетной области Ω , и изменились метрические коэффициенты $\xi_r, \eta_r, \xi_z, \eta_z, J$) осуществить перестроение расчетной сетки (например: с использованием метода работы [4]); затем произвести интерполяцию (с учетом выполнения законов сохранения и нужной степени гладкости решения, см. [10]) транспортных коэффициентов, величин $\vec{U}(r, z, t)$ и $\theta(r, z, t)$ (в узлах и центрах ячеек) на сетку, полученную после её перестроения.

4. Методы преобразования 2D расчетной области

При решении различного рода задач математической физики требуется наличие простых и эффективных способов дискретизации расчетных областей, имеющих сложную криволинейную форму. Представление уравнений математической физики в дискретной форме непосредственно в декартовой системе координат приводит к необходимости переноса с помощью интерполяции (что означает внесение дополнительных ошибок) граничных условий на декартовы координатные плоскости. Эти координатные плоскости в общем случае не совпадают с истинными криволинейными границами расчетной области. Таким образом, возникает необходимость в установлении математической связи между цилиндрической (r, z) или декартовой (y, x) и некоторой обобщенной системой координат (в данном случае (ξ, η)), в которой границы расчетной области являются координатными линиями ξ и η .

Такого рода математические связи могут быть найдены с помощью следующей группы вычислительных методов: методов теории функций комплексного переменного [11]; алгебраических методов [12]; на основе решений дифференциальных уравнений в частных производных [13].

Здесь отметим, что вычислительные методы, основанные на использовании дифференциальных уравнений, являются наиболее часто применяемыми на практике, т.к. в этом случае при построении расчетной сетки можно наиболее полно учесть математические свойства исходной решаемой задачи.

В качестве одного из вариантов расчетной сетки можно использовать неортогональную сетку, построенную по методу [5] трансфинитной интерполяции (TFI). Для этого применяется билинейная интерполяция [5], который позволяет регулярным образом преобразовать «физическую» расчетную область G (рис. 1) в прямоугольник (параметрический квадрат) Ω в криволинейной системе координат (ξ, η) . Введем следующие формулы (10) для однонаправленных отображений $P_\xi(\xi, \eta)$ и $P_\eta(\xi, \eta)$:

$$P_\xi(\xi, \eta) = (1 - \xi)\vec{r}(0, \eta) + \xi\vec{r}(1, \eta), \quad P_\eta(\xi, \eta) = (1 - \eta)\vec{r}(\xi, 0) + \eta\vec{r}(\xi, 1) \quad (10)$$

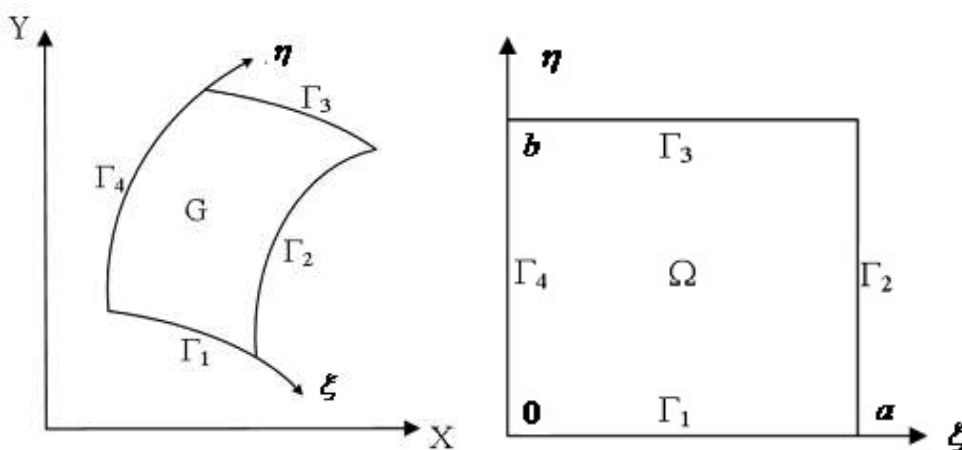


Рис. 1. Преобразование из цилиндрической (r, z) (декартовой (y, x)) системы координат в криволинейную систему координат (ξ, η)

В этом случае интерполяция производится по одной координате (направлению) ξ или координате (направлению) η . Трансфинитная интерполяция $P_\xi \oplus P_\eta$ является булевой суммой однонаправленных отображений $P_\xi(\xi, \eta)$, $P_\eta(\xi, \eta)$ и записывается следующим способом (11):

$$P_\xi \oplus P_\eta = P_\xi + P_\eta - P_\xi P_\eta \quad (11)$$

Функции $\vec{r}(0, \eta)$, $\vec{r}(1, \eta)$, $\vec{r}(\xi, 0)$, $\vec{r}(\xi, 1)$ могут быть получены с помощью аппроксимации их кривыми Безье [15] или сплайнами [16].

Особой случай представляет ситуация, когда расчетную область (в декартовой системе координат X, Y) можно представить в виде совокупности $\bigcup G$ подобластей вида «криволинейный» прямоугольник G (см. рис. 1). Тогда каждая подобласть G этой совокупности $\bigcup_i G_i$ может быть преобразована в нормализованный («элементарный») прямоугольник Ω (рис. 1). Для нахождения этого преобразования требуется определить функции $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, которые обеспечивают гладкое, однозначное отображение (рис. 1) «элементарного прямоугольного» элемента Ω (заданного на плоскости ξ, η) в криволинейный «прямоугольный» элемент G , который определен на плоскости X, Y . Такого рода преобразования могут быть использованы для повышения «вычислительного качества» расчетной сетки, созданной с помощью трансфинитной интерполяции $P_\xi \oplus P_\eta$.

Преобразование $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ для «элементарного прямоугольного» элемента Ω может быть найдено путем решения (рис. 2) уравнений «близких» к уравнениям Лапласа [20] $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, для которых заданы граничные условия определяемые требованием соответствия координат точек (см. рис. 1) на контуре ∂G области G и контуре $\partial \Omega$ параметрической области Ω :

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = -J^2 \left(P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta} \right),$$

$$x(\xi, \eta)|_{\xi=0} = \varphi_0^x(\eta), \quad x(\xi, \eta)|_{\xi=a} = \varphi_1^x(\eta); \quad 0 \leq \eta \leq b,$$

$$x(\xi, \eta)|_{\eta=0} = \psi_0^x(\xi), \quad x(\xi, \eta)|_{\eta=b} = \psi_1^x(\xi); \quad 0 \leq \xi \leq a,$$

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = -J^2 \left(P \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta} \right),$$

$$y(\xi, \eta)|_{\xi=0} = \varphi_0^y(\eta), \quad y(\xi, \eta)|_{\xi=a} = \varphi_1^y(\eta); \quad 0 \leq \eta \leq b,$$

$$y(\xi, \eta)|_{\eta=0} = \psi_0^y(\xi), \quad y(\xi, \eta)|_{\eta=b} = \psi_1^y(\xi); \quad 0 \leq \xi \leq a,$$

где

$$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \quad \beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, \quad D = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}},$$

$$\omega = \arccos(\beta / (\sqrt{\alpha} \sqrt{\gamma})), \quad (\xi, \eta) \in G, (\xi^*, \eta^*) \in \partial G,$$

$$P = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2} - \omega \right) D, & \sqrt{(\xi - \xi^*)^2 + (\eta - \eta^*)^2} > \varepsilon, \\ \frac{(\pi/2 - \omega) D}{\Delta \sin^2(\omega)}, & \sqrt{(\xi - \xi^*)^2 + (\eta - \eta^*)^2} \leq \varepsilon, \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} \frac{\pi/2 - \omega}{D}, & \sqrt{(\xi - \xi^*)^2 + (\eta - \eta^*)^2} > \varepsilon, \\ \frac{\pi/2 - \omega}{\Delta \sin^2(\omega) D}, & \sqrt{(\xi - \xi^*)^2 + (\eta - \eta^*)^2} \leq \varepsilon, \end{cases}$$

где ε – расстояние перехода от точек границы ∂G к внутренним точкам расчетной области G , $\Delta \approx 10^{-1}$ – малая величина.

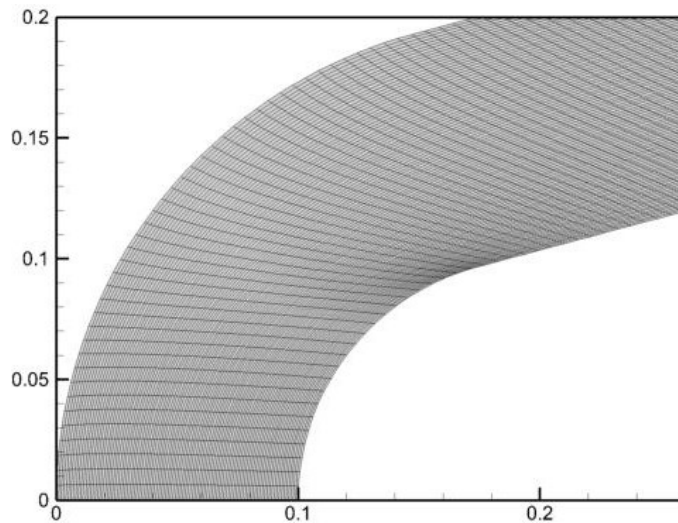


Рис. 2. Пример расчетной сетки (100×300 четырехугольных ячеек), построенной путем решения уравнений «близких» к уравнениям Лапласа

Функция D и соотношение вида $(\pi/2 - \omega) \rightarrow 0$, входящие в коэффициенты P и Q («управляющие функции»), обеспечивают «квазиконформность» (т.е. «ортогональность»), а также растяжение с «одинаковым» коэффициентом вдоль осей (ξ, η) отображения $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ в метрике $dx^2 + dy^2 = d\xi^2/D^2 + D^2 d\eta^2$ пространства \mathbb{R}^2 .

При численном поиске решения уравнений «близких» к уравнениям Лапласа возможно применение разностной схемы Дугласа – Писмана – Рекфорда [6] и противопоточной схемы [21] для слагаемых вида $P \frac{\partial}{\partial \xi}$ и $Q \frac{\partial}{\partial \eta}$.

Заметим, что если область G не является выпуклой (рис. 1), то некоторые узловые точки искомой расчетной сетки могут оказаться за пределами границ (контура) ∂G области G . Однако для приведенного выше способа построения расчетной сетки этого явления не наблюдается (рис.2).

5. Результаты тестовых расчетов

Для проверки работоспособности сформулированного выше 2D вычислительного метода (кода) и оценки термонапряжений в отдельных ключевых элементах ЛА (кромках корпуса и крыльев, носовом обтекателе и т.д.) был решен набор из шести тестовых (валидационных) задач [22–27], которые имеют аналитические решения.

Во всех сериях тестовых расчетов равновесное термомодеформируемое состояние определялось в теле «простой формы», которое представляло собой либо затупленный по сфере конус, либо затупленный по цилиндру клин (рис. 3–5) или прямоугольник (рис. 6).

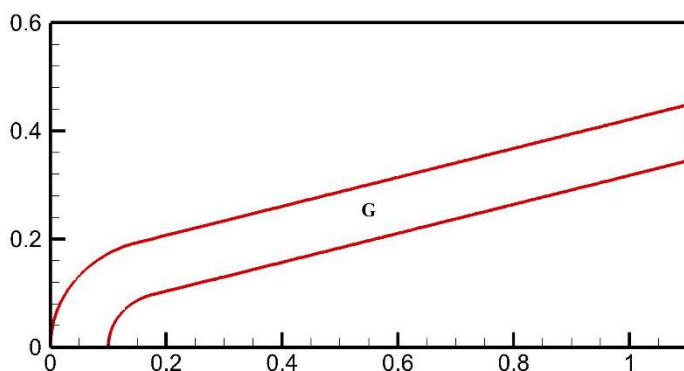


Рис. 3. Контур G термомодеформируемого тела в цилиндрической (r, z) или декартовой (y, z) системах координат

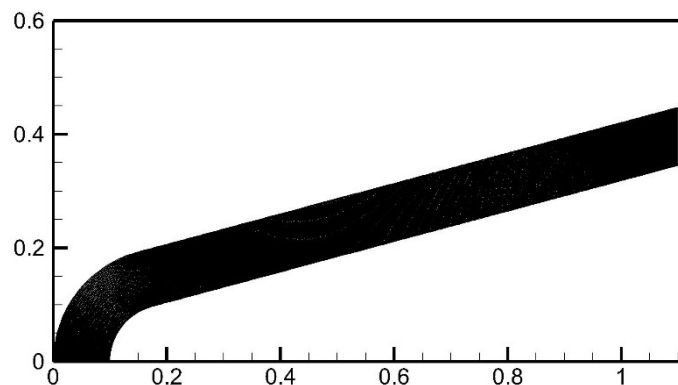


Рис. 4. Расчетная сетка (100×300 четырехугольных ячеек), используемая в первой тестовой задаче

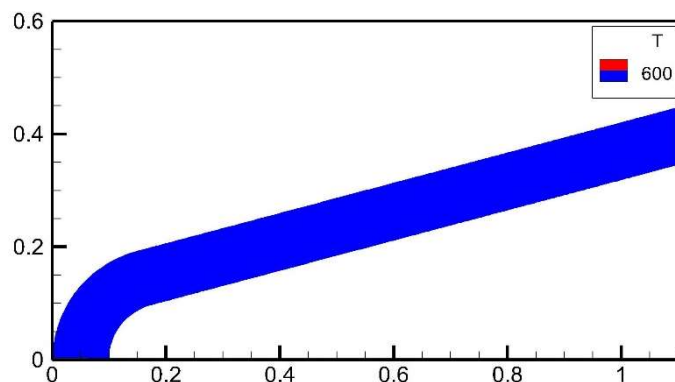


Рис. 5. Температурное поле T [K], полученное при решении первой тестовой задачи для $T_0 = 300$ [K]

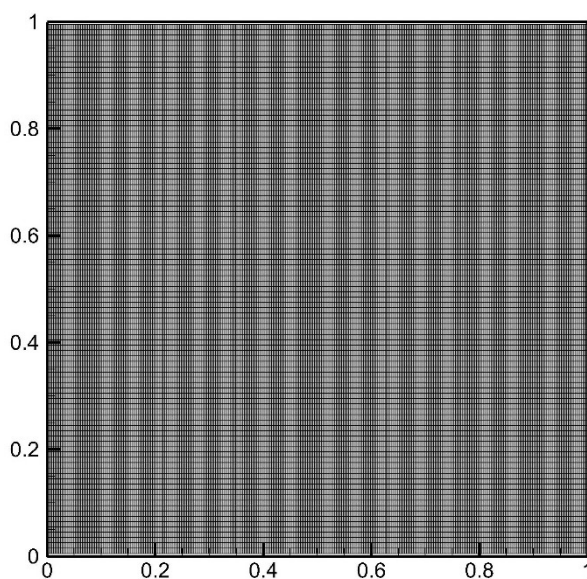


Рис. 6. Расчетная сетка (100×300 четырехугольных ячеек), используемая во второй тестовой задаче

Первые четыре тестовых расчета проверяют отдельные (например: тепловой расчет и метод оценки термонапряжений выполняются отдельно друг от друга) элементы математической модели термомеханических процессов.

Последние два тестовых расчета носят синтетический характер и дают возможность оценить правильность работы вычислительного кода в более полном объеме.

Используемая в первом тестовом примере геометрическая модель термомеханического тела имеет следующие характерные размеры (рис. 3–5): длина 1.1 м, поперечный размер 0.45 м, радиус скругления головной части 0.2 м, эквидистантное расстояние между нижней и верхней границами 0.1 м, угол наклона образующей равен 15 град.

На рис. 6 в расчетной области G приведена сетка, используемая во второй тестовой задаче.

Для решения первой тестовой задачи применялось (с учетом соотношений $\text{div}(\partial \bar{U} / \partial t) \equiv 0$, $T|_{t=0} = 0$ и краевого условия вида $\theta|_{\partial G} = \psi(s), \psi(s) = T_0$) дифференциальное

уравнение теплопроводности $\rho c_{\varepsilon=0} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \alpha_T (3\lambda + 2\mu) T_0 \text{div}(\partial \bar{U} / \partial t) = \text{div}(\lambda_q \text{grad} \theta)$, входящее

в систему уравнений (1). На рис. 4 в расчетной области G приведена сетка, используемая в первой тестовой задаче.

Результат численного решения (разностная схема Дугласа – Писмана – Рекфорда [6]) этой тестовой задачи показан на рис. 5. В данном тесте величина невязки $\varepsilon = 10^{-3}$, число итераций 8321, максимальная величина абсолютной ошибки 0.131×10^{-2} [K].

Вторая тестовая задача (рис. 7) математической модели (1) основывалась на поиске температурного поля $T(x, y)$ в изотропном материале с источниками теплоты q_V , которые располагаются в расчетной области G (см. рис. 3, рис. 4). Это температурное поле $T(x, y)$ может быть определено с помощью решения 1-ой краевой задачи ($T|_{\partial G} = \psi(s)$) уравнения двумерной стационарной теплопроводности $\Delta T = \varphi$, $\varphi = -q_V / \lambda_q$.

В данной ситуации использовалось точное решение $T(x, y) = C(Y - y)y(X - x)x$ (константы имеют следующие значения: $C = 100$, $X = 1$, $Y = 1$) уравнения Пуассона $\Delta T = \varphi$, $\varphi|_{r \subset G} = -2 \cdot C \{x(X - x) + y(Y - y)\}$, $T|_{\partial G} = \psi(s)$. Это решение $T(x, y)$ следующим способом определяет краевую функцию: $\psi|_{\partial G} = C(Y - y)y(X - x)x$. Начальное условие для рассматриваемого итерационного процесса задавалось в виде $T = 0$.

На рис. 7 приведен результат численного решения (разностная схема Дугласа – Писмана – Рекфорда [6]) второй тестовой задачи. В этом случае значение невязки $\varepsilon = 10^{-3}$, число итераций 10889, максимальная величина абсолютной ошибки 0.12 [K].

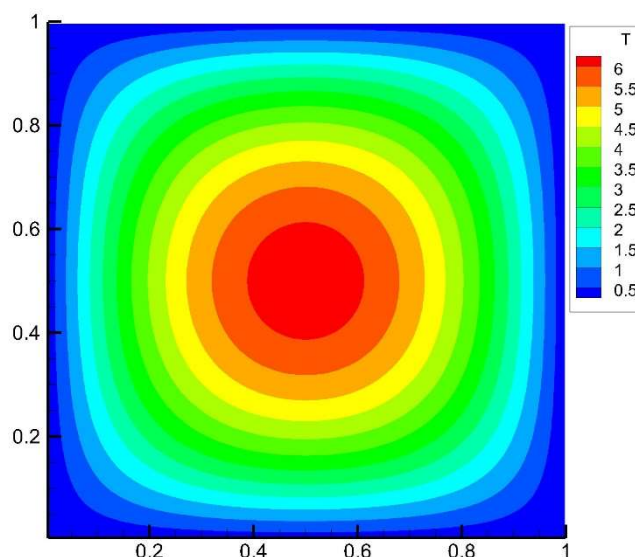


Рис. 7. Температурное поле T [K], полученное при решении второй тестовой задачи

В третьей тестовой задаче (рис. 8, рис. 9), которая связана с определением деформаций (перемещений $\vec{U} = (u, v)^T$) в конструктивных элементах ЛА, использовалось векторное уравнение

$$\mu \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\vec{U})) + (\lambda + \mu) \vec{P}(\vec{U}) - \vec{f} = 0, \quad \vec{f} = (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \operatorname{grad}(\theta), \quad \vec{f} \equiv 0,$$

с краевым условием: $\vec{U}|_{\partial G} = (1, 1)^T$.

Начальное условие в этом случае задавалось в виде $\vec{U} = (u = 0, v = 0)^T$. В данном тестовом расчете (разностная схема Дугласа – Писмана – Рекфорда [6]) величина невязки составила величину $\varepsilon = 10^{-3}$, число итераций 106762, максимальное значение абсолютной ошибки 0.91×10^{-5} .

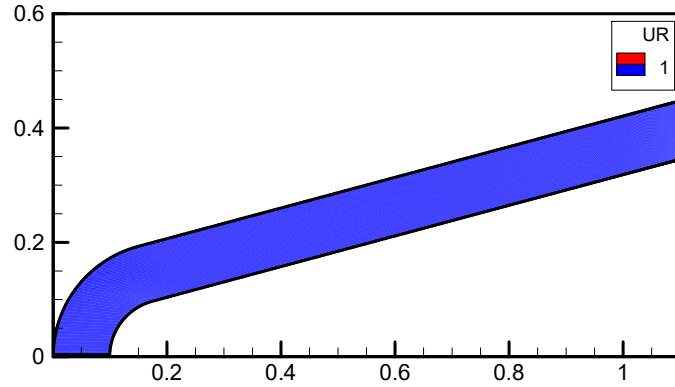


Рис. 8. Радиальная компонента перемещения U_r , полученная при решении первой тестовой задачи, связанной с расчетом деформаций в конструктивных элементах ЛА

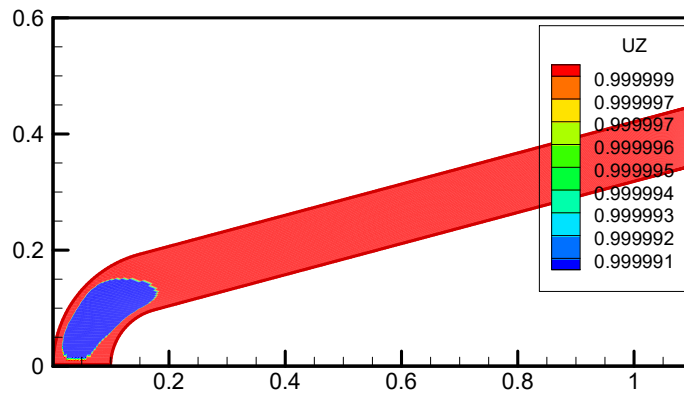


Рис. 9. Продольная компонента перемещения U_z , полученная при решении первой тестовой задачи, связанной с расчетом деформаций в конструктивных элементах ЛА

В четвертой тестовой задаче также используется первое уравнение системы (1), но величина $\vec{f} \neq 0$. Этот тест основывается на векторном аналитическом варианте решения следующего вида: $u(x, y) = C_1(Y - y)y(X - x)x$, $v(x, y) = C_2(Y - y)y(X - x)x$ (константы имеют следующие значения: $C_1 = 100$, $C_2 = 100$, $X = 1$, $Y = 1$)

Для этого правая часть \vec{f} уравнения $\mu \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\vec{U})) + (\lambda + \mu)\vec{P}(\vec{U}) - \vec{f} = 0$ должна быть записана в виде

$$f_1|_{r \subset G} = -2 \cdot \mu C_1 \{x(X - x) + y(Y - y)\} + \varphi_1, \quad f_2|_{r \subset G} = -2 \cdot \mu C_2 \{x(X - x) + y(Y - y)\} + \varphi_2,$$

где $\varphi_1 = -2(\lambda + \mu)C_1(Y - y)y + (\lambda + \mu)C_2\{(X - x)(Y - y) - x(Y - y) - y(X - x) + xy\}$,

$$\varphi_2 = -2(\lambda + \mu)C_2(X - x)x + (\lambda + \mu)C_1\{(X - x)(Y - y) - x(Y - y) - y(X - x) + xy\}$$

Начальное условие задавалось в виде $\vec{U} = (u = 0, v = 0)^T$. В этом тестовом расчете (разностная схема Дугласа – Писмана – Рекфорда [6], рис. 10) величина невязки составила величину $\varepsilon = 10^{-1}$, число итераций 117337, максимальное значение абсолютной ошибки 0.1248087.

В пятой тестовой задаче рассмотрим определение температурных напряжений в бесконечно большой (относительно координаты x , рис. 11) пластине толщиной δ . На верхней и нижней плоскостях данной пластины (рис. 11) задаются постоянные температуры T_1 и T_2 . Начальная температура тела $T_0 = T_2$.

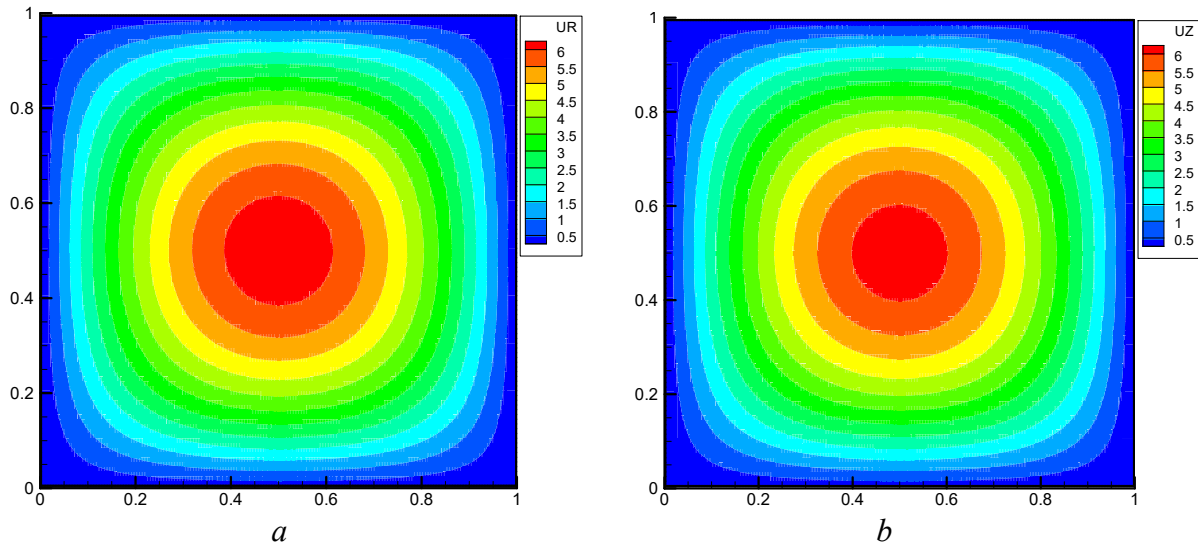


Рис. 10. Радиальная U_r (a) и поперечная U_z (b) компоненты перемещения, полученная при решении второй тестовой задачи, связанной с расчетом деформаций в конструктивных элементах ЛА

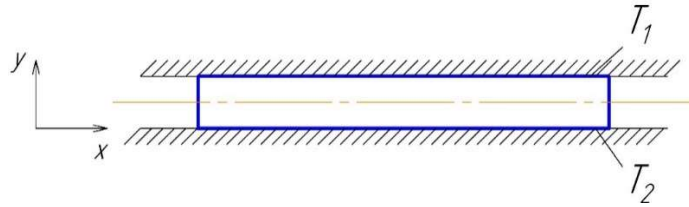


Рис. 11. Схема тестовой задачи по определению температурных напряжений в бесконечно большой пластине

В такой ситуации перемещения вдоль координаты x равны $v = 0$, а температура $T(\bar{y}) = T_2 + (T_1 - T_2)\bar{y}$ и поперечное перемещение $u(y)$ материала пластины является только функцией безразмерной координаты $\bar{y} = y/\delta$. Тогда деформационное уравнение (1), а также граничные условия (в безразмерной форме: $\bar{u} = u/\delta$) относительного перемещения \bar{u} можно записать в следующем виде:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{y}^2} = (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \Delta T, \quad \bar{u}|_{\bar{y}=0} = 0, \quad \bar{u}|_{\bar{y}=1} = 0, \quad \Delta T = T_1 - T_2$$

Аналитическое решение этой задачи (расчет температурных перемещений \bar{u}, \bar{v} , деформаций $\varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xx}$ и напряжений $\sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{xx}$ в бесконечно большой пластине) можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{(3\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \alpha_T \Delta T \left[\bar{y}^2 - \bar{y} \right], \quad \bar{v} = 0, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{(3\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \alpha_T \Delta T [2\bar{y} - 1], \quad \varepsilon_{xx} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad \varepsilon_{yx} = 0, \\ \sigma_{yy} &= -\frac{(3\lambda + 2\mu)}{2} \alpha_T \Delta T, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xx} = \lambda \varepsilon_{yy} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \Delta T \bar{y} \end{aligned}$$

Используем аналитическое решение этой задачи для тестирования разрабатываемого вычислительного кода. С этой целью возьмем прямоугольную пластину со следующими геометрическими размерами: длина $L = 20$ м, толщиной $\delta = 1$ м (см. рис. 11). Будем считать, что пластина изготовлена из Al и обладает следующими механическими и теплофизическими свойствами (см. табл. 2):

$$\alpha_T = 2.39 \times 10^{-5} \text{ 1/K}, E = 70 \text{ ГПа}, \nu = 0.34, \lambda_q = 200 \text{ Вт/(м·К)}$$

Верхняя поверхность пластины равномерно нагрета до температуры $T_1 = 32^\circ \text{C}$, нижняя поверхность до $T_2 = 12^\circ \text{C}$. Отметим, что такая конфигурация теплового воздействия на пластину вызывают напряжения, которые растягивают (в поперечном направлении) пластину у более нагретой поверхности и сжимают её у менее нагретой поверхности. При расчете использовалась разностная схема Дугласа – Писмана – Рекфорда [6], величина невязки составила величину $\varepsilon = 10^{-3}$, число итераций 21855.

Расчет по аналитическим формулам по теплофизическим параметрам Al дает следующее значение величины термического напряжения в поперечном направлении: $\sigma_{yy} = -5.52687 \times 10^{-2} \text{ ГПа}$.

Из графических результатов (рис. 12, б) следует, что значение напряжения $\sigma_{yy} = -5.5265 \times 10^{-2} \text{ ГПа}$ (которое получено с помощью разработанного вычислительного кода) неизменно в поперечном направлении и хорошо соотносится с напряжением (рис. 13, б), предсказываемым аналитической формулой.

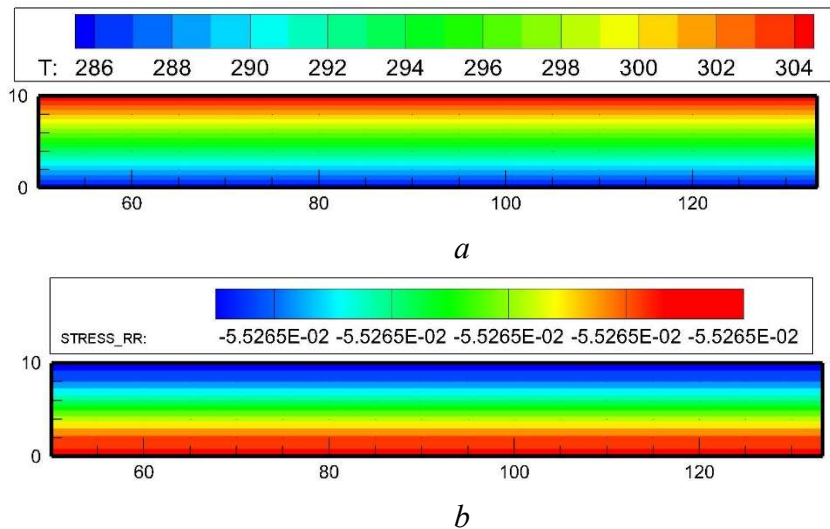


Рис. 12. Температурное T [K] (а) и радиальное распределение напряжение σ_{yy} [ГПа] (б), полученное из расчета теплового расширения бесконечно большой пластины

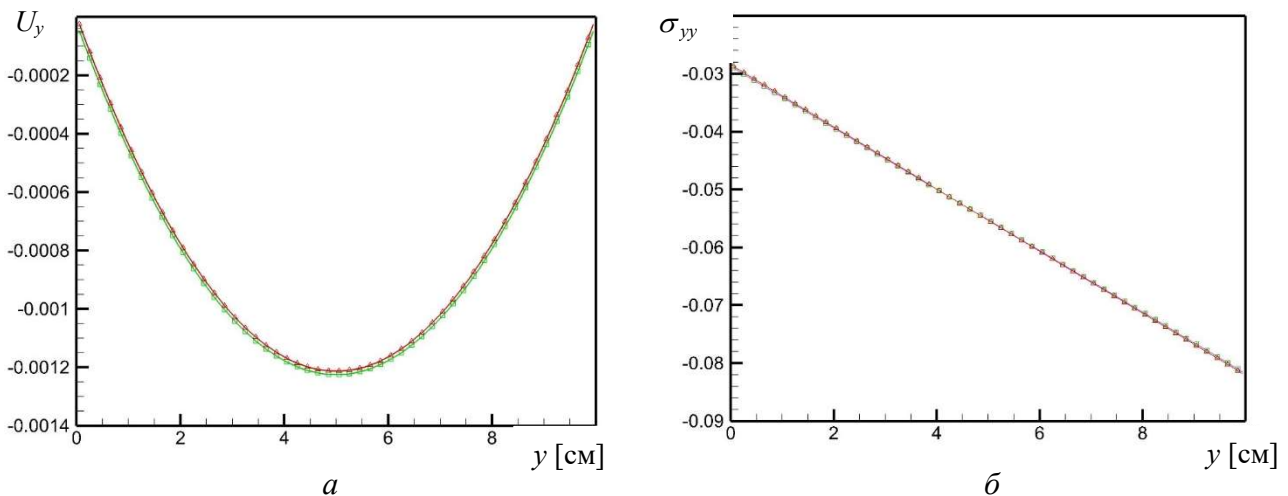


Рис. 13. Поперечная компонента перемещения U_y [см] (а) и напряжения σ_{yy} (б), полученные в результате расчета теплового расширения бесконечно большой пластины
— аналитический расчет; — численный расчет

В шестой тестовой задаче расчетная область Ω представляет собой квадрат $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$. В этой задаче моделирует теплофизические и термомеханические процессы, протекающие в ключевом элементе (сфера, сопряженная с клином или конусом, рис. 14) летательного аппарата. Для данного теста на рис. 14 указано соответствие (с помощью цвета линий) границ $\partial\Omega$ и ∂G , отмечена топологическая эквивалентность области Ω (a), в которой выполняются тестовые расчеты, и основной «физической» области G (b).

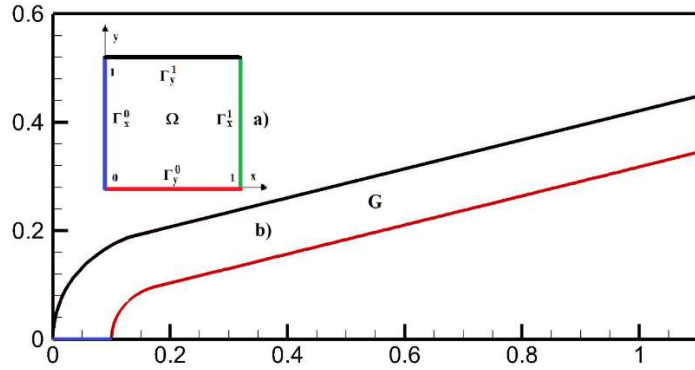


Рис. 14. Расчетная область в задаче о свободном тепловом расширении

При этом используются следующие обозначения (см. рис. 14):

$$\Gamma^i = \Gamma_x^i \cup \Gamma_y^i, \quad i = 0, 1; \quad \Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^0 \cup \Gamma_\alpha^1, \quad \alpha = x, y$$

При решении тестовой задачи будем считать, что поле температуры T внутри квадратной области (рис. 14) однородно: $T(x, y) \equiv T_0 + \Delta T$, $\Delta T = \text{const}$. Систему уравнений, описывающую решение данной задачи, можно записать в следующей форме:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d^2 u}{dy^2} = 0, \quad (\lambda + 2\mu) \frac{d^2 v}{dx^2} = 0,$$

а граничные условия ($u_x = v$, $u_y = u$) представим в виде следующей записи:

$$u_x|_{\Gamma_x^0} = 0, \quad \sum_j \sigma_{yj} n_j \Big|_{\Gamma_x^0} = 0, \quad u_y|_{\Gamma_y^0} = 0, \quad \sum_j \sigma_{xj} n_j \Big|_{\Gamma_y^0} = 0, \quad \sum_j \sigma_{ij} n_j \Big|_{\Gamma^1} = 0; \quad i = 1, 2$$

То есть на (нижней) границе Γ_y^0 заданы нулевые перемещения $u_y|_{\Gamma_y^0} = 0$ по y , а на (левой) границе Γ_x^0 заданы нулевые перемещения $u_x|_{\Gamma_x^0} = 0$ по x . Остальная часть границы (т.е. Γ_x^1 и Γ_y^1) квадратной расчетной области (рис. 14) может свободно перемещаться.

Напомним, что граничные условия в деформациях ε_{ij} связаны с граничными условиями в напряжениях σ_{ij} следующей зависимостью:

$$\sum_j \sigma_{ij} n_j = 2\mu \sum_{j=1}^2 \varepsilon_{ij} n_j + \left[\lambda \sum_k \varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) \right] \sum_j \delta_{ij} n_j = f_i$$

Здесь σ_{ij} – векторы напряжений на площадках, внешние нормали которых совпадают с положительными направлениями координатных осей x_j ; n_j – компоненты единичного вектора \vec{n} равные косинусам углов между вектором \vec{n} и осями x_j ; f_i – заданная компонента внешней силы, действующая на элемент поверхности в i -м направлении.

В рассматриваемой задаче о свободном тепловом расширении величина $f_i \equiv 0$. При рассмотрении условия равновесия объемные силы обычно не учитываются, так как они являются величинами более высокого порядка малости.

Аналитическое решение задачи о свободном тепловом расширении находится относительно безразмерных переменных $\bar{x} = x/\delta$, $\bar{y} = y/\delta$ и $\bar{u} = u/\delta$, $\bar{v} = v/\delta$

$$\bar{u}_x = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{2(\mu + \lambda)}(\alpha_T \Delta T \cdot \bar{x}), \quad \bar{u}_y = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{2(\mu + \lambda)}(\alpha_T \Delta T \cdot \bar{y}),$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{2(\mu + \lambda)}\alpha_T \Delta T, \quad \varepsilon_{xy} = 0, \quad \varepsilon_{yx} = 0,$$

$$\sigma_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2$$

В этом варианте тестового расчета (разностная схема Дугласа – Писмана – Рекфорда [6], рис. 16) величина невязки составила величину $\varepsilon = 10^{-5}$, число итераций 53952. Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 15 и рис. 16.

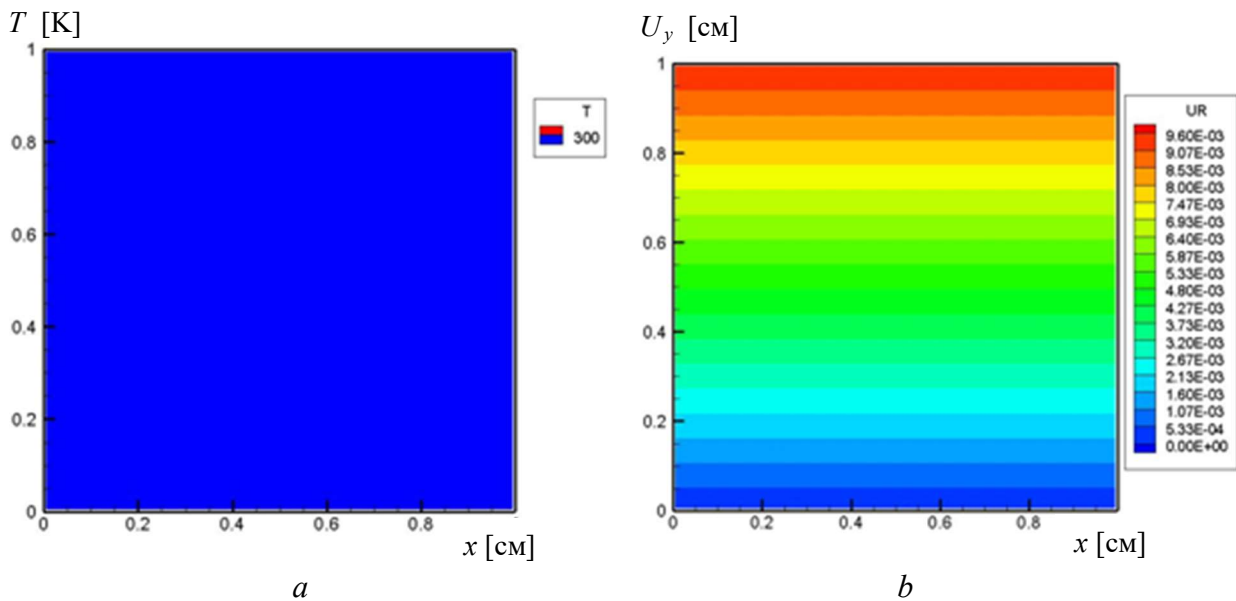


Рис.15. Температурное поле T [K] (а) и поле поперечного компонента перемещения U_y (б), полученные из расчета задачи о свободном тепловом расширении

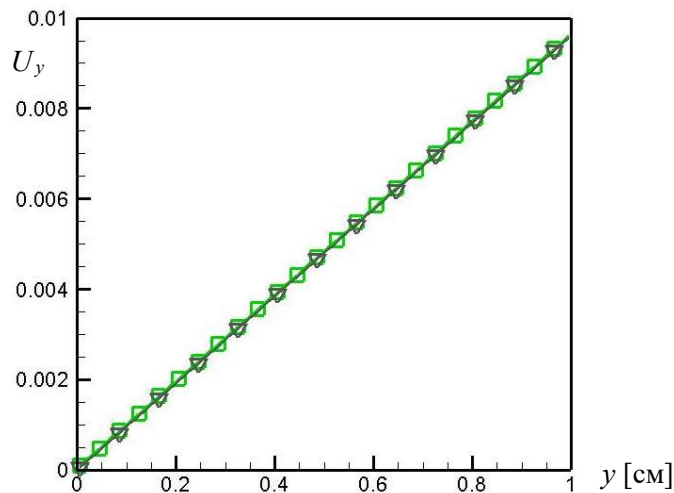


Рис. 16. Поперечная компонента перемещения U_y [см], которая получена в результате решения задачи о свободном тепловом расширении.

— аналитический расчет; — численный расчет

6. Заключение

Сформулирована 2D расчетно-теоретическая методика (для структурированной расчетной сетки), позволяющая находить решение системы уравнений линейной термоупругости с граничными условиями общего вида для ключевых элементов летательного аппарата, движущегося со сверхзвуковой и гиперзвуковой скоростью в атмосфере Земли. Проведена разработка численной методики нахождения решения 2D уравнений термоупругости.

В работе принято, что эффект связанности полей деформации и температуры мал. Поэтому 2D расчетно-теоретическая методика основана на последовательном решении дифференциальных уравнений теплопроводности и обобщенного закона Гука с учетом термонапряжений:

- на первом этапе рассчитывается поле температуры в конструкции ЛА;
- на втором этапе выполняется расчет термических напряжений и деформации конструктивных элементов ЛА под действием температурного поля.

Выполнено первоначальное численное моделирование температурных полей и термонапряжений в простейших элементах конструкций летательных аппаратов.

Из выполненных расчетов следует, что численное моделирование физических процессов, протекающих на поверхности (и в ближайшей окрестности) высокоскоростных летательных аппаратов, необходимо проводить на основе комплексных, взаимно согласованных, сопряженных математических моделей аэротермодинамики, теплообмена и термопрочности.

Литература

1. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
2. Зализняк В. Е. Основы вычислительной физики Часть 1. Введение в конечно-разностные методы. Техносфера, Москва, 2008. 223 с.
3. Коваленко А.Д. Термоупругость. Учебное пособие. К.: Вища школа, 1975. 215 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие: Для вузов. В 10 т. Т. VII. Теория упругости. – 5-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2003. – 264 с – ISBN 5-9221-0122-6.
5. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Т. 1: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 384 с.
6. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – М.: Физматгиз, 1958. – 167 с.
7. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 590 с.
8. Альшина Е.А., Болтнев А.А., Качер О.А. Эмпирическое улучшение простейших градиентных методов // Математическое моделирование. 2005. Т. 17, № 6. С. 43–57.
9. Головачев Ю.П. Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. М.: Наука, 1996. 376 с.
10. Григорьев Ю.Н., Вшивков В.А., Федорук М.П. Численное моделирование методами частиц в ячейках Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т выч. технологий, Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2004. 360 с.
11. Thompson J.F. Numerical Grid Generation. – Amsterdam, North-Holland: Elsevier Science, 1985. – ISBN 0-444-00985-X.
12. Вабищевич П.Н., Пулатов С.И. Вычислительный алгоритм конформного отображения // Математическое моделирование. – Январь 1989. – Т. 1, № 1. – С. 132–139.
13. Handbook of Grid Generation / Ed. by J.F. Thompson, B.K. Soni, N.P. Weatherill. – CRC Press LLC, 1999. – ISBN 0-8493-2687-7.
14. Методы вычислительной гидродинамики для анализа безопасности объектов ТЭК.: Т78 Труды ИБРАЭ РАН / под общ. ред. чл.-кор. РАН Л. А. Большова. – Вып. 3. – М.: Наука, 2008. – 207 с.: ил. ISBN 978-5-02-036941-2

15. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование Изд. физ.-мат. лит., 2002. 472 с.
16. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам / Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1985. 304 с.
17. Nakamura S. Noniterative grid generation using parabolic difference equations for fuselage-wing flow calculations. VIII Internat. Conf. Numer. Meth. in Fluid Dynamics. Aachen, Germany, June 1982.
18. Ерёмин В.В., Михалин В.А. Построение вычислительной сетки для расчёта обтекания тел сложной геометрической формы. Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики: Сб. науч. тр. / Под ред. Г.П. Воскресенского и А.В. Забродина. – М., ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1991.
19. Михалин В.А. Модификация параболического генератора сеток. Вопр. атомной науки и техн. – Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 1995. № 1–2.
20. Годунов С. К. “Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики”, Матем. сб., 47(89):3 (1959), С. 271–306.
21. Ковеня В. М., Чирков Д. В. Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики. Новосибирск: Издательство Новосибирского государственного университета, 2013. 86 с.
22. Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Approximate calculation of convective heat transfer near hypersonic aircraft surface // Journal of Enhanced Heat Transfer. 2018. V. 25 (2). Pp. 181–193.
23. Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Calculation of heat transfer and drag coefficients for aircraft geometric models // Applied Sciences. 2022. V. 12. P. 11011.
24. Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Numerical Simulation of Pulsed Jets of a High-Current Pulsed Surface Discharge // Computational Thermal Sciences. 2021. V. 13. Pp. 45–56.
25. Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V., Starostin A.V. Development of a Mathematical Model and the Numerical Solution Method in a Combined Impact Scheme for MIF Target // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2020. V. 16. No. 2. Pp. 325–341.
26. Котов М.А., Рулева Л.Б., Солодовников С., Суржииков С.Т. Проведение экспериментов по обтеканию моделей в гиперзвуковой ударной аэродинамической трубе // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2013. Т. 14, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2013-14-4/articles/428/>
27. Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А. Моделирование турбулентности в сверхзвуковых струйных течениях // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2010. Том 9. <http://chemphys.edu.ru/issues/2010-9/articles/142/>

Reference

1. Kartashov E. M., *Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids*, Ed. 3rd, revised and additional, М.: Higher school, 2001, 550 p. [in Russian].
2. Zaliznyak V. E., *Fundamentals of Computational Physics Part 1. Introduction to finite difference methods*, Technosphere, Moscow, 2008. 223 p. [in Russian].
3. Kovalenko A. D., *Thermoelasticity. Tutorial*, K.: Vishcha shkola, 1975, 215 p. [in Russian].
4. Landau L. D., Lifshits E. M., *Theoretical physics: Proc. allowance: For universities*. In 10 vols., *Theory of elasticity*, 5th ed., stereo. М.: FIZMAT LIT, 2003, 264 p. - ISBN 5-9221-0122-6 (Vol. VII). [in Russian].
5. Anderson D., Tannehill J., Pletcher R., *Computational fluid mechanics and heat transfer: In 2 vols.*, vol. 1, М.: Mir, 1990. 384 p. [in Russian].
6. Melan E., Parkus G., *Thermoelastic stresses caused by stationary temperature fields*, М.: Fizmatgiz, 1958, 167 p. [in Russian].
7. Samarsky A. A., Nikolaev E. S., *Methods for solving grid equations*. М.: Nauka, 1978. 590 p. [in Russian].
8. Alshina E. A., Boltnev A. A., Kacher O. A., Empirical improvement of the simplest gradient methods, *Mathematical Modeling*, 2005, vol. 17, no. 6, pp. 43–57.

9. Golovachev Yu. P., *Numerical simulation of viscous gas flows in the shock layer*, M.: Nauka, 1996, 376 p. [in Russian].
10. Grigoriev Yu. N., Vshivkov V. A., Fedoruk M. P., *Numerical simulation by methods of particles in cells*, Ros. acad. Sciences, Sib. department, In-t calc. technologies, Novosib. state un–t. Novosibirsk: Publishing House of SO RAN, 2004. 360 p. [in Russian].
11. Thompson J. F., *Numerical Grid Generation*, Amsterdam, North-Holland: Elsevier Science, 1985. ISBN 0-444-00985-X.
12. Vabishchevich P. N., Pulatov S. I., Computational algorithm for conformal mapping, *Mathematical Modeling*, 1989, vol. 1, no. 1, pp. 132–139. [in Russian].
13. *Handbook of Grid Generation*, ed. by J. F. Thompson, B. K. Soni, N. P. Weatherill, CRC Press LLC, 1999. ISBN 0-8493-2687-7.
14. *Methods of computational fluid dynamics for safety analysis of fuel and energy facilities.* : T78 Proceedings of IBRAE RAN / ed. Corresponding Member RAS L. A. Bolshova, issue 3, M.: Nauka, 2008, 207 p. : ill. ISBN 978-5-02-036941-2 [in Russian].
15. Golovanov N. N., *Geometric Modeling*, Publ. H. Phys.-Math. Lit., 2002. 472 p. [in Russian].
16. De Boron K., *A practical guide to splines*, Trans. from English, M.: Radio and communication, 1985, 304 p. [in Russian].
17. Nakamura S., Noniterative grid generation using parabolic difference equations for fuse-lage-wing flow calculations, *VIII Internat. Conf. Numer. Meth. in Fluid Dynamics*, Aachech, Germany, 1982.
18. Eremin V. V., Mikhalin V. A., *Construction of a computational grid for calculating the flow around bodies of complex geometric shape. Designing algorithms and solving problems of mathematical physics: Sat. scientific works*, Ed. by G. P. Voskresensky and A. V. Zabrodin, M., Keldysh In-t of App. Math. RAN, 1991. [in Russian].
19. Mikhalin V. A., Modification of the parabolic grid generator, *Questions of nuclear science and technology. Ser. Mat. physical modeling. processes.* 1995, no. 1–2. [in Russian].
20. Godunov S. K., Difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations, *Math. Book.*, 1959, vol. 47(89):3, pp. 271–306. [in Russian].
21. Kovenya V. M., Chirkov D. V., *Methods of finite differences and finite volumes for solving problems of mathematical physics*, Novosibirsk: Novosibirsk State University Press, 2013, 86 p. [in Russian].
22. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V., Approximate calculation of convective heat transfer near hypersonic aircraft surface, *Journal of Enhanced Heat Transfer*, 2018, vol. 25, no. 2, pp. 181–193.
23. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V., Calculation of heat transfer and drag coefficients for aircraft geometric models, *Applied Sciences*, 2022, vol. 12, P. 11011.
24. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V., Numerical Simulation of Pulsed Jets of a High-Current Pulsed Surface Discharge, *Computational Thermal Sciences*, 2021, vol. 13, pp. 45–56.
25. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V., Starostin A. V., Development of a Mathematical Model and the Numerical Solution Method in a Combined Impact Scheme for MIF Target, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 16, no. 2, pp. 325–341. <https://doi.org/10.20537/nd200207>. [in Russian].
26. Kotov M. A., Ruleva L. B., Solodovnikov S., Surzhikov S. T., Carrying out experiments on the flow around models in a hypersonic shock wind tunnel, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2013, vol. 14, no. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2013-14-4/articles/428/>. [in Russian].
27. Glushko G. S., Ivanov I. E., Kryukov I. A., Modeling of turbulence in supersonic jet flows, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2010, vol. 9. <http://chemphys.edu.ru/issues/2010-9/articles/142/>. [in Russian].

Статья поступила в редакцию 8 марта 2023 г.