

Software Package HySol for the Numerical Simulation of High-Speed Flows

I. A. Kryukov^{1,3}, I. E. Ivanov^{2,3}, E. V. Larina³

¹*Ishlinskyi Institute for Problems in Mechanics Russian Academy of Sciences (IPMech RAS), Moscow, 119526, Russia*

²*Moscow State University, Moscow, 119991, Russia*

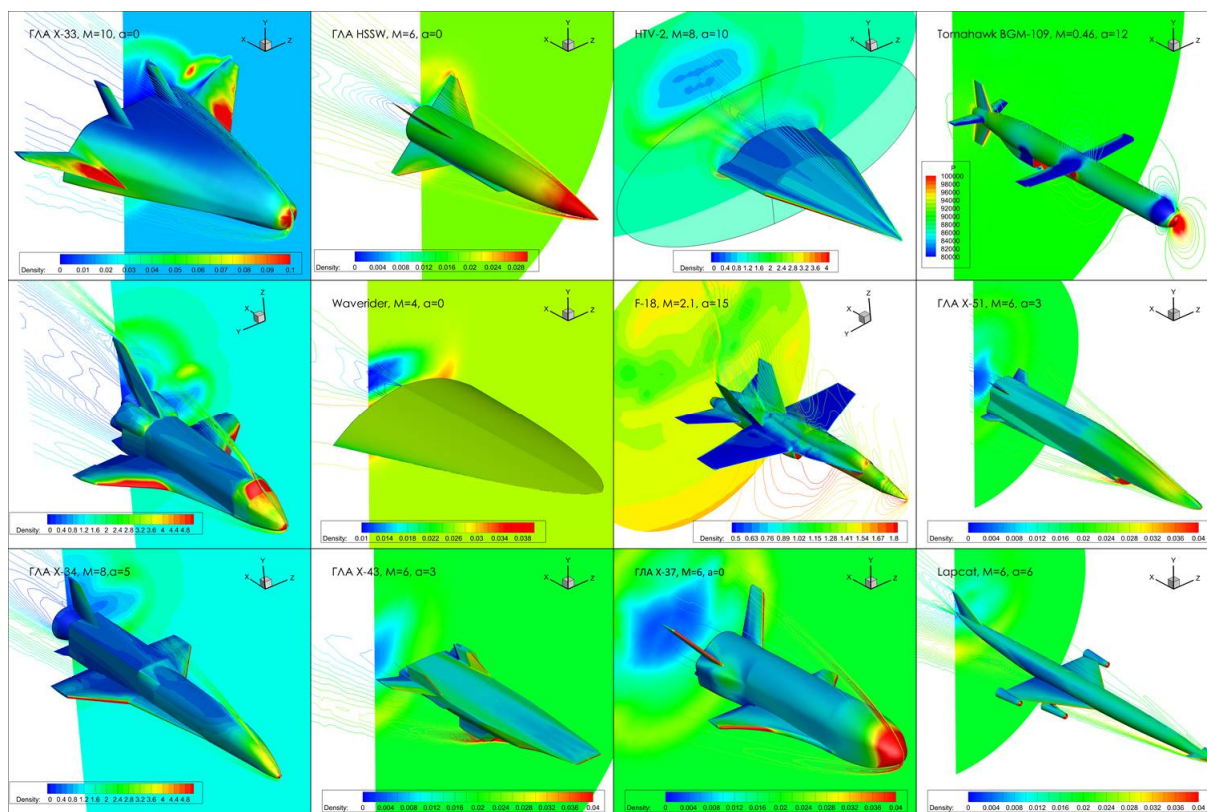
³*Moscow Aviation Institute, Moscow, 121993, Russia*

kryukov@ipmnet.ru

Abstract

The paper presents the experience of developing the hySol software package intended for numerical simulation of high-speed flows in the presence of a complex shock-wave structure. The used finite-difference scheme and software implementation are described. Examples of calculations are given.

Keywords: high-speed flows, computational aerodynamics, unstructured grid, Godunov method



Some examples of calculations of the external flow around high-speed vehicles obtained using the hySol solver

УДК 533.6

Программный комплекс расчета высокоскоростных течений **hySol**

И.А. Крюков^{1,3}, И.Э. Иванов^{2,3}, Е.В. Ларина³

¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
Россия, Москва, 119526, просп. Вернадского, 101-1*

² *Московский Государственный Университет,
Россия, Москва, 119991, Ленинские горы, 1*

³ *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Россия, Москва, 121993, Волоколамское шоссе, 4
kryukov@ipmnet.ru*

Аннотация

В работе представлен опыт создания программного комплекса **hySol**, предназначенного для моделирования высокоскоростных течений при наличии сложной ударно-волновой структуры в течении. Описаны используемая разностная схема и программная реализация. Приводятся примеры расчетов

Ключевые слова: сверхзвуковые течения, вычислительная аэродинамика, неструктурированная сетка, метод Годунова.

1. Введение

Сверхзвуковые скорости и условия, реализующиеся на больших высотах, сильно ограничивают возможности экспериментального изучения течений около летательных аппаратов (ЛА). Поэтому существенную помощь в проектировании сверхзвуковых и гиперзвуковых летательных аппаратов может оказать численное моделирование. С одной стороны, перспективные ЛА имеют сложную геометрическую форму, а поле течения около них может содержать большое количество сильных ударных волн, которые сформировались при обтекании носовой части ЛА, кромок крыльев, воздухозаборника и т.п. С другой стороны, требуется довольно высокая точность и надежность получаемых результатов (особенно распределений температуры и тепловых потоков).

Это стимулирует интенсивное развитие численных методов и их отдельных элементов для расчета течений данного класса. Интенсивно развиваются компьютерные технологии и программные комплексы построения геометрии и расчетных сеток для трехмерных объектов сложной геометрической формы. Развиваются и компьютерные средства, и технологии, в том числе в области параллельных вычислений и визуализации. Это отражается в разработке и совершенствовании "исследовательских" программных комплексов моделирования высокоскоростных течений. В качестве примера можно привести программные комплексы *FlowModellium* [1], программный комплекс [2–3], разрабатываемый в Военмех им. Д.Ф. Устинова, *Euler3n* [4], *NOISETTE* [5], *UST3D* [6] и ряд других, которые ориентированы на использование неструктурированных сеток.

В настоящей статье описывается программный комплекс **hySol**, разрабатываемый для расчета высокоскоростных течений около тел сложной геометрической формы, и некоторые примеры его использования.

Первоначально программный комплекс [7] разрабатывался параллельно с генератором трехмерных тетраэдральных сеток [8, 9]. Затем работы по генератору сеток были приостановлены, а программный комплекс был переориентирован на использование гибридных

расчетных сеток, которые состоят из тетраэдров, пирамид, призм и шестигранников. Эта версия программного комплекса получила название ug3D. Появилась возможность для построения расчетных сеток использовать известные генераторы сеток: Gambit, GMSH, Pointwise и др. Примеры использования ug3D можно найти в работах [10–17]. Текущая версия программного комплекса называется hySol и отличается от предыдущей версией несколько расширенной математической моделью и отдельными деталями численного метода и программной реализации.

2. Математическая модель

В программном комплексе hySol в качестве математической модели принята система пространственных нестационарных уравнений Навье–Стокса (Рейнольдса) с соответствующими граничными условиями, предназначенная для описания течений сжимаемого, вязкого идеального газа. Все уравнения записываются в неинерциальной, связанной с телом, системе координат и для записи используются компоненты относительной скорости [18–20]. Неинерциальность системы отсчета учитывается при помощи введения в источниковый член кориолисовой силы и силы, связанной с переносным ускорением. В векторной форме система уравнений будет выглядеть так:

$$\partial_t Q + \nabla \cdot \vec{F}^c - \nabla \cdot \vec{F}^v = H, \quad (1)$$

где $Q = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, E)^T$ – вектор консервативных переменных; ρ – плотность газа; $\vec{V}_r = (u_1, u_2, u_3)$ – относительная скорость; \vec{F}_i^c – вектор невязких потоков в i -м координатном направлении; \vec{F}_i^v – вектор вязких потоков; H – источниковый член

$$\vec{F}_i^c = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p \delta_{i1} \\ \rho u_i u_2 + p \delta_{i2} \\ \rho u_i u_3 + p \delta_{i3} \\ u_i (E + p) \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_i^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{i1} \\ \tau_{i2} \\ \tau_{i3} \\ u_i (\tau_{i1} + \tau_{i2} + \tau_{i3}) + \lambda \partial_i T \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho [2(\omega_y u_3 - \omega_z u_2) + (\vec{\omega} \vec{r}) \omega_x - \vec{\omega}^2 x + \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + a_1] \\ -\rho [2(-\omega_x u_3 + \omega_z u_1) + (\vec{\omega} \vec{r}) \omega_y - \vec{\omega}^2 y - \varepsilon_z z + \varepsilon_z x + a_2] \\ -\rho [2(\omega_x u_2 - \omega_y u_1) + (\vec{\omega} \vec{r}) \omega_z - \vec{\omega}^2 z + \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + a_3] \\ -\frac{1}{2} \rho [(\vec{\omega} \vec{\varepsilon}) \vec{r}^2 - (\vec{\varepsilon} \vec{r})(\vec{\omega} \vec{r})] - \frac{1}{2} \rho [\vec{\omega}^2 (\vec{V}_r \vec{r}) - (\vec{\omega} \vec{r})(\vec{V}_r \vec{\omega})] \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В уравнениях (2) и (3) p – статическое давление; T – температура; $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ – угловая скорость вращения подвижной системы координат; $\vec{r} = (x, y, z)$ – радиус вектор рассматриваемой точки в подвижной системе координат; \vec{a} – ускорение поступательного движения подвижной системы координат относительно абсолютной; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ – вращательное ускорение; E – полная энергия $E = \rho e + \rho \vec{V}_r^2 / 2$; e – внутренняя энергия.

Тензор вязких напряжений записывается в виде $\tau_{ij} = \mu (\partial_j u_i + \partial_i u_j - (2/3) \delta_{ij} \nabla \cdot \vec{V}_r)$. Индексы i, j обозначают 3–D декартовы координаты, по повторным индексам проводится суммирование; μ это коэффициент динамической ламинарной вязкости; λ – коэффициент теплопроводности; δ_{ij} – символ Кронекера.

Система трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса (1–3) замыкается термическим и калорическим уравнениями состояния идеального совершенного газа

$$\rho = \rho(T, p) = \frac{mp}{RT}, \quad e = e(T, p) = \frac{p}{(\gamma - 1)},$$

где R – универсальная газовая постоянная; m – молекулярный вес; γ – отношение теплоемкостей.

3. Численный метод

Для дискретизации уравнения (1) расчетная область разбивается на N непересекающихся объемов (ячеек) $\{C_i\}_{i=1}^N$. В программном комплексе `hySol` используются ячейки четырех видов: тетраэдры, призмы, пирамиды и шестигранники. Объем V_i и центр \vec{r}_i каждой ячейки определяются следующим образом:

$$V_i = \int_{C_i} dV, \quad \vec{r}_i = \frac{1}{V_i} \int_{C_i} \vec{r} dV \quad (4)$$

Уравнение (1) интегрируется по ячейке C_i с границей ∂C_i с применением теоремы Гаусса–Остроградского

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{C_i} Q dV + \oint_{\partial C_i} \vec{F}^c \vec{n} dS - \oint_{\partial C_i} \vec{F}^v \vec{n} dS = \int_{C_i} H dV \quad (5)$$

в предположении, что геометрия ячейки не зависит от времени. Через \vec{n} обозначается вектор внешней нормали к границе ячейки. Вводя интегральное среднее по ячейке значение Q в момент времени t

$$\bar{Q}_i(t) = \frac{1}{V_i} \int_{C_i} Q dV \quad (6)$$

уравнение (5) записывается в полудискретном виде

$$\frac{d\bar{Q}_i}{dt} = R_i(\bar{Q}), \quad (7)$$

где $R_i(\bar{Q})$ – вектор невязки

$$R_i(\bar{Q}) = -\frac{1}{V_i} \left(\oint_{\partial C_i} \vec{F}^c \vec{n} dS - \oint_{\partial C_i} \vec{F}^v \vec{n} dS - \int_{C_i} H dV \right) \quad (8)$$

Следует отметить, что в каждой точке пространства уравнение (7) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которая может быть аппроксимирована по t любым из методов, разработанных для решения ОДУ. Вдоль любой линии $t = \text{const}$ вектор невязки (8) является чисто пространственным оператором от Q и поэтому запись (7) используется для того, чтобы подчеркнуть "разделение" пространственной и временной аппроксимаций уравнения (1).

Рассмотрим сначала пространственную аппроксимацию уравнения (7). Представим интеграл по границе ячейки в виде суммы интегралов по отдельным граням

$$\oint_{\partial C_i} \vec{F} \vec{n} dS = \sum_{j \in NB_i} \oint_{\partial C_{ij}} \vec{F} \vec{n} dS,$$

где NB_i – множество соседей ячейки i ; ∂C_{ij} – грань, разделяющая ячейки i и j .

Введем среднее по грани ∂C_{ij}

$$\tilde{F}_{ij} \bar{n}_{ij} = \frac{1}{S_{ij}} \oint_{\partial C_{ij}} \vec{F} \bar{n} dS, \quad (9)$$

где S_{ij} – площадь грани. Тогда

$$\oint_{\partial C_i} \vec{F} \bar{n} dS = \sum_{j \in NB_i} \tilde{F}_{ij} \bar{n}_{ij} S_{ij}$$

Это позволяет записать (8) в виде

$$R_i(\bar{Q}) = -\frac{1}{V_i} \left(\sum_{j \in NB_i} \tilde{F}_{ij}^c \bar{n}_{ij} S_{ij} - \sum_{j \in NB_i} \tilde{F}_{ij}^y \bar{n}_{ij} S_{ij} - \bar{H}_i V_i \right) \quad (10)$$

Для дискретизации по пространству в методе контрольного объема необходимо перейти от интегрального среднего по грани ячейки к дискретному представлению, используя какие-нибудь квадратурные формулы. В данном случае для аппроксимации интеграла в (9) воспользуемся квадратурной формулой Гаусса.

Интеграл по грани ∂C_{ij} может быть найден с использованием квадратуры Гаусса $m+1$ порядка точности

$$\oint_{\partial C_{ij}} \vec{F} \bar{n} dS \cong \sum_{q=1}^J w_q \vec{F} [Q(\vec{r}_{ij}^q)] \bar{n}_{ij} S_{ij},$$

где $J = \text{int}[(m+2)/2]$ – число квадратурных точек на грани; w_q – веса квадратурной формулы Гаусса; $\vec{r}_{ij}^q \in \partial C_{ij}$ – точки квадратурной формулы.

Для схем второго порядка точности по пространственным переменным достаточно использовать одноточечную квадратуру Гаусса, т.е. $J=1$, $w_1=1$ и $\vec{r}_{ij}^1 = \vec{r}_{ij}^{bc}$, где \vec{r}_{ij}^{bc} – центр тяжести грани

$$\vec{r}_{ij}^{bc} = \frac{1}{S_{ij}} \oint_{\partial C_{ij}} \vec{r} dS \quad (11)$$

В дальнейшем через $F_{ij} \bar{n}_{ij}$ будем обозначать значение нормального к грани ∂C_{ij} потока, вычисленного в центре тяжести грани \vec{r}_{ij}^{bc} . После этого невязку (10) можно записать в виде

$$R_i(\bar{Q}) = -\frac{1}{V_i} \left(\sum_{j \in NB_i} F_{ij}^c \bar{n}_{ij} S_{ij} - \sum_{j \in NB_i} F_{ij}^y \bar{n}_{ij} S_{ij} \right) - \bar{H}_i \quad (12)$$

Следующим шагом при аппроксимации потоков с повышенным порядком точности является аппроксимация решения $Q(\vec{r}, t)$ и его производных $\nabla Q(\vec{r}, t)$, которые явно входят в выражения для потоков (2).

Предполагая непрерывность решения $Q(\vec{r}, t)$ внутри каждой ячейки, построим по средним значениям в центрах ячеек $\{\bar{Q}_i^n\}$ полином $p_i(\vec{r}) \in P^m$ (пространство полиномов степени до m включительно), который будет аппроксимацией $m+1$ порядка точности решения внутри ячейки i

$$p_i(\vec{r}) = Q(\vec{r}, t) + O(h^{m+1}), \quad \vec{r} \in C_i, \quad (13)$$

где h – некоторый характерный линейный размер ячейки (например, максимальная длина ребра). Такой полином можно построить исходя из условий

$$\frac{1}{V_i} \int_{C_j} p_i(\vec{r}) dV = \bar{Q}_j, \quad j \in NS_i \quad (14)$$

по значениям в ячейках некоторого заданного шаблона вблизи ячейки i . NS_i – количество ячеек в шаблоне $NS_i > m$.

Построенный таким образом полином $p_i(\vec{r})$ является аппроксимацией $Q(\vec{r}, t)$ порядка $m+1$ при условии достаточной гладкости решения внутри соответствующего шаблона при фиксированном t . Полином $p_i(\vec{r})$ можно представить в виде

$$p_i(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{NS_i} L_j(\vec{r}) \bar{Q}_j, \quad (15)$$

где $L_j(\vec{r}) \in P^m$ – базисные функции, которые должны удовлетворять условиям

$$\frac{1}{V_j} \int_{C_j} L_n(\vec{r}) dV = \delta_{jn} \quad (16)$$

В программном комплексе *hySol* используются схемы второго порядка точности по пространству. Поэтому для восстановления достаточно использовать линейные распределения параметров внутри ячейки.

Для высокоскоростных течений характерно наличие разрывов в решении. По построению описанная выше процедура восстановления локальна, т.е. два полинома $p_i(\vec{r})$ и $p_j(\vec{r})$ в двух соседних ячейках могут быть независимы друг от друга и, следовательно, возможно наличие разрыва на грани между этими ячейками. Относительная величина этих локальных "скачков" находится на уровне ошибок интерполяции в гладких областях и равна $O(1)$ вблизи разрывов в Q . Это позволяет моделировать разрывы в решении. При этом ошибка в положении разрыва будет $O(h/2)$. Для правильного учета поведения решения вблизи разрывов воспользуемся идеей лежащей в основе метода Годунова [21]. Заменим невязкую часть потоков в (12)

$$F_{ij}^c [p_i(\vec{r}_{ij}^{bc}), p_j(\vec{r}_{ij}^{bc})] \vec{n}_{ij} = F^{RP} [p_i(\vec{r}_{ij}^{bc}), p_j(\vec{r}_{ij}^{bc})] \vec{n}_{ij}, \quad (17)$$

где $F^{RP}(Q_1, Q_2) \vec{n}_{ij}$ обозначает поток через грань, связанный с решением задачи Римана, начальные данные для которой равны Q_1 и Q_2 .

Вязкие потоки в (1) носят эллиптический характер и поэтому вычисляются в соответствии с (2)

$$F_{ij}^v \vec{n}_{ij} = F^v [\nabla Q_h(\vec{r}_{ij}^{bc})] \vec{n}_{ij}, \quad (18)$$

где $\nabla Q_h(\vec{r})$ – значение градиента решения $\nabla Q(\vec{r}, t)$ на грани, определенное при помощи соответствующей процедуры восстановления.

3.1. Аппроксимация по времени

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений (7) может быть решена любым из "традиционных" методов, предложенных для решения ОДУ. В программном комплексе *hySol* в основном используются явные методы Рунге–Кутты (РК). Методы этого класса имеют ряд существенных преимуществ:

- 1) они легко программируются и не требуют использования сложного программного обеспечения для обращения больших систем линейных уравнений;
- 2) легко обобщаются на двумерные (2D) и пространственные (3D) случаи;
- 3) легко (за счет смены набора коэффициентов) позволяют менять порядок метода и область устойчивости (то есть не требуют переделки программного обеспечения при переходе от решения нестационарных задач с высокой точностью к решению стационарных задач с большими шагами по времени);
- 4) являются самостартующими (в отличие от многошаговых методов);
- 5) однородны (то есть способы определения потоков на каждой стадии не отличаются друг от друга).

В hySol реализовано несколько SSP методов (SSP – strong stability preserving, т.е. методов с сильным сохранением устойчивости) [22]. Это варианты метода РК, позволяющие сохранить TVD свойство при условии, что одностадийная схема (явный метод Эйлера) обладает этим свойством. Метод SSP(2,2) является наиболее часто используемым методом в hySol. Этот метод РК второго порядка (с областью устойчивости $CFL = 1$) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 Q^{(1)} &= Q^n + \Delta t R(Q^n), \\
 Q^{n+1} &= \frac{1}{2}Q^n + \frac{1}{2}Q^{(1)} + \frac{\Delta t}{2}R(Q^{(1)})
 \end{aligned} \tag{19}$$

В (19) для упрощения записи опущены черта сверху, обозначающая осреднение по ячейке, и нижние индексы.

Для расчета существенно нестационарных течений, для которых требуется более высокая точность по времени, в hySol можно использовать SSP(3,3) метод третьего порядка ($CFL = 1$)

$$\begin{aligned}
 Q^{(1)} &= Q^n + \Delta t R(Q^n), \\
 Q^{(2)} &= \frac{3}{4}Q^n + \frac{1}{4}Q^{(1)} + \frac{\Delta t}{4}R(Q^{(1)}), \\
 Q^{n+1} &= \frac{1}{3}Q^n + \frac{2}{3}Q^{(2)} + \frac{2\Delta t}{3}R(Q^{(2)})
 \end{aligned} \tag{20}$$

Основным недостатком явных методов РК является существенное ограничение на шаг по времени, связанное с устойчивостью методов. Поэтому в hySol включено несколько методов с расширенной областью устойчивости. Так трехстадийный метод SSP(3,2) второго порядка имеет в два раза большую ($CFL = 2$) область устойчивости

$$\begin{aligned}
 Q^{(1)} &= Q^n + \frac{\Delta t}{2}R(Q^n), \\
 Q^{(2)} &= Q^{(1)} + \frac{\Delta t}{2}R(Q^{(1)}), \\
 Q^{n+1} &= \frac{1}{3}Q^n + \frac{2}{3}Q^{(2)} + \frac{\Delta t}{3}R(Q^{(2)})
 \end{aligned} \tag{21}$$

В hySol реализован четырехстадийный метод SSP(4,2) второго порядка с $CFL = 3$

$$Q^{(1)} = Q^n + \frac{\Delta t}{3}R(Q^n),$$

$$\begin{aligned}
 Q^{(2)} &= Q^{(1)} + \frac{\Delta t}{3} R(Q^{(1)}), \\
 Q^{(3)} &= Q^{(2)} + \frac{\Delta t}{3} R(Q^{(2)}), \\
 Q^{n+1} &= \frac{1}{4} Q^n + \frac{3}{4} Q^{(3)} + \frac{\Delta t}{4} R(Q^{(3)})
 \end{aligned} \tag{22}$$

Для более эффективного расчета течений с существенной "параболической составляющей" в *hySol* включен рациональный метод Рунге–Кутты RRK [23]

$$\begin{aligned}
 Q^{(1)} &= Q^n + c_2 \Delta t R(Q^n), \\
 Q^{(2)} &= Q^n + \frac{b_1}{c_2} (Q^{(1)} - Q^n) + b_2 \Delta t R(Q^{(1)}), \\
 Q^{n+1} &= Q^n + \omega_1 \frac{(Q^{(1)} - Q^n, Q^{(2)} - Q^n)}{(Q^{(2)} - Q^n, Q^{(2)} - Q^n)} (Q^{(1)} - Q^n) + \omega_2 \frac{(Q^{(1)} - Q^n, Q^{(1)} - Q^n)}{(Q^{(2)} - Q^n, Q^{(2)} - Q^n)} (Q^{(2)} - Q^n),
 \end{aligned} \tag{23}$$

где $(Q^{(1)}, Q^{(2)})$ – скалярное произведение двух векторов; $\omega_1 = 2/c_2^2$, $\omega_2 = -1/c_2^2$, $b_2 = 1 - b_1$. В *hySol* реализованы два варианта RRK: $c_2 = 1/2$ и $b_1 = 2$ – "исходный", предложенный в [23], и $c_2 = 1$ и $b_1 = 1/2$ – вариант на базе SSP(2,2) (19).

Явные методы Рунге–Кутты хорошо подходят для решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса (1) при отсутствии дополнительных физических процессов, обладающих характерными временами существенно меньшими, чем время распространения акустических возмущений. К таким процессам в общем случае можно отнести неравновесные химические реакции, радиационное излучение, турбулентные порождение и диссипацию и ряд других. Учет этих процессов приводит к появлению дополнительных источников членов в системе (1), которые делают полудискретную систему (7) жесткой, что может привести к заметному увеличению времени счета за счет уменьшения шага по времени.

Для более эффективного решения таких систем в комплексе *hySol* используются модификации метода (19), представляющие собой варианты IMEX методов.

Рассмотрим модификацию метода РК второго порядка (19) для системы вида

$$\frac{dQ}{dt} = R(Q) + \tilde{H}(Q), \tag{24}$$

где $\tilde{H}(Q)$ – дополнительный источниковый член, обладающий более высокой по сравнению с первым слагаемым жесткостью.

Простая модификация метода (19) путем добавления неявной аппроксимации $\tilde{H}(Q)$ на каждую стадию метода

$$\begin{aligned}
 Q^{(1)} &= Q^{(0)} + \Delta t R(Q^{(0)}) + \omega_1 \Delta t \tilde{H}(Q^{(1)}), \\
 Q^{(2)} &= \frac{1}{2} Q^{(0)} + \frac{1}{2} Q^{(1)} + \frac{\Delta t}{2} R(Q^{(1)}) + \omega_2 \Delta t \tilde{H}(Q^{(2)})
 \end{aligned} \tag{25}$$

не позволяет сохранить второй порядок точности метода. Можно достичь первого порядка точности при $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = 1/2$.

Для того чтобы метод был второго порядка точности и по источниковому члену нужно использовать более сложную правую часть на второй стадии

$$Q^{(1)} = Q^{(0)} + \Delta t R(Q^{(0)}) + \omega_1 \Delta t \tilde{H}(Q^{(1)}),$$

$$Q^{(2)} = \frac{1}{2} Q^{(0)} + \frac{1}{2} Q^{(1)} + \frac{\Delta t}{2} R(Q^{(1)}) + \omega_2 \Delta t \tilde{H}(Q^{(0)}) + \omega_3 \Delta t \tilde{H}(Q^{(1)}) + \omega_4 \Delta t \tilde{H}(Q^{(2)}) \quad (26)$$

Из условия аппроксимации системы (24) со вторым порядком

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \frac{1}{2}, \quad \omega_3 + \omega_4 = \frac{1}{2} \quad (27)$$

Для определения оставшегося свободного параметра ω_3 рассмотрим систему (24) при $R(Q) = 0$ и $\tilde{H}(Q) = e^{-\lambda t}$, где λ – положительная постоянная. В этом случае переходная функция метода (25) будет иметь вид

$$R(z) = \frac{1}{1+z},$$

где $z = \lambda \Delta t$. Следовательно, метод является L -устойчивым методом первого порядка по времени. В случае метода (26) переходная функция будет иметь вид

$$R(z) = \frac{1}{2} \frac{2 - (2\omega_3 - 1) - z^2}{(1+z)(1+\omega_3 z)}$$

Откуда следует, что метод (29) не является A -устойчивым. Так как $R(z)$ должна быть аппроксимацией экспоненциальной функции e^{-z} , то из этого условия можно определить свободный параметр $\omega_3 = 1/4$.

3.2. Вычисление потоков на гранях

При больших скоростях расчет невязких потоков на гранях ячеек существенным образом влияет на качество получаемого решения. Невязкие потоки могут быть рассчитаны при помощи различных вариантов точного или приближенного решения задачи Римана (ЗР). Использование решения задачи Римана для вычисления потоков через грани (17) позволяет учитывать в численном методе локальные направления распространения возмущений. Это может привести к заметному выигрышу в эффективности по сравнению с методами, построенными на основе центральных разностей с применением искусственной вязкости (см., например, [24]).

К сожалению, к настоящему времени не предложено единого "универсального" метода расчета невязких потоков, который бы хорошо работал во всех ситуациях. Поэтому в hySol реализовано довольно большое количество методов расчета невязких потоков.

В программном комплексе hySol реализованы два варианта точного решения ЗР: "классический" вариант из [21] с итерациями по давлению p^* и вариант из [25] с итерациями по скорости u^* . Есть приближенный решатель на основе "акустического приближения" [21] и решатель из [26], основанный на аппроксимации адиабаты Гюгонио.

В состав hySol входят несколько вариантов одноволнового решателя HLL (Harten, Lax и van Leer [27]). Это HLLE [28], HLLEM [29], HLEW [30], HLLEMCC [31] и HLLEM-AS [32] решатели.

В hySol реализованы два варианта решателя, основанные на решении линеаризованной ЗР: "исходный" вариант, предложенный в [33], и вариант с коррекцией для малых чисел Маха [34]. Для этих решателей используются различные варианты энтропийной коррекции [35–38].

Большой набор вариантов расчета невязких потоков в hySol основан на методах расщепления вектора потоков.

Расщепление по Steger–Warming представлено в 4 вариантах: "исходный" вариант [39], гибридные варианты [40] и [41] и вариант [42], в котором на одно "переключение" потока меньше, т.е. гладкость приближенного потока выше.

В hySol реализованы три варианта расщепления по van Leer: "исходный" вариант [43] и два модифицированных [44,45].

AUSM семейство методов расщепления вектора потока представлено довольно широко: AUSM [46], AUSM+ [47], AUSM+up [48], AUSMPW+ [49], SLAU2 [50], ADAUSM [51] и AUPM [52].

3.3. Восстановление по пространству

Рассмотрим более подробно процедуры восстановления (13–14), которые используются в программном комплексе hySol.

Рассмотрим ячейку C_i . Через P_i обозначим шаблон (множество ячеек, включающее ячейку C_i), на котором проводится восстановление для ячейки C_i . Через \bar{P}_i обозначим шаблон, содержащий только ячейку C_i и её прямых соседей. Как правило, $\bar{P}_i \in P_i$.

Пусть в каждой ячейке строится полином (13) вида

$$p_i(\vec{r}) = \bar{Q}_i + L_i(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (28)$$

где явно выделена аппроксимация первых производных L_i . Для построения полинома (28) используются условия (14) для ячеек входящих в \bar{P}_i . В hySol восстанавливаются физические переменные ρ , u_1 , u_2 , u_3 , p .

Первые производные, необходимые для линейного восстановления, могут быть вычислены либо при помощи теоремы Грина–Гаусса, либо при помощи метода наименьших квадратов. Метод с использованием теоремы Грина–Гаусса позволяет получить точное значение градиента линейной функции только для тетраэдральных ячеек и, следовательно, не подходит в случае неструктурированных сеток с ячейками другой формы. Поэтому в hySol использовался метод взвешенных наименьших квадратов для восстановления

$$p_i(\vec{r}) = \bar{Q}_i + \nabla p_i \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i), \quad \vec{r} \in C_i \quad (29)$$

Или в покомпонентном виде

$$p_i(\vec{r}) = \bar{Q}_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} (x - x_i) + \frac{\partial p}{\partial y_i} (y - y_i) + \frac{\partial p}{\partial z_i} (z - z_i), \quad (30)$$

где производные находятся из решения системы

$$\begin{pmatrix} \sum_j \omega_j \Delta x_j^2 & \sum_j \omega_j \Delta x_j \Delta y_j & \sum_j \omega_j \Delta x_j \Delta z_j \\ \sum_j \omega_j \Delta x_j \Delta y_j & \sum_j \omega_j \Delta y_j^2 & \sum_j \omega_j \Delta y_j \Delta z_j \\ \sum_j \omega_j \Delta x_j \Delta z_j & \sum_j \omega_j \Delta y_j \Delta z_j & \sum_j \omega_j \Delta z_j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j \omega_j \Delta \bar{Q}_j \Delta x_j \\ \sum_j \omega_j \Delta \bar{Q}_j \Delta y_j \\ \sum_j \omega_j \Delta \bar{Q}_j \Delta z_j \end{pmatrix}, \quad j = 1..NS_i \quad (31)$$

В программном комплексе hySol веса $\omega_j > 0$ задаются в виде $\omega_j = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|^{-d}$, где показатель степени d может принимать значения 0, 1, 2 и 3. Веса вводятся для усиления влияния ближайших к C_i ячеек.

Восстановление (29) может приводить к образованию ложных осцилляций решения вблизи больших градиентов и скачков в поле течения. Это происходит из-за того, что шаб-

лон \bar{P}_i может содержать ячейки, которые расположены с разных сторон от разрыва. В этом случае шаблон, будучи геометрически компактным, не является физически компактным.

Для обеспечения монотонности восстановления на физически некомпактном шаблоне предложено несколько способов. Условно их можно разделить на два больших класса:

- 1) использование адаптивных шаблонов. То есть в этом случае строится подшаблон $\hat{P}_i \in P_i$, на котором условие физической компактности нарушается в минимальной степени. Восстановление проводится на \hat{P}_i .
- 2) уменьшение вычисленных производных (ограничение наклонов). В этом случае вводится некоторый множитель $\Phi_i \in [0, 1]$, который обеспечивает выполнение условия монотонности. В hySol это основной подход к обеспечению монотонности

$$p_i(\vec{r}) = \bar{Q}_i + \Phi_i \nabla p_i \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i), \quad \vec{r} \in C_i \quad (32)$$

Условие монотонности может быть сформулировано разными способами. В hySol используется условие монотонности следующего вида

$$\bar{Q}_i^{\min} \leq p_i(\vec{r}) \leq \bar{Q}_i^{\max}, \quad \forall \vec{r} \in C_i \quad (33)$$

Минимальное \bar{Q}_i^{\min} и максимальное \bar{Q}_i^{\max} значения определяются следующим образом:

$$\bar{Q}_i^{\min} = \min_{j \in \bar{P}_i} \bar{Q}_j, \quad \bar{Q}_i^{\max} = \max_{j \in \bar{P}_i} \bar{Q}_j \quad (34)$$

С учётом (32) условие монотонности (33) можно записать

$$\delta \bar{Q}_i^{\min} = \bar{Q}_i^{\min} - \bar{Q}_i \leq \Phi_{ki} \nabla p_i \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i) \leq \delta \bar{Q}_i^{\max} = \bar{Q}_i^{\max} - \bar{Q}_i, \quad \forall \vec{r} \in C_i \quad (35)$$

Предполагая, что грани ячейки не слишком сильно отличаются от плоскостей, в случае линейного восстановления условие (34) достаточно проверять в вершинах ячейки

$$\delta \bar{Q}_i^{\min} \leq \Phi_{ki} \nabla p_i \cdot (\vec{r}_{ki} - \vec{r}_i) \leq \delta \bar{Q}_i^{\max}, \quad \forall k \in NV_i, \quad (36)$$

где NV_i – множество вершин ячейки C_i . В hySol реализована возможность использовать и менее строгое условие

$$\delta \bar{Q}_i^{\min} \leq \Phi_{ki} \nabla p_i \cdot (\vec{r}_{ij}^{bc} - \vec{r}_i) \leq \delta \bar{Q}_i^{\max}, \quad \forall j \in \bar{P}_i, \quad (37)$$

т.е. проверка монотонности проводится в центрах граней ячейки (точках Гаусса). Такой подход позволяет немного уменьшить ограничение на восстановление для линейного случая (особенно для сильно вытянутых ячеек) и обеспечивает монотонность именно в тех точках, где вычисляются потоки через грань, что важно для обеспечения устойчивости схемы. Но в случае сильных разрывов в поле течения может приводить к некоторой немонотонности получаемого решения.

В программном комплексе реализованы ограничители двух семейств:

1. Ограничитель Barth & Jespersen [53] и его модификации.
2. WBAR (Weighted Biased Averaging Procedure) ограничители [54] и [55].

Ограничители первого семейства имеют вид

$$\Phi_{ki} = \begin{cases} \phi \left(\frac{\delta \bar{Q}_i^{\max}}{Q_{ki} - \bar{Q}_i} \right) & \text{if } Q_{ki} > \bar{Q}_i, \\ \phi \left(\frac{\delta \bar{Q}_i^{\min}}{Q_{ki} - \bar{Q}_i} \right) & \text{if } Q_{ki} < \bar{Q}_i, \\ 1 & \text{if } Q_{ki} = \bar{Q}_i, \end{cases} \quad (38)$$

где $\phi(y)$ – некоторая функция, зависящая от конкретного варианта ограничителя.

Обозначим значение, полученное в точке \vec{r}_{ki} (это может быть центр грани, вершина ячейки или некоторая другая точка) при помощи восстановления (29) без ограничителя, через Q_{ki}

$$Q_{ki} = p_i(\vec{r}_{ki}) \quad (39)$$

Тогда условия (36) или (37) можно записать в виде

$$\delta \bar{Q}_i^{\min} \leq \Phi_{ki}(Q_{ki} - \bar{Q}_i) \leq \delta \bar{Q}_i^{\max} \quad (40)$$

Определение Φ_{ki} непосредственно из этого соотношения даёт

$$\Phi_{ki} = \begin{cases} \min\left(1, \frac{\delta \bar{Q}_i^{\max}}{Q_{ki} - \bar{Q}_i}\right) & \text{if } Q_{ki} > \bar{Q}_i, \\ \min\left(1, \frac{\delta \bar{Q}_i^{\min}}{Q_{ki} - \bar{Q}_i}\right) & \text{if } Q_{ki} < \bar{Q}_i, \\ 1 & \text{if } Q_{ki} = \bar{Q}_i \end{cases} \quad (41)$$

Теперь достаточно выбрать

$$\Phi_i = \min_k \Phi_{ki}, \quad (42)$$

и условие (33) будет гарантированно выполнено.

Выражения (41) и (42) в точности соответствуют ограничителю [53], который используется в *hySol* по умолчанию.

Из (41) видно, что в основе ограничителя лежит функция

$$\phi_{BJ}(y) = \min(1, y) \quad (43)$$

Производная этой функции разрывна, что может приводить к проблемам со сходимостью при расчётах стационарных течений. Кроме того, этот ограничитель срабатывает на всех неоднородностях течения независимо от их размера. Очевидно, что ограничитель не должен "работать", если неоднородность восстанавливаемой функции меньше $O(h^p)$, где h – характерный размер ячейки. В качестве ещё одного недостатка ограничителя (41) и (42) можно отметить нечувствительность ограничителя к направлению градиента Q . Например, если разрыв распространяется строго вдоль оси x , то использование ограничителя (32) приведёт к ограничению производных и во всех остальных направлениях.

Отметим, что в *hySol* в конкретных вычислениях вводится некоторая малая постоянная в знаменатель (41), чтобы предотвратить влияние машинной арифметики

$$Q_{ki} - \bar{Q}_i = \text{sign}(Q_{ki} - \bar{Q}_i)(|Q_{ki} - \bar{Q}_i| + \omega), \quad (44)$$

где $\omega = 10^{-12}$ для 64-разрядной арифметики [56].

Для того, чтобы уменьшить заметное замедление сходимости, вызванное разрывностью производной функции $\min(1, y)$ в (42), в [57] предложено заменить $\min(1, y)$ на гладкую функцию

$$\phi_{VE}(y) = \frac{y^2 + 2y}{y^2 + y + 2} \quad (45)$$

Отметим, что функция $\phi_{VE}(y)$ удовлетворяет условию $\phi_{VE}(2) = 1$, т.е. сохраняет второй порядок вдали от экстремумов на равномерной сетке, но на неравномерной сетке ограничитель (45) может приводить к потере точности.

Вторая модификация, введённая в [57], предназначена для отказа от применения ограничителя в областях, где течение близко к равномерному, и вблизи гладких экстремумов. То есть в областях, где $Q_{ki} - \bar{Q}_i = O(h^2)$. Поэтому если $Q_{ki} - \bar{Q}_i < Kh^{3/2}$, то ограничитель не надо применять. Для этого ограничитель (45) записывается в виде

$$\phi_{VE}(y_+/y_-) = \frac{1}{y_-} \frac{(y_+^2 + \epsilon^2)y_- + 2y_-^2y_+}{y_+^2 + y_+y_- + 2y_-^2 + \epsilon^2}, \quad (46)$$

где $\epsilon^2 = Kh^{3/2}$. Именно введение ϵ^2 позволяет заметно ускорить сходимость к стационару, т.к. не даёт развиваться мелким возмущениям, вызываемым частым "переключением" ограничителя, в областях мелкомасштабных (размер которых сравним с погрешностью аппроксимации схемы) неоднородностей поля течения.

Параметр K управляет сходимостью и точностью решения в гладких областях. Чем больше его значение, тем выше точность и сходимость, но при этом с ростом K растёт и немонотонность решения вблизи разрывов.

На равномерной сетке ограничитель для схемы второго порядка должен удовлетворять условию $|\Phi - 1| \leq O(h)$ на гладких решениях для того, чтобы не снижался порядок схемы. Если ограничитель удовлетворяет этому условию, то погрешность, вносимая им, будет порядка $O(h^2)$. В случае схем более высокого порядка ограничитель должен удовлетворять в гладких областях условию $|\Phi - 1| \leq O(h^{p-1})$, где p – порядок схемы.

Ограничитель (43) удовлетворяет этому условию, а ограничитель (46) – нет. Поэтому в работе [58] было предложено вместо функции $\min(1, y)$ в (41) использовать функцию

$$\phi_{MOG}(y) = \begin{cases} y - \frac{4}{27}y^3 & \text{if } y < 1.5, \\ 1 & \text{if } y \geq 1.5 \end{cases} \quad (47)$$

Полином в (47) подобран таким образом, чтобы в точке сопряжения $y_i = 3/2$ двух функций производная не рвалась. При малых y выбранный полином близко проходит к линейной функции $\phi(y) = y$. Более того, на гладких решениях в случае равномерной сетки выполняется $|\phi_{MOG}(y)| \leq O(h^3)$, что позволяет использовать этот ограничитель в схемах четвёртого порядка точности.

В hySol для более гладкого сопряжения двух функций, входящих в (43), используется полином 5-го порядка

$$\phi_5(y) = \min\left(1, y + \frac{8}{27}y^3 - \frac{16}{27}y^4 + \frac{16}{81}y^5\right), \quad (48)$$

обеспечивающий сохранение не только первой, но и второй производной в точке сопряжения $y_i = 3/2$.

Использование WBAR подхода для монотонизации приводит к следующему выражению для линейного распределения (29) внутри ячейки после монотонизации

$$p_i(\vec{r}) = \bar{Q}_i + \widetilde{\nabla} p_i \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i), \quad \vec{r} \in C_i, \quad (49)$$

где $\widetilde{\nabla} p_i$ – модифицированный градиент. В WBAR подходе производные, входящие в ∇p_i , ограничиваются раздельно.

Обозначим через g производную, которую надо ограничить $g = \partial p / \partial x_k$, $k = 1, 3$. В WBAR подходе вводится функция ограничитель $L(g)$

$$\widetilde{g}_i = L(g_i, g_{j_1}, \dots, g_{j_J}), \quad j_1, \dots, j_J \in \bar{P}_i, \quad (50)$$

которая имеет вид

$$L(g_0, g_1, \dots, g_J) = B^{-1} \left(\sum_{j=0}^J \omega_j B(g_j) \right) \quad (51)$$

В соответствии с терминологией [54] $B(x)$ – функция смещения (biased function), а $B^{-1}(x)$ – функция подобия (self-similar function), которые должны удовлетворять соотношению $B^{-1}(B(x)) = x$. В hySol используется следующая пара функций [55]

$$B(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}}, \quad B^{-1}(x) = \frac{\varepsilon x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

где ε – параметр, задающий "вязкость" восстановления.

В [55] предложено использовать функцию ограничитель следующего вида

$$L(g_0, g_1, \dots, g_J) = g_0 W(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_J), \quad \theta_j = g_j / g_0, \quad (51)$$

которая позволяет записать восстановление (49) в виде (32), но с разными Φ_i для каждой производной. Аналогично (51) можно записать

$$W(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_J) = B^{-1} \left[\sum_{j=0}^J \omega_j B(\theta_j) \right] \quad (51)$$

Веса в (51) определяются следующим образом:

$$\omega_j = \frac{\alpha_j}{\sum_{k=0}^J \alpha_k}, \quad \alpha_j = \frac{\lambda_j}{B(\theta_j)^2 + \delta}, \quad (52)$$

где $\delta \approx 10^{-10}$ – малая константа, предохраняющая от деления на ноль; λ_j – дополнительный вес, который управляет вкладом центральной точки в восстановление

$$\lambda_j = \begin{cases} n & \text{if } j = 0, \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

В [55] рекомендуется использовать $n \leq 5$. В hySol с учетом этой рекомендации $n = 5$.

В программном комплексе hySol реализованы три варианта WBP ограничителя.

1. WBP–L1 ограничитель

$$W^{L1}(1, \theta_1, \dots, \theta_J) = \begin{cases} \frac{n+J}{J} & \text{if } \theta_1, \dots, \theta_J > 0, \\ \sqrt{n + \sum_{j=1}^J 1/\theta_j^2} & \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}, \quad (53)$$

который является предельным случаем ограничителя (51)–(52) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. WBP–L2 ограничитель

$$W^{L2}(1, \theta_1, \dots, \theta_J) = \begin{cases} \frac{n + \sum_{j=1}^J 1/\theta_j}{J} & \text{if } \theta_1, \dots, \theta_J > 0, \\ n + \sum_{j=1}^J 1/\theta_j^2 & \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (54)$$

который является предельным случаем ограничителя (51)–(52) при $\varepsilon \rightarrow +\infty$.

3. Третий WBAR-ограничитель соответствует непосредственно (51)–(52) при $\varepsilon = 1/2$. При этом WBAR–L1 является наименее "вязким" ограничителем из этих трех, а WBAR–L2 – наиболее "вязким".

3.4. Аппроксимация вязких членов

Градиенты скорости и температуры на гранях ячеек, необходимые для расчета вязких потоков, вычисляются как среднее по рассчитанным в центрах ячеек градиентам по методу наименьших квадратов, описанному выше (31), без монотонизации (32) или (49):

$$\nabla Q_{ij} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} (\nabla p_i + \nabla p_j) \cdot \vec{n}$$

Однако, в [59] было показано, что такой подход может приводить к рассогласованию решения на четырехугольных или шестигранных сетках. В hySol применяется следующая модифицированная формула [60] для уменьшения ошибки рассогласования метода:

$$\nabla Q_{ij} \cdot \vec{n} = \frac{\bar{Q}_j - \bar{Q}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|} \alpha_{ij} + \frac{1}{2} (\nabla p_i + \nabla p_j) \cdot (\vec{n} - \alpha_{ij} \vec{s}) \quad (55)$$

где \vec{n} – нормаль к грани ячейки; \vec{s} – нормализованный вектор, соединяющий центры ячеек; $\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|$ это расстояние между центрами ячеек i и j и $\alpha_{ij} = \vec{s} \cdot \vec{n}$ – это скалярное произведение \vec{n} и \vec{s} .

4. Численные результаты

Для верификации программного комплекса hySol используются тестовые задачи трех типов:

- 1) аналитические и полуаналитические решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса;
- 2) «классические» тестовые задачи, которые в течение многих лет публикуются в большом количестве статей по численным методам решения уравнений Эйлера или Навье–Стокса и точное (т.е. полученное на очень подробной сетке разными авторами) решение хорошо известно;
- 3) результаты экспериментальных работ, полученные с высокой точностью и подтвержденные результатами других экспериментов или расчетов.

В качестве первой тестовой задачи с аналитическим решением рассмотрим задачу о взаимодействии двух сверхзвуковых потоков. Эта задача аналогична задаче о распаде разрыва, но в качестве маршевой координаты выступает не время, а одна из пространственных координат. На рис. 1 показана общая конфигурация задачи [61]. Угол наклона вектора скорости к оси x обозначен через α . Исходные данные и параметры точного решения даны в табл. 1.

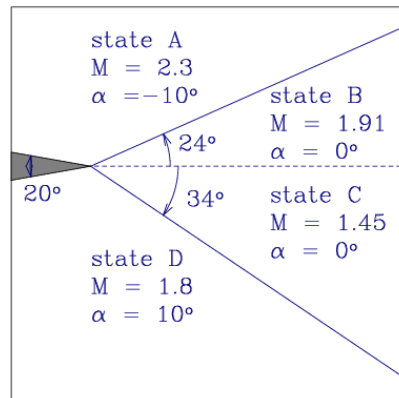


Рис. 1. Задача о взаимодействии двух сверхзвуковых потоков

Расчет проводился в расчетной области $[0,0.8] \times [0,1] \times [0,0.01]$. Линия начала взаимодействия потоков располагалась в точке $x = 0, y = 0.6$. Для расчета использовалась неструктурированная "квазидвумерная" расчетная сетка, т.е. по третьей координате располагался только один "слой" шестигранных ячеек. Для удобства описания будем рассматривать такие сетки как структурированные. Для расчета были построены три сетки, состоящие из $64 \times 80 \times 1$, $128 \times 160 \times 1$, $1024 \times 1280 \times 1$ шестигранников. Расчетная сетка $64 \times 80 \times 1$ показана на рис. 2.

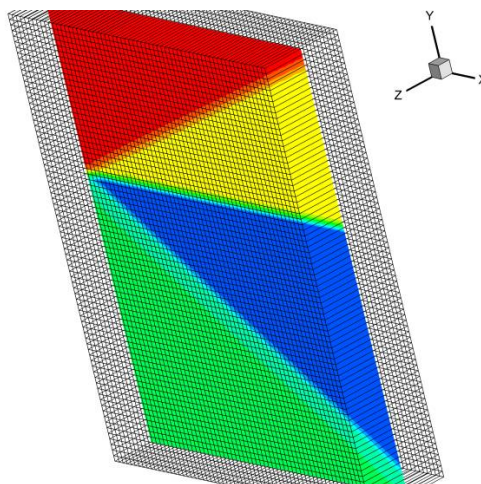


Рис. 2. Расчетная сетка для задачи о взаимодействии двух сверхзвуковых потоков

Таблица 1

Значения параметров течения в зонах А, В, С, D

Зона	ρ , кг/м ³	T , К	p , кПа	v , м/с
А	1.2	300	103.34	768.6
В	1.2	324.7	111.73	649.9
С	1.81258	356.7	185.588	723.7785
Д	1.71783	376.7	188.589	563.7986

На рис. 3 показаны распределения плотности в плоскости x - y , полученные на трех сетках. А на рис. 4 дается сравнение полученных распределений давления (левая часть рисунка) и продольной скорости (правая часть рисунка) с точным решением. Разными маркерами отмечены решения для разных сеток. Отметим, что показанные распределения получены по трехмерному полю течения интерполяцией вдоль линии $x = 0.4$ с равномерным шагом на 200 точек.

Видны хорошее соответствие полученного решения точному и сходимость численного решения к точному при измельчении сетки. Ударные волны и контактный разрыв "размазаны" всего на несколько ячеек и практически без осцилляций.

В качестве следующего тестового варианта рассмотрим течение в пограничном слое плоской пластины. Это течение хорошо изучено и для него известно автомодельное решение [62]. Поток, набегающий на плоскую пластину, имеет число Маха $M=0.2$, давление равно 1 атм, температуру равную 300°K и число Рейнольдса равно 10^5 . Предполагалось, что стенка изотермическая и её температура равна 300°K . Длина расчетной области равнялась 10 м, высота – 0.75 м, начало пластины располагалось при $x = 1$ м, т.е. длина пластины L равнялась 9 м. Для расчета этого течения использовалась квазидвумерная сетка из $200 \times 100 \times 1$ шестигранных ячеек.

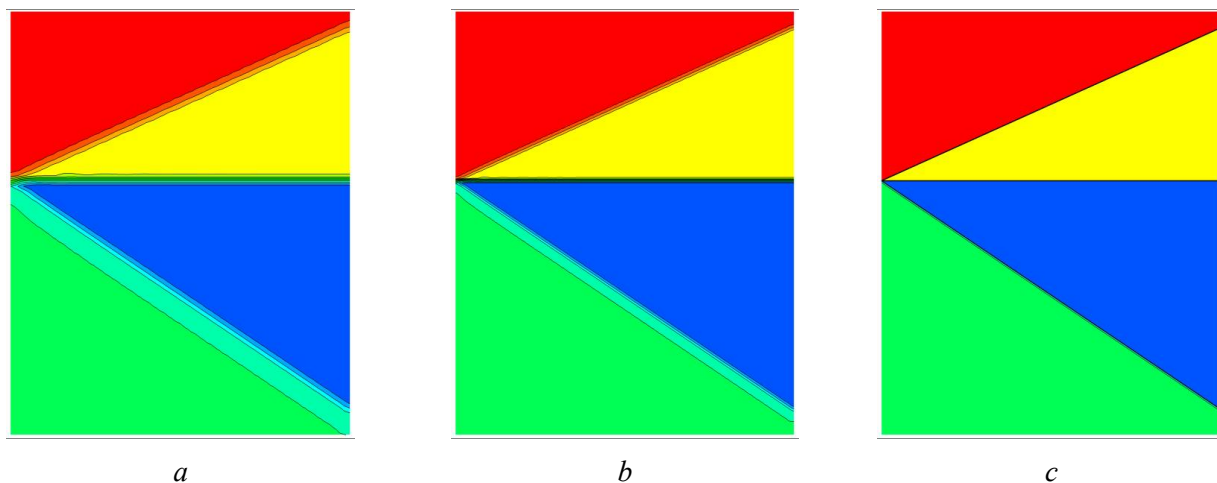


Рис. 3. Распределения плотности для задачи о взаимодействии двух сверхзвуковых потоков, полученные на сетках: *a)* 64×80 , *b)* 128×160 , *c)* 1024×1280 ячеек

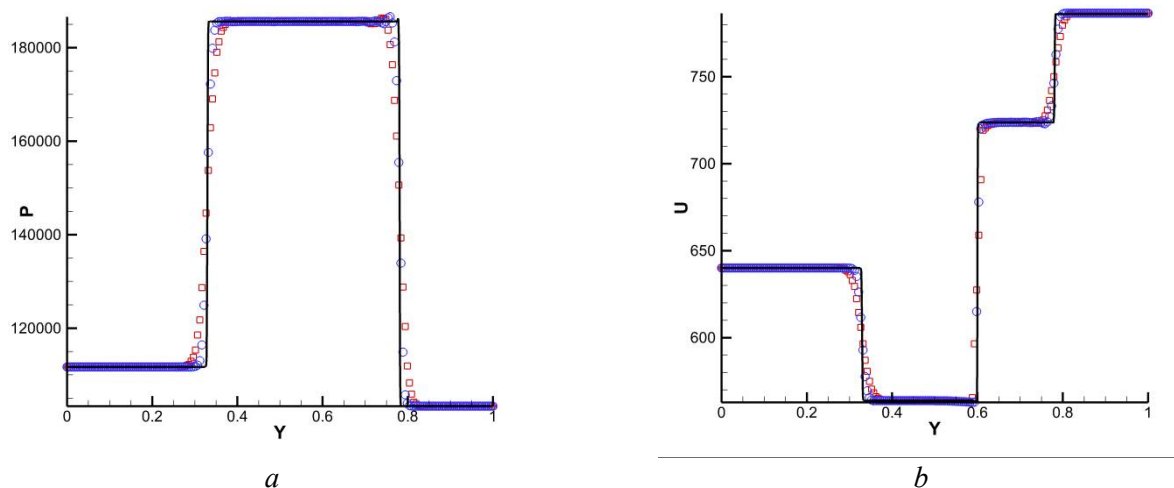


Рис. 4. Распределения давления (*a*) и продольной скорости (*b*) для задачи о взаимодействии двух сверхзвуковых потоков вдоль линии $x=0.4$

На рис. 5 показано сравнение рассчитанных распределений продольной скорости и температуры (сплошные линии) с автомодельным решением (символы).

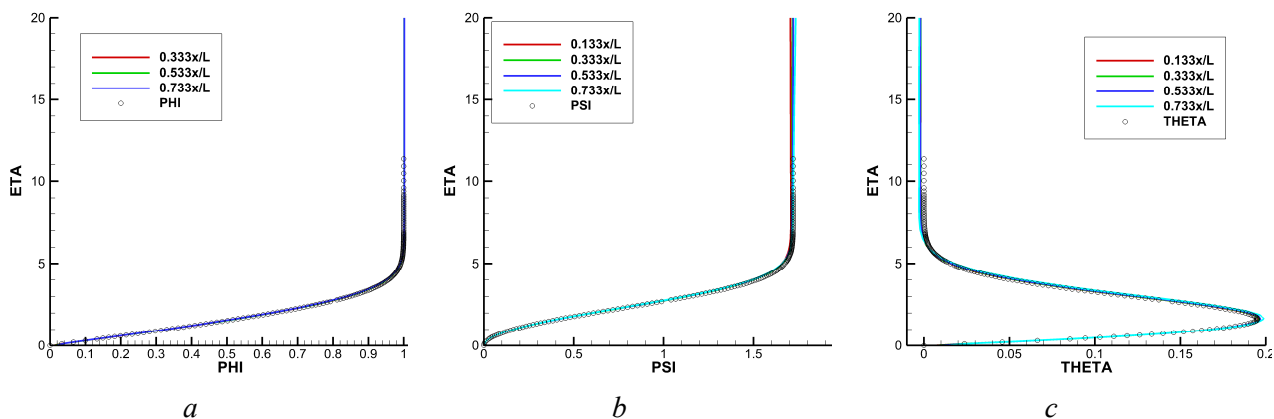


Рис. 5. Распределения продольной скорости (*a*), поперечной скорости (*b*) и температуры (*c*) в автомодельных координатах для нескольких поперечных сечений

На рис. 5, *a* показано распределение продольной скорости в автомодельных координатах, на рис. 5, *b* – распределение поперечной скорости и на рис. 5, *c* – распределение температуры. Рассчитанные распределения брались на расстоянии $0.133L$ (красная линия), $0.333L$ (зеленая линия), $0.533L$ (синяя линия) и $0.733L$ (голубая) от передней кромки пластины. Видно хорошее соответствие рассчитанных распределений с автомодельным решением.

В качестве примера «классической» тестовой задачи рассмотрим решение задачи о натекании сверхзвукового $M=2$ невязкого равномерного потока на ступеньку высотой 0.2 в канале. После работы [24] этот тест стал стандартным для случая двумерных уравнений Эйлера. Главной особенностью этого теста можно считать наличие сильного веера волн разрежения в районе угловой точки ступеньки, где поток разворачивается почти на 90° . В большинстве схем годуновского типа схемная вязкость наиболее сильно проявляется в областях, где поток проходит под углом к сеточным линиям. Поэтому многие схемы дают решение, в котором вдоль верхней стенки ступеньки образуется ложный энтропийный слой. В работе [24] было даже предложено использовать специальную процедуру, обеспечивающую постоянство энтропии в шести ячейках вблизи угловой точки.

На рис. 6 показаны результаты расчета данного течения на двух различных «квазидвумерных» сетках. На верхнем рисунке ячейки в плоскости X – Y представляют собой прямоугольники, а на нижнем – треугольники, т.е. в первом случае сетка состоит из шестигранников, а во втором – из призм с треугольным основанием. Размер стороны прямоугольников и треугольников совпадает и равен $1/160$. Видно, что на обоих типах сеток полученные решения хорошо соответствуют друг другу и «классическому» точному решению [24]. В случае шестигранных ячеек ложного энтропийного слоя не возникает и отражение ударной волны от верхней стенки ступеньки регулярное. В случае же призматической сетки – видно наличие маленькой ножки Маха, т.е. вдоль верхней стенки образовался тонкий энтропийный слой, но его толщина для данного размера ячеек незначительна и практически не влияет на само течение.

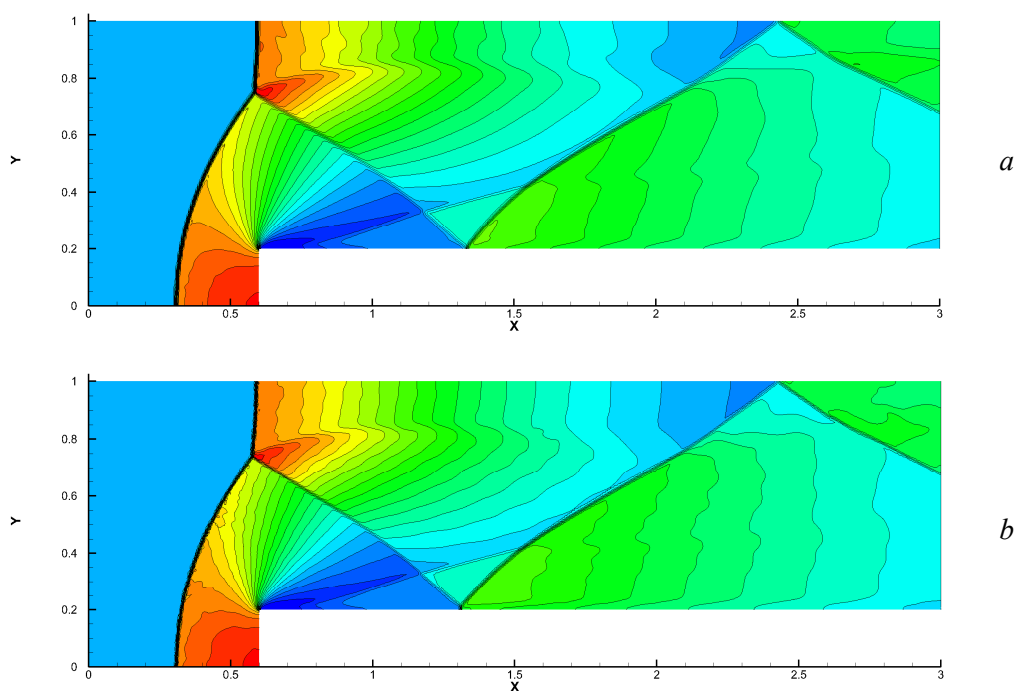


Рис. 6. Решение задачи о натекании сверхзвукового потока на ступеньку: *a*) шестигранные ячейки, *b*) призматические ячейки

В качестве следующей тестовой задачи рассмотрим обтекание тела простой геометрической формы – острый клин. При натекании на него сверхзвукового потока перед клином

образуется ударная волна. Если ударная волна не отходит от передней острой кромки клина, то эта задача имеет аналитическое решение [63].

В качестве тестового варианта выбран следующий: высота полета 30 км, число Маха полета 6, угол полураствора клина 5° , угол атаки 0° . Для проведения расчета была построена расчетная область и неструктурированная сетка, состоящая из 586514 тетраэдров. Расчетная сетка показана на рис. 7.

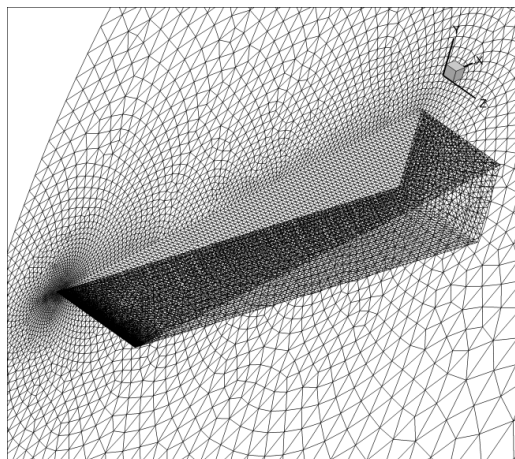


Рис. 7. Расчетная сетка для задачи о невязком обтекании острого клина

На рис. 8 показано полученное при помощи hySol распределение давления в плоскости $Z=0$. На этом же рисунке сплошной черной линией показано положение ударной волны из точного решения этой задачи.

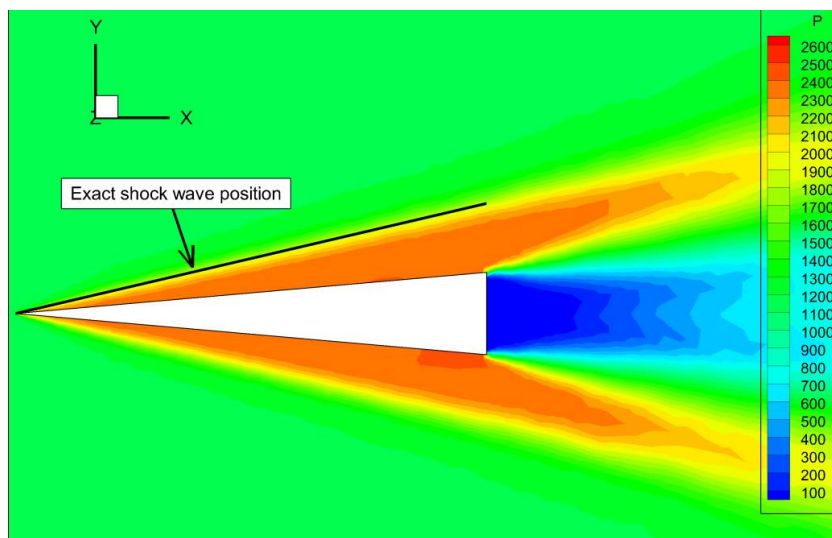


Рис. 8. Распределение давления в плоскости $Z=0$

На рис. 9 показаны погрешности в давлении и плотности на поверхности клина в плоскости $Z=0$. Одна кривая соответствует верхней поверхности клина, а вторая – нижней. Видно, что погрешность в плотности около 2%, а погрешность в давлении – около 0.5% на обеих сторонах клина.

В качестве тестовой задачи, которая основана на экспериментальных результатах, полученных с высокой точностью и подтвержденных результатами других экспериментов или расчетов, рассмотрим обтекание баллистической модели НВ-2 (Hypervelocity Ballistic model). Эта модель была принята в качестве стандартной модели в совместной программе AGARD и STA (Ассоциации сверхзвуковых аэродинамических труб) в 1950–60 х годах [64].

Он имеет аналитическую форму, которая состоит из сферы, конуса и цилиндра с расширяющейся задней частью, как показано на рис. 10.

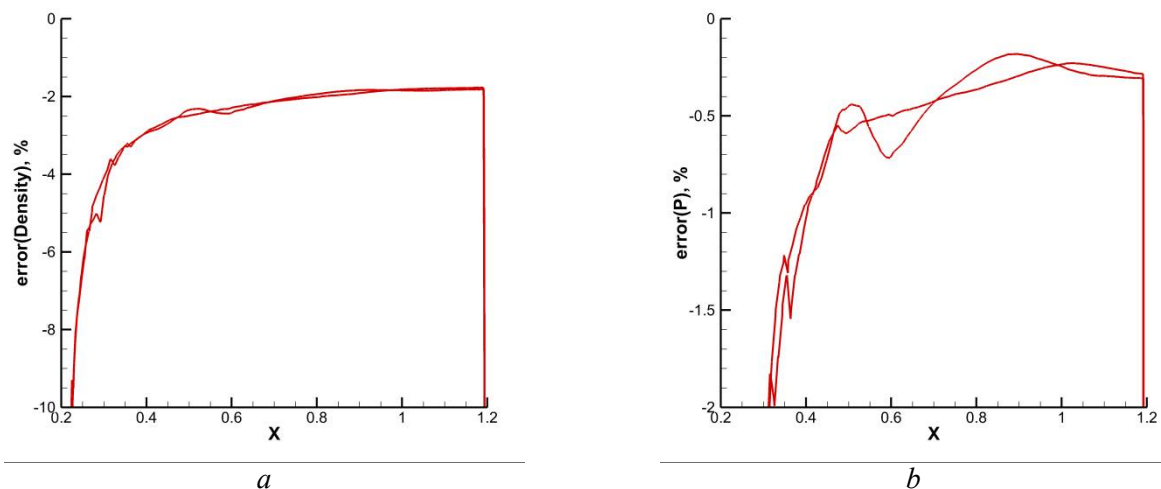


Рис. 9. Распределение погрешности в плотности (a) и давлении (b) на поверхности клина в плоскости $Z=0$

Эта модель активно использовалась и используется для проверки качества потока и точности измерительной системы в различных аэродинамических трубах США, Франции, Германии, Японии, России и других стран [64–66]. Благодаря большому объему хорошо проверенных экспериментальных данных НВ–2 довольно часто используется и для тестирования различных программных комплексов расчета высокоскоростных течений.

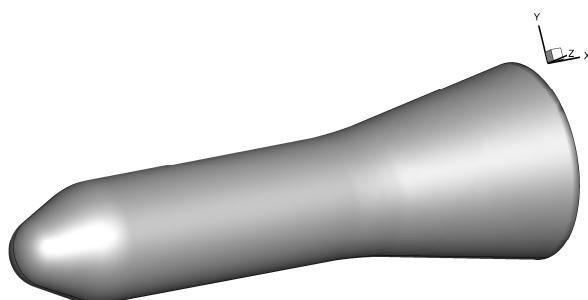


Рис. 10. Внешний вид стандартной модели НВ–2

Для проведения численного моделирования был построен ряд неструктурированных расчетных сеток, состоящих из 1398201, 1686163, 1816316, 1953114, 2162694, 3020281, 3747009 и 4863156 тетраэдров. Фрагмент расчетной сетки, состоящей из 1398201 тетраэдра, показан на рис. 11.

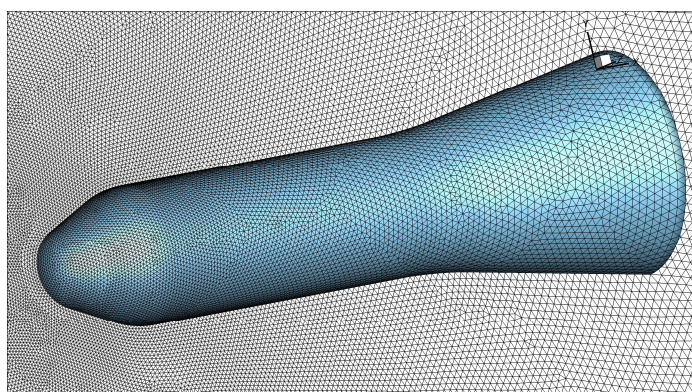


Рис. 11. Фрагмент расчетной сетки для НВ–2

Условия в набегающем потоке соответствовали экспериментальным условиям из работ [65,66]: число Маха – 10, число Рейнольдса (по масштабу длины 1 м) – 3.7×10^6 1/м. Расчеты проводились для углов атаки α от -6 до 12 . Численное моделирование проводилось в приближении идеального газа с $\gamma = 1.4$.

На рис. 12 показаны распределения плотности на поверхности НВ–2, в плоскости $Z = 0$ и в плоскости $X = 7.4D$ (D – диаметр цилиндрической части модели) от носика модели.

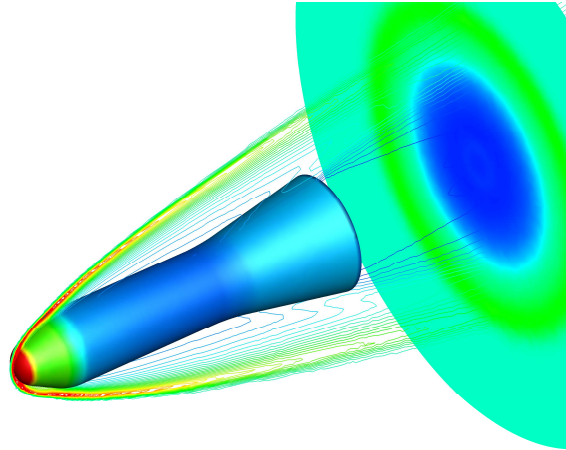


Рис. 12. Распределения плотности вблизи НВ–2 при $M = 10$ и $\alpha = 0^\circ$

На рис. 13 показано сравнение рассчитанных с использованием hySol распределений аэродинамических коэффициентов c_x, c_y (рис. 13, a) и момента m_z (рис. 13, b) с экспериментальными результатами [65, 66].

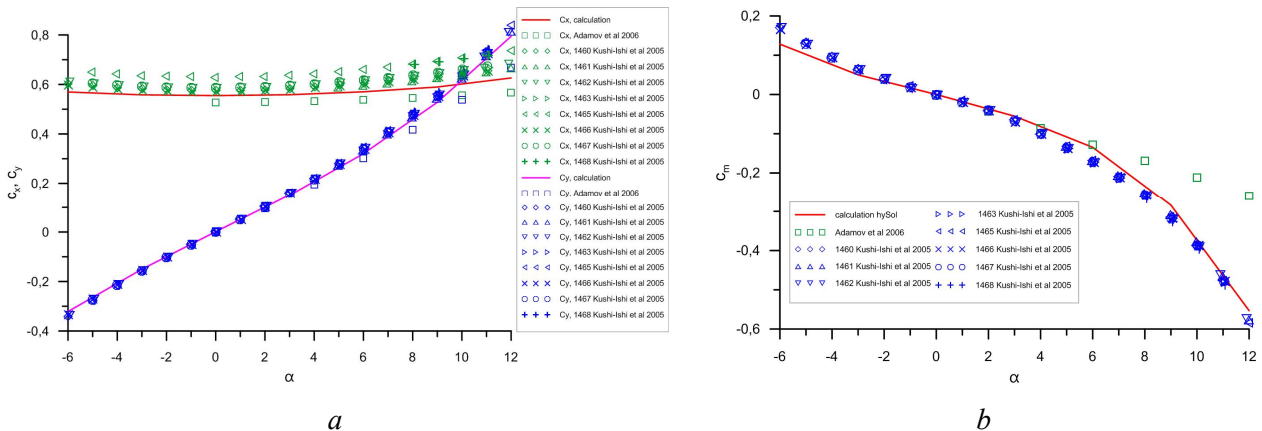


Рис. 13. Зависимость аэродинамических коэффициентов c_x, c_y (a) и момента m_z (b) от угла атаки

Экспериментальные значения показаны цветными маркерами, а рассчитанные – сплошными линиями. Видно хорошее совпадение результатов для коэффициентов c_y и c_m . Для коэффициента c_x совпадение несколько хуже, но следует отметить и заметный разброс экспериментальных данных для c_x . Возможно, это связано с некоторым разбросом в параметрах набегающего потока в [65] в разных сериях экспериментов.

Дополнительные примеры расчетов можно найти в [67].

5. Заключение

Описан программный комплекс hySol расчета высокоскоростных пространственных вязких течений в областях сложной геометрической формы при наличии сильных ударных волн. Основной упор сделан на описании математической модели и численного подхода, реализованного в hySol. Численный подход изложен довольно подробно, что позволяет

оценить возможности программного комплекса. Приведен ряд примеров численных расчетов, использованных для верификации *hySol* и оценки получаемой точности результатов.

Работа выполнена в рамках государственного задания № АААА-А20-120011690135-5.

Литература

1. Петров М.Н., Тамбова А.А., Титарев В.А., Утюжников С.В., Чикиткин А.В., Программный комплекс *FlowModellium* для расчета высокоскоростных течений сжимаемого газа // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2018. Т. 58. № 11. С. 1932–1954.
2. Emelyanov V., Karpenko A., Volkov K., Development and Acceleration of Unstructured Mesh Based CFD Solver // *Progress in Flight Physics* 2017, 9, 387–408.
3. Волков К.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., Численное моделирование газодинамических и физико-химических процессов при обтекании тел гиперзвуковым потоком // *Выч. мет. программирование*, 2017, 18, 4, 387–405.
4. Ермаков М. К. Моделирование гиперзвукового обтекания летательного аппарата на суперкомпьютере «Ломоносов» // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2013. Т. 14, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2013-14-4/articles/422/>
5. Абалакин И.В., Бахвалов П.А., Горобец А.В., Дубень А.П., Козубская Т.К. Параллельный программный комплекс *NOISETTE* для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // *Выч. мет. программирование*. 2012. 13, 3, 110–125.
6. Зинин К. М., Панасенко А. В., Суржигов С. Т. Валидация компьютерного кода *UST3D* на примере расчета аэродинамических характеристик летательного аппарата X-34 при различных параметрах // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2019. Т. 20, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-4/articles/882/>.
7. Боровиков С.Н., Иванов И.Э., Крюков И.А., Моделирование пространственных течений идеального газа // *Математическое моделирование РАН*, 2006, 18, 8, 37–48.
8. Боровиков С.Н., Крюков И.А., Иванов И.Э., Построение нерегулярных треугольных сеток на криволинейных гранях на основе триангуляции Делоне // *Математическое моделирование РАН*, 2005, 17, 8, 31–45.
9. Боровиков С.Н., Иванов И.Э., Крюков И.А., Построение тетраэдризации Делоне с ограничениями для тел с криволинейными границами // *Журнал Вычислительной математики и математической физики*, 2005, 45, 8, 1407–1423.
10. Kotov M.A., Kryukov I.A., Ruleva L.B., Solodovnikov S.I., Surzhikov S.T., Supersonic Air Flows around Some Geometrical Primitives // *AIAA Paper* 2015-3012, 1-20, DOI: 10.2514/6.2015-3012.
11. Kotov M., Kryukov I., Ruleva L., Solodovnikov S., Surzhikov S. The Incoming Flow Investigation around Geometric Elements in Hypersonic Shock Tube // *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, *AIAA Paper* 2016-0312, 2016. DOI 10.2514/6.2016-0312.
12. Kotov M., Kryukov I., Ruleva L., Solodovnikov S. The Investigation of Shock-Wave Interaction with Aerodynamic Models // *55th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, *AIAA Paper* 2017-0262, 2017. DOI 10.2514/6.2017-0262.
13. Ermakov M.K., Kryukov I.A., Supercomputer modeling of flow past hypersonic flight vehicles // *J. Phys.: Conference Series*, 2017, 815, 012016, 1–5.
14. Назаров В.С., Ларина Е.В., Смоляков А.А., Иванов И.Э., Крюков И.А. Численное исследование сверхзвукового обтекания затупленного конуса // *Вестник компьютерных и информационных технологий*, 2017, 8, 24–29, pp.024–029. DOI: 10.14489/vkit.2017.08
15. Makeich G.S., Kryukov I.A., Aerodynamics and Flight Dynamics Simulation of Basic Finner Supersonic Flight in Aeroballistic Experiment // *J. Phys.: Conference Series*, 2018, 1009, 012009, 1–16.
16. Kharchenko N.A., Kryukov I.A., Aerothermodynamics calculation of the *EXPERT* reentry flight vehicle // *J. Phys.: Conference Series*, 2018, 1009, 012004, 1–8.

17. Koryukov I.A., Kryukov I.A., Three-dimensional calculation of the aerothermodynamics of a double cone $25^\circ/55^\circ$ on an unstructured grid // *J. Phys.: Conference Series*, 2018, 1009, 012003, 1–8.
18. Головачев Ю.П., Леонтьева Н.В., Липницкий Ю.М. Сверхзвуковое обтекание затупленного тела, колеблющегося по углу атаки // *Журнал технической физики*, 1996, 66, 5, 45–54.
19. Cariglino F., Caresola N., Arino R. External aerodynamics simulations in rotating frame of reference. // *Int. J. of Aerospace Engineering*, 2014, Article ID 654037, 1–14.
20. Gledhill I.M.A., Forsberg K., Eliasson P., Baloyi J., Nordström J. Investigation of acceleration effects on missile aerodynamics using computational fluid dynamics // *Aerosp. Sci. Tech.*, 2009, 13(4), 197–203.
21. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П., Численное решение многомерных задач газовой динамики, М.: Наука, 1976, 400.
22. Shu C.-W., Osher S., Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes II // *J. of Computational Physics*, 1989, 83, 32–78.
23. Morinishi K. and Satofuka N., Convergence acceleration of the rational Runge–Kutta scheme for the Euler and Navier–Stokes equations // *Computers & Fluids*, 1991, 19, 3, 305–313.
24. Woodward P.R., Colella P., The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // *J. of Computational Physics*, 1984, 54, 115–173.
25. Gottlieb J. J., Groth C. P. T. Assessment of Riemann solvers for unsteady one-dimensional inviscid flows of perfect gases // *J. Comp. Phys.*, 1988, 78, 2, 437–458.
26. Dukowicz J.K., A General, non-iterative Riemann solver for Godunov's Method // *J. Comp. Phys.*, 1985, 61, 1, 119–137.
27. Harten A., Lax P.D., van Leer B., On upstream differencing and Godunov–type scheme for hyperbolic conservation laws // *SIAM Rev.*, 1983, 25, 1, 35–61.
28. Einfeldt B., On Godunov type methods for the Euler equations with a general equation of state, Shock Tubes and Waves, 1987, 671–676.
29. Einfeldt B., Roe P.L., Munz C.D., Sjogreen B., On Godunov–type methods near low densities // *J. Comp. Phys.*, 1991, 92, 273–295.
30. Obayashi S., Guruswamy G.P. Convergence Acceleration of an Aeroelastic Navier–Stokes Solver // *AIAA Journal*, 1994, 33, 6, 1134–1141.
31. Kemm F., Heuristical and numerical considerations for the carbuncle phenomenon // *Applied Mathematics and Computation*, 2018, 320, 596–613.
32. Qu F., Chen J., Sun D., Bai J., Yan C., A new all–speed flux scheme for the Euler equations // *Computers & Mathematics with Applications*, 2019, 77, 4, 1216–1231.
33. Roe P.L., The use of Riemann problem in finite difference schemes // *Lect. Notes Phys.*, 1981, 141, 354–359.
34. Rieper F., A low–Mach number fix for Roe's approximate Riemann solver // *J. Comp. Phys.*, 2011, 230, 13, 5263–5287.
35. Harten A., Hyman J.M., Lax P.D., On finite difference approximations and entropy conditions for shocks // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1976, XXIX, 297–322.
36. Kermani M., Plett E., Modified entropy correction formula for the Roe scheme // *AIAA Paper 2001-83*, 2001.
37. Yee H.C., Klopfer G.H., Montage J.L., High resolution shock–capturing schemes for inviscid hypersonic flow // *J. Comp. Phys.*, 1990, 88, 31–61.
38. Сафронов А.В., Разностная схема для нестационарных уравнений газодинамики на основе соотношений на разрывах в консервативных переменных // *Вычислительные методы и программирование*, 2007, 8, 69–76.
39. Steger J.L., Warming R.F., Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite–difference methods // *J. Comp. Phys.*, 1981, 40, 263–293.

40. Stiriba Y., A nonlinear flux split method for hyperbolic conservation laws // *J. Comp. Phys.*, 2002, 176, 1, 20–39.
41. Donat R., Marquina A., Capturing shock reflections: an improved flux formula // *J. Comp. Phys.*, 1996, 125, 42–58.
42. Yin Z., Ge X., The difference method of 2-dimensional Euler equations with flux vector splitting // *Measuring Technology and Mechatronics Automation in Electrical Engineering (Hou Z., ed.), Lecture Notes in Electrical Engineering*, vol. 135, Springer US, 2012, 485–491.
43. van Leer B., Flux–vector splitting for the Euler equations // *Lect. Notes Phys.*, 1982, 170, 507–512.
44. Hänel D., Schwane R., Seider G., On the accuracy of upwind schemes for the solution of the Navier–Stokes equations // *AIAA Paper 87-1105-CP*, 1987.
45. Selmin V., Formaggia L., Simulation of hypersonic flows on unstructured grids // *Int. J. Numer. Meth. Engrn.*, 1992, 34, 2, 569–606.
46. Liou M.-S., Steffen Jr C.J., A new flux splitting scheme // *J. Comp. Phys.*, 1993, 107, 1, 23–39.
47. Liou M.-S., A sequel to AUSM: AUSM+ // *J. Comp. Phys.*, 1996, 129, 364–382.
48. Liou M.-S., A sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up for all speeds // *J. Comp. Phys.*, 2006, 214, 137–170.
49. Kim K. H., Kim C., Rho O.-H. Methods for the Accurate Computations of Hypersonic Flows: I. AUSMPW+Scheme // *J. Comp. Phys.*, 2001, 174, 1, 38–80.
50. Kitamura K., Shima E., Towards shock–stable and accurate hypersonic heating computations: A new pressure flux for AUSM–family schemes // *J. Comp. Phys.*, 2013, 245, 62–83.
51. Singh R., Holmes G., Evaluation of an artificial dissipation and AUSM based flux formulation: AD–AUSM // *AIAA Pap.* 2000-3069, 2012.
52. Chen S.–S., Yan C., Zhong K., Xue H.–C., Li, E.–L., A novel flux splitting scheme with robustness and low dissipation for hypersonic heating prediction // *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 2018, 127, 126–137.
53. Barth T.J., Jespersen D.C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes // *AIAA Paper No.* 1989–0366, Jun 1989.
54. Choi H., Liu J.G., The reconstruction of upwind fluxes for conservation laws: its behavior in dynamic and steady state calculations // *J. Comput. Phys.*, 1998, 144, 237–256
55. Li W., Ren Y. –X., Lei G., Luo H., The multi–dimensional limiters for solving hyperbolic conservation laws on unstructured grids // *J. Comp. Phys.*, 2011, 230, 21, 7775–7795,
56. Nejat A., Ollivier–Gooch C., A high-order accurate unstructured finite volume Newton–Krylov algorithm for inviscid compressible flows // *J. Comp. Phys.*, 2008, 227, 4, 2582–2609.
57. Venkatakrishnan V. Convergence to Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters // *J. Comp. Physics*, Vol. 118, 1995, 120–130.
58. Michalak C., Ollivier–Gooch C. Accuracy preserving limiter for the high–order accurate solution of the Euler equations // *J. Comp. Physics*, Vol. 228, 2012, pp. 8693–9711.
59. Haselbacher A., Blazek J. Accurate and efficient discretization of Navier–Stokes equations on mixed grids // *AIAA Journal*, 2000, 38, 11, 2094–2102.
60. Weiss J.M., Maruszewski J.P., Smith W.A. Implicit solution of preconditioned Navier–Stokes equations using algebraic multigrid // *AIAA Journal*, 1999, 37, 1, 29–36.
61. Wood W.A., Kleb W.L. 2-D/Axisymmetric Formulation of Multi-dimensional Upwind Scheme // *AIAA Paper 2001–2630*, 2001, 1–17.
62. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, М.: Наука, Физматгиз, 1974, 711 с.
63. Фабрикант Н.Я., Аэродинамика, М: Наука, 1964, 816 с.
64. Gray J. D., Summary Report on Aerodynamic Characteristics of Standard Models HB-1 and HB-2 // *AEDC-TDR-64-137*, July 1964.

65. Kuchi-ishi S, Watanabe S, Nagai S, et al. Comparative force/heat flux measurements between JAXA hypersonic test facilities using standard model HB-2 (Part 1:1.27 m hypersonic wind tunnel results) // JAXA Research and Development Report JAXA-RR-04-035E, 2005, 22.
66. Адамов Н.П., Васенёв Л.Г., Звезгинцев В.И. и др., Исследования характеристик гиперзвуковой аэродинамической трубы АТ–303. Часть 2. Аэродинамика эталонной модели HB–2// Теплофизика и аэромеханика, 2006, 13, 2, с. 173–188.
67. Крюков И.А., Иванов И.Э., Ларина Е.В. Верификация программного комплекса hySOL для расчета высокоскоростных течений // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017), 24–31 мая 2017 г. Алушта, М.: Изд-во МАИ Москва, т. 1, с. 485–487.

References

1. Petrov, M. N., Tambova, A. A., Titarev, V. A., Utjuzhnikov, S. V., Chikitkin, A. V., “Programmnyj kompleks FlowModellium dlja rascheta vysokoskorostnyh techenij szhimaemogo gaza,” *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki*, Vol. 58, No. 11, 2018, pp. 1932–1954.
2. Emelyanov, V., Karpenko, A., Volkov, K., “Development and Acceleration of Unstructured Mesh Based CFD Solver,” *Progress in Flight Physics*, Vol. 9, 2017, pp. 387–408.
3. Volkov, K. N., Emel'janov, V. N., Karpenko, A. G., “Chislennoe modelirovanie gazodinamicheskikh i fiziko–himicheskikh processov pri obtekanii tel giperzvukovym potokom,” *Vych. met. programmirovaniye*, Vol. 18, No. 4, 2017, pp. 387–405.
4. Ermakov, M. K., “Hypersonic flow modeling past at aircraft on “Lomonosov” supercomputer,” *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, Vol. 14, No. 4, 2013. <http://chemphys.edu.ru/issues/2013-14-4/articles/422/>
5. Abalakin, I. V., Bahvalov, P. A., Gorobec, A. V., Duben', A. P., Kozubskaja, T. K., “Parallel'nyj programmnyj kompleks NOISETTE dlja krupnomasshtabnyh raschetov zadach ajerodinamiki i ajeroakustiki,” *Vych. met. Programmirovaniye*, Vol. 13, No. 3, 2012, pp. 110–125.
6. Zinin, K. M., Panasenko, A. V., Surzhikov, S. T., “Validation of computer code UST3D by the example of calculating the aerodynamic characteristics of the X–34 vehicle under various parameters,” *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, Vol. 20, No. 4. 2019. <http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-4/articles/882/>
7. Borovikov, S. N., Ivanov, I. Je., Kpjukov, I. A., “Modelirovanie prostranstvennyh techenij ideal'nogo gaza,” *Matematicheskoe modelirovanie RAN*, Vol. 18, No. 8, 2006, pp. 37–48.
8. Borovikov, S. N., Kpjukov, I. A., Ivanov, I. Je., “Postroenie nereguljarnyh treugol'nyh setok na krivolinejnyh granjah na osnove trianguljicii Delone,” *Matematicheskoe modelirovanie RAN*, Vol. 17, No. 8, 2005, pp. 31–45.
9. Borovikov, S. N., Ivanov, I. Je., Kpjukov, I. A., “Postroenie tetrajedrizacioni Delone s ogranichenijami dlja tel s krivolinejnymi granicami,” *Zhurnal Vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki*, Vol. 45, No. 8, 2005, pp. 1407–1423.
10. Kotov, M. A., Kryukov, I. A., Ruleva, L. B., Solodovnikov, S. I., Surzhikov, S. T., “Supersonic Air Flows around Some Geometrical Primitives,” *33rd AIAA Applied Aerodynamics Conference*, AIAA Paper 2015-3012, Jun. 2015. DOI: 10.2514/6.2015-3012
11. Kotov, M. A., Kryukov, I. A., Ruleva, L. B., Solodovnikov, S. I., Surzhikov, S. T., “The Incoming Flow Investigation around Geometric Elements in Hypersonic Shock Tube,” *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, AIAA Paper 2016-0312, 2016. DOI 10.2514/6.2016-0312
12. Kotov, M. A., Kryukov, I. A., Ruleva, L. B., Solodovnikov, S. I., “The Investigation of Shock-Wave Interaction with Aerodynamic Models,” *55th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, AIAA Paper 2017-0262, 2017. DOI 10.2514/6.2017-0262

13. Ermakov, M. K., Kryukov, I. A., “Supercomputer modeling of flow past hypersonic flight vehicles,” *J. Phys.: Conference Series*, Vol. 815, 012016, 2017, pp. 1–5.
14. Nazarov, V. S., Larina, E. V., Smoljakov, A. A., Ivanov, I. Je., Krjukov, I. A., “Chislennoe issledovanie sverhzhukovogo obtekanija zatuplennogo konusa,” *Vestnik komp'juternyh i informacionnyh tehnologij*, Vol. 8, 2017, pp. 024–029. DOI: 10.14489/vkit.2017.08
15. Makeich, G. S., Kryukov, I. A., “Aerodynamics and Flight Dynamics Simulation of Basic Finner Supersonic Flight in Aeroballistic Experiment,” *J. Phys.: Conference Series*, Vol. 1009, 012009, 2018, pp. 1–16.
16. Kharchenko, N. A., Kryukov, I. A., “Aerothermodynamics calculation of the EXPERT reentry flight vehicle,” *J. Phys.: Conference Series*, Vol. 1009, 012004, 2018, 1–8.
17. Koryukov, I. A., Kryukov, I. A., “Three-dimensional calculation of the aerothermodynamics of a double cone $25^\circ/55^\circ$ on an unstructured grid,” *J. Phys.: Conference Series*, Vol. 1009, 012003, 2018, pp. 1–8.
18. Golovachev, Ju. P., Leont'eva, N. V., Lipnickij, Ju. M., “Sverhzhukovoe obtekanie zatuplennogo tela, kolebljushhegosja po uglu ataki,” *Zhurnal tehniczeskoj fiziki*, Vol. 66, No. 5, 1996, 45–54.
19. Cariglino, F., Caresola, N., Arino, R., “External aerodynamics simulations in rotating frame of reference,” *Int. J. of Aerospace Engineering*, 2014, Article ID 654037, pp. 1–14.
20. Gledhill, I. M. A., Forsberg, K., Eliasson, P., Baloyi, J., Nordström, J., “Investigation of acceleration effects on missile aerodynamics using computational fluid dynamics,” *Aerosp. Sci. Tech.*, Vol. 13, No. 4, 2009, pp. 197–203.
21. Godunov, S. K., Zabrodin, A. V., Ivanov, M. Ja., Krajko, A. N., Prokopov, G. P., *Chislennoe reshenie mnogomernyh zadach gazovoj dinamiki* (Numerical solution of multidimensional gas dynamics problems), M.: Nauka, 1976, 400 p.
22. Shu, C.-W., Osher, S., “Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes II,” *J. of Computational Physics*, Vol. 83, 1989, 32–78.
23. Morinishi, K. and Satofuka, N., “Convergence acceleration of the rational Runge–Kutta scheme for the Euler and Navier–Stokes equations,” *Computers & Fluids*, Vol. 19, No. 3, 1991, pp. 305–313.
24. Woodward, P. R., Colella, P., “The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks,” *J. of Computational Physics*, Vol. 54, 1984, pp. 115–173.
25. Gottlieb, J. J., Groth, C. P. T., “Assessment of Riemann solvers for unsteady one-dimensional inviscid flows of perfect gases,” *J. Comp. Phys.*, Vol. 78, No. 2, 1988, pp. 437–458.
26. Dukowicz, J. K., “A General, non-iterative Riemann solver for Godunov's Method,” *J. Comp. Phys.*, Vol. 61, No. 1, 1985, pp. 119–137.
27. Harten, A., Lax, P. D., van Leer, B., “On upstream differencing and Godunov–type scheme for hyperbolic conservation laws,” *SIAM Rev.*, Vol. 25, No. 1, 1983, pp. 35–61.
28. Einfeldt, B., “On Godunov type methods for the Euler equations with a general equation of state,” *Proc. of the 16th Int. Conf. on Shock Tubes and Waves*, July 1987, pp. 671–676.
29. Einfeldt, B., Roe, P. L., Munz, C. D., Sjogreen, B., “On Godunov–type methods near low densities,” *J. Comp. Phys.*, Vol. 92, 1991, pp. 273–295.
30. Obayashi, S., Guruswamy, G. P., “Convergence Acceleration of an Aeroelastic Navier–Stokes Solver,” *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 6, 1994, pp. 1134–1141.
31. Kemm, F., “Heuristical and numerical considerations for the carbuncle phenomenon,” *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 320, 2018, pp. 596–613.
32. Qu, F., Chen, J., Sun, D., Bai, J., Yan, C., “A new all–speed flux scheme for the Euler equations,” *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 77, No. 4, 2019, pp. 1216–1231.
33. Roe, P. L., “The use of Riemann problem in finite difference schemes,” *Lect. Notes Phys.*, Vol. 141, 1981, pp. 354–359.
34. Rieper, F., “A low–Mach number fix for Roe's approximate Riemann solver,” *J. Comp. Phys.*, Vol. 230, No. 13, 2011, pp. 5263–5287.

35. Harten, A., Hyman, J. M., Lax, P. D., "On finite difference approximations and entropy conditions for shocks," *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. XXIX, 1976, pp. 297–322.
36. Kermani, M., Plett, E., "Modified entropy correction formula for the Roe scheme," *39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA Paper 2001-83, Jan. 2001.
37. Yee, H. C., Klopfer, G. H., Montage, J. L., "High resolution shock-capturing schemes for inviscid hypersonic flow," *J. Comp. Phys.*, Vol. 88, 1990, pp. 31–61.
38. Safronov, A. V., "Raznostnaja shema dlja nestacionarnyh uravnenij gazodinamiki na osnove sootnoshenij na razryvah v konservativnyh peremennyh," *Vychislitel'nye metody i programmirovanie*, Vol. 8, 2007, pp. 69–76.
39. Steger, J. L., Warming, R. F., "Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods," *J. Comp. Phys.*, Vol. 40, 1981, pp. 263–293.
40. Stiriba, Y., "A nonlinear flux split method for hyperbolic conservation laws," *J. Comp. Phys.*, Vol. 176, No. 1, 2002, pp. 20–39.
41. Donat, R., Marquina, A., "Capturing shock reflections: an improved flux formula," *J. Comp. Phys.*, Vol. 125, 1996, pp. 42–58.
42. Yin, Z., Ge, X., "The difference method of 2-dimensional Euler equations with flux vector splitting," *Measuring Technology and Mechatronics Automation in Electrical Engineering* (Hou Z., ed.), *Lecture Notes in Electrical Engineering*, Vol. 135, Springer US, 2012, pp. 485–491.
43. van Leer, B., "Flux-vector splitting for the Euler equations," *Lect. Notes Phys.*, Vol. 170, 1982, pp. 507–512.
44. Hänel, D., Schwane, R., Seider, G., "On the accuracy of upwind schemes for the solution of the Navier–Stokes equations," *Proc. of the AIAA 8th Computational Fluid Dynamics Conference*, AIAA Paper 87-1105-CP, 1987.
45. Selmin, V., Formaggia, L., "Simulation of hypersonic flows on unstructured grids," *Int. J. Numer. Meth. Engn.*, Vol. 34, No. 2, 1992, pp. 569–606.
46. Liou, M.-S., Steffen, Jr. C. J., "A new flux splitting scheme," *J. Comp. Phys.*, Vol. 107, No. 1, 1993, pp. 23–39.
47. Liou, M.-S., "A sequel to AUSM: AUSM+," *J. Comp. Phys.*, Vol. 129, 1996, pp. 364–382.
48. Liou, M.-S., "A sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up for all speeds," *J. Comp. Phys.*, Vol. 214, 2006, pp. 137–170.
49. Kim, K. H., Kim, C., Rho, O.-H., "Methods for the Accurate Computations of Hypersonic Flows: I. AUSMPW+Scheme," *J. Comp. Phys.*, Vol. 174, No. 1, 2001, pp. 38–80.
50. Kitamura, K., Shima, E., "Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations: A new pressure flux for AUSM-family schemes," *J. Comp. Phys.*, Vol. 245, 2013, pp. 62–83.
51. Singh, R., Holmes, G., "Evaluation of an artificial dissipation and AUSM based flux formulation: AD-AUSM," *42nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, AIAA Paper 2000-3069, June 2012.
52. Chen, S.-S., Yan, C., Zhong, K., Xue, H.-C., Li, E.-L., "A novel flux splitting scheme with robustness and low dissipation for hypersonic heating prediction," *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 127, 2018, 126–137.
53. Barth, T. J., Jespersen, D. C., "The design and application of upwind schemes on unstructured meshes," *27th Aerospace Sciences Meeting*, AIAA Paper 1989-0366, Jan. 1989.
54. Choi, H., Liu, J. G., "The reconstruction of upwind fluxes for conservation laws: its behavior in dynamic and steady state calculations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 144, 1998, pp. 237–256.
55. Li, W., Ren, Y.-X., Lei, G., Luo, H., "The multi-dimensional limiters for solving hyperbolic conservation laws on unstructured grids," *J. Comp. Phys.*, Vol. 230, No. 21, 2011, pp. 7775–7795.
56. Nejat, A., Ollivier-Gooch, C., "A high-order accurate unstructured finite volume Newton–Krylov algorithm for inviscid compressible flows," *J. Comp. Phys.*, Vol. 227, No. 4, 2008, pp. 2582–2609.
57. Venkatakrishnan, V., "Convergence to Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters," *J. Comp. Physics*, Vol. 118, 1995, pp. 120–130.

58. Michalak, C., Ollivier–Gooch, C., “Accuracy preserving limiter for the high–order accurate solution of the Euler equations,” *J. Comp. Physics*, Vol. 228, 2012, pp. 8693–9711.
59. Haselbacher, A., Blazek, J., “Accurate and efficient discretization of Navier–Stokes equations on mixed grids,” *AIAA Journal*, Vol. 38, No. 11, 2000, 2094–2102.
60. Weiss, J.M., Maruszewski, J.P., Smith, W. A., “Implicit solution of preconditioned Navier–Stokes equations using algebraic multigrid,” *AIAA Journal*, Vol. 37, No. 1, 1999, pp. 29–36.
61. Wood, W. A., Kleb, W. L., “2-D/Axisymmetric Formulation of Multi-dimensional Upwind Scheme,” *15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, AIAA Paper 2001–2630, June 2001.
62. Shlihting, G., *Teorija pograničnogo sloja* (Boundary layer theory), M.: Nauka, Fizmatgiz, 1974, 711 p.
63. Fabrikant, N. Ja., *Ajerodinamika* (Aerodynamics), M: Nauka, 1964, 816 p.
64. Gray, J. D., “Summary Report on Aerodynamic Characteristics of Standard Models HB-1 and HB-2,” *AEDC-TDR-64-137*, July 1964.
65. Kuchi-ishi, S, Watanabe, S, Nagai, S, et al., “Comparative force/heat flux measurements between JAXA hypersonic test facilities using standard model HB-2 (Part 1:1.27 m hypersonic wind tunnel results),” JAXA Research and Development Report JAXA-RR-04-035E, 2005, 22.
66. Adamov, N.P., Vasenjov, L.G., Zvegincev, V.I. i dr., “Issledovanija harakteristik giperzvukovoj ajerodinamičeskoj truby AT–303. Čast' 2. Ajerodinamika jetalonoj modeli HB–2,” *Teplofizika i ajeromehanika*, Vol. 13, No. 2, 2006, pp. 173–188.
67. Krjukov, I. A., Ivanov, I. Je., Larina, E. V., “Verifikacija programmnogo kompleksa hySOL dlja rasčeta vysokoskorostnyh tečenij,” *Materialy XX Jubilejnoj Mezhdunarodnoj konferencii po vychislitel'noj mehanike i sovremennym prikladnym programnym sistemam* (VMSPPS'2017), 24–31 maja 2017 g. Alushta, M.: Izd-vo MAI Moskva, Vol. 1, pp. 485–487.

Статья поступила в редакцию 5 октября 2020 г.