

Numerical Study of Gas-Dynamic and Thermal Processes in a Pulsed Electric Discharge

E. A. Ermakov¹, I. E. Ivanov^{1,2}

¹Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

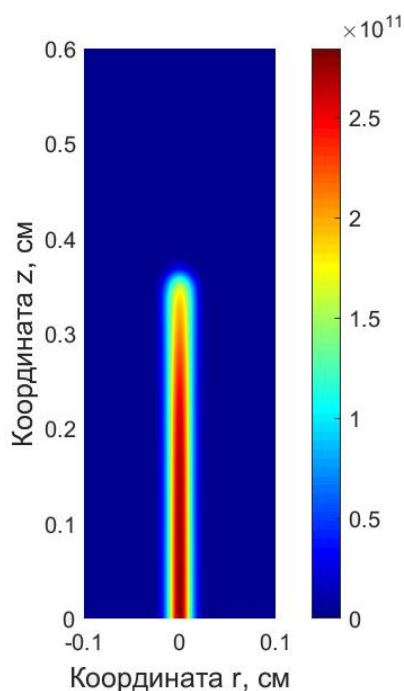
²Moscow Aviation Institute, Moscow, 125993, Russia

eg.ermakov2013@yandex.ru

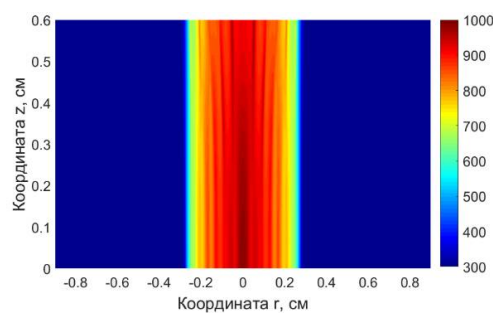
Abstract

The processes accompanying the formation of a contracted (columnar) high-current nanosecond electric discharge in sub-centimeter gaps filled with nitrogen are numerically investigated in this work. The space between two flat electrodes is considered in the case when a potential difference of 25 kV is instantly established between them. The voltage is applied for a period of 200 ns, and then instantly removed. The characteristics of the non-thermal and thermal stages of an electric discharge development are studied, namely: the formation and growth of a streamer, the closure of the discharge gap by a streamer, the formation of a plasma channel, secondary ionization waves, an increase in the current density and temperature in the axial region of the channel. After switching off the electric field, the gas-dynamic processes associated with the thermal effect of the discharge on the neutral gas are investigated. Gas-dynamic processes are determined by the propagation of shock waves and rarefaction waves in the radial direction in relation to the axis of symmetry. The quantitative values of both the electric field (electron density, electric field strength) and gas-dynamic parameters (temperature, pressure, gas velocity) are determined.

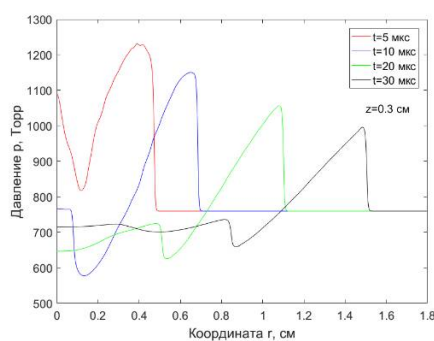
Key words: low-temperature plasma, energy input, drift-diffusion model, Euler equations, shock wave, Godunov's scheme.



The electron density n_e (cm^{-3}) of the growing streamer at $t = 14$ ns



The neutral gas temperature distribution T (K) at $t = 200$ ns



The pressure profiles of shock waves after energy input at different times

УДК: 533.95; 533.697; 537.52

Численное исследование газодинамических и тепловых процессов в импульсном электрическом разряде

Е. А. Ермаков¹, И. Э. Иванов^{1,2}

¹ *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия, Москва, 119991, Ленинские горы, д.1, стр. 2*

² *Московский авиационный институт, Россия, Москва, 125993, Волоколамское шоссе, д. 4*

eg.ermakov2013@yandex.ru

Аннотация

В работе численно исследуются процессы, сопровождающие образование контрагированного (колоннообразного) сильноточного наносекундного электрического разряда в субсантиметровых промежутках, заполненных азотом. Рассматривается пространство между двумя плоскими электродами в случае, когда между ними мгновенно устанавливается разность потенциалов 25 кВ. Напряжение прикладывается в течение промежутка времени 200 нс, а затем мгновенно снимается. Изучаются характеристики нетермической и термической стадий развития электрического разряда, а именно: образование и рост стримера, замыкание стримером разрядного промежутка, образование плазменного канала, вторичные волны ионизации, рост плотности тока и температуры в приосевой области канала. После отключения электрического поля исследуются газодинамические процессы, связанные с термическим воздействием разряда на нейтральный газ. Газодинамические процессы определяются распространением ударных волн и волн разрежения в радиальном направлении по отношению к оси симметрии. Определяются количественные значения характеристик как электрического поля (плотность электронов, напряженность), так и газодинамических параметров (температура, давление, скорость газа).

Ключевые слова: низкотемпературная плазма, энергоклад, дрейфово-диффузионная модель, уравнения Эйлера, ударная волна, схема Годунова.

1. Введение

Численное моделирование процесса зажигания самостоятельного разряда при протекании электрического тока через газовую среду (пробой газа) – это по-прежнему актуальная задача в области физики плазмы. Во многих случаях начальные стадии горения разряда связаны с возникновением и развитием тонких плазменных каналов (стримеров или лидеров), движущихся по направлению от одного электрода к другому [1]. Вызывает интерес как связь процесса замыкания одиночным стримером разрядного промежутка с моментом непосредственно пробоя, так и исследование сценариев пробоя при реализации множественных распределенных во времени и пространстве стримеров. Вопрос о стримерном пробое – один из фундаментальнейших в данной теории [1]. Численному моделированию распространения стримера в рамках континуального приближения (дрейфово-диффузионная модель) посвящены работы [3–8, 22–24], в рамках кинетического подхода – [9, 10]. Подробный обзор методов компьютерного моделирования электроразрядных процессов с помощью континуальных моделей приведен в монографии [2]. Физическая картина развития стримера рассматривается в работах [1, 3, 11]. В работах [12–14, 25] численно исследуется тепловые и газодинамические эффекты горения разряда на этапе после пробоя.

В последнее время отмечается повышенный интерес к исследованию газодинамических и теплофизических процессов, сопровождающих импульсные электрические разряды в газах. В частности, электрические разряды применяются для определения особенностей газодинамических потоков в физическом эксперименте при помощи визуализации градиента плотности посредством изменения светимости плазмы.

Так, например, в экспериментальных работах [20, 21] исследуются газодинамические структуры, возникающие при взаимодействии плоской ударной волны с препятствием в виде клина. Ударная волна генерируется в ударной трубе, в которой в камере низкого давления расположена разрядная секция. Для визуализации газодинамических структур применяют объемный разряд, который зажигается между электродами (плазменными листами), расположенными в верхней и нижней части канала ударной трубы. В результате дифракции ударной волны и последующего обтекания клина спутным потоком газа вблизи торца клина наблюдается вихревая область с пониженным давлением, в которой локализуется разряд.

В работе [15] численно исследуется процесс прорастания стримера в приосевой области колоннообразного свободного вихря. Газодинамические явления не учитываются (из-за малого времени прорастания стримера), вихревое течение моделируется заданным профилем плотности газовой среды, в котором плотность на оси симметрии в два раза ниже, чем плотность на периферии вихревой области. В работе отмечается, что разряд в такой структуре протекает в небольшой области около оси симметрии вихря, то есть наблюдается его контрагирование. При этом заметны существенные изменения во времена замыкания стримером разрядного промежутка. Стример прорастает на порядок быстрее (≈ 2.6 нс) вдоль оси вихря, чем в случае постоянного давления, соответствующего значению на периферии вихря (≈ 21 нс) в той же расчетной области.

Возможность наблюдения газодинамических структур вблизи разрядной области представлена в работе [16]. Проводится сравнение экспериментальных данных (снимки, полученные с помощью шлирен-метода) и численных расчетов. Как результат, сопоставляются фотографии из эксперимента и обработка рассчитанных распределений: сравнение показывает хорошее соответствие. Шлирен-изображения позволяют проследить не только за изменением формы разряда в межэлектродном промежутке, но и за газодинамическими возмущениями в виде ударных волн, распространяющихся от оси симметрии. Ударные волны на снимках становятся хорошо заметными лишь спустя 200 нс, после чего фиксируется их распространение в радиальном направлении.

Исследование, проводимое в данной работе, нацелено на количественное и качественное изучение газодинамических и тепловых процессов, протекающих как во время контрагированного наносекундного сильноточного разряда, так и в течение значительного промежутка времени после него. Помимо этого, особый интерес представляет исследование динамики прорастания отрицательного стримера в молекулярном азоте, а также формирование плазменного канала после замыкания стримером межэлектродного промежутка, вторичные волны ионизации и нагрев газа в токовом канале. Эти плазменные эффекты вносят существенный вклад в дальнейшую эволюцию газодинамических параметров после отключения внешнего поля.

Настоящее численное исследование базируется на континуальном подходе, для описания динамики плазмы применяется диффузионно-дрейфовая модель [17], для газодинамического описания – система нестационарных двумерных уравнений Эйлера записанных в цилиндрической системе координат. Обе системы уравнений решается численно на основе метода конечного объема и схемы Годунова [18]. Уравнение Пуассона для потенциала электрического поля решается методом Гаусса – Зейделя с верхней релаксацией. Для уменьшения времени расчета подбирается наиболее оптимальный параметр релаксации, позволяющий минимизировать время расчетов. Расчетная область содержит в себе 301×101 , 301×301 301×601 узлов.

2. Постановка задачи

2.1. Физическая модель

В данном исследовании рабочей средой является молекулярный азот N_2 и его двухкомпонентная низкотемпературная плазма ($T_e = 2$ эВ). Газ и плазма заполняют пространство между плоскими электродами, расположенными на расстоянии $l_z = 0.6$ см. Катод заземлен ($V_c = 0$), а на анод прикладывается напряжение ($V_a = 25$ кВ), поддерживаемое все время протекания разряда постоянным. Первоначально вблизи катода располагается «затравочное» пятно квазинейтральной плазмы, в котором заряженные компоненты при включении электрического поля начинают перераспределяться в межэлектродном зазоре, в следствие чего от катода к аноду прорастает отрицательный стример. Появление новых ионов и электронов происходит лишь за счет ионизации путем столкновения ускоренных заряженных частиц с нейтральными молекулами. Во внимание принимается и обратный процесс, связанный с ион-электронной рекомбинацией, приводящий к появлению нейтральных молекул. Процесс фотоионизации в данной модели не учитывается.

В ходе расчетов не учитывается кинетика химических реакций. Вместо этого рассматриваются усредненные значения коэффициентов ионизации α и рекомбинации ионов с электронами β . При описании газодинамических процессов показатель адиабаты γ остается величиной постоянной в ходе данного исследования. Такое допущение возможно, поскольку ни электроны (степень ионизации плазмы мала), ни возбужденные степени свободы молекул не вносят существенный вклад в значение γ при достигаемых значениях температуры.

Задача решается в осесимметричной постановке в цилиндрической системе координат. Размер области в радиальном направлении при расчете выбирается так, чтобы до «внешней границы» расчетной области не распространялись возмущения ни электрического поля, ни газодинамических параметров, т.е. основные процессы оказывались локализованными на довольно большом расстоянии от «внешней границы». В виду того, что с увеличением размера области требуется большее число расчетных узлов (для сохранения разрешения разностного алгоритма по пространственной координате), время расчета, соответственно, тоже существенно увеличивается. С целью экономии вычислительных ресурсов предлагается двухчастный алгоритм расчета. Сначала производится расчет задачи с учетом электрического поля и нестационарной газодинамики. После отключения внешнего поля рассчитываются только газодинамические процессы. В обоих случаях происходит увеличение радиального размера области и расчетной сетки путем добавления новых узлов. Однако в случае решения задачи при наличии электрического поля производится увеличение координаты и повторный расчет параметров, а после его отключения – добавление к исходной разностной сетке новых узлов, в которых расположены значения параметров на внешней границе исходной области. В этом случае шаг по времени в явной численной схеме решения газодинамической задачи можно брать существенно больше, чем в задаче моделирования разряда, сохраняя при этом устойчивость (в случае расчетов до отключения поля шаг по времени был $\tau = 10^{-14}$ с, после – $\tau = 10^{-8}$ с). Это позволяет существенно сократить длительность вычислений.

2.2. Математическая модель

В данной работе для описания процессов, связанных с прорастанием стримера и горением разряда между электродами, применяется дрейфово-диффузионная модель, основанная на приближении сплошной среды (континуальное приближение). Чтобы можно было ее применить, необходимо, чтобы выполнялось условие относительно числа Кнудсена

$$\text{Kn} = \frac{\lambda}{L} \ll 1, \quad (1)$$

где λ – длина свободного пробега; L – характерный размер системы.

Ниже приводится система уравнений дрейфово-диффузионной модели, которая описывает динамику двухкомпонентной плазмы

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_e = \alpha \mu_e n_e |\mathbf{E}| - \beta n_e n_p, \quad (2)$$

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_p = \alpha \mu_e n_e |\mathbf{E}| - \beta n_e n_p, \quad (3)$$

$$\mathbf{j}_e = -D_e \nabla n_e - \mu_e n_e \mathbf{E}, \quad (4)$$

$$\mathbf{j}_p = -D_p \nabla n_p + \mu_p n_p \mathbf{E} + \mathbf{v}_{\text{gas}}^{\text{electr}} n_p, \quad (5)$$

$$\mathbf{v}_{\text{gas}}^{\text{electr}} = v_z \mathbf{e}_z + v_r \mathbf{e}_r, \quad (6)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{e}{\varepsilon_0} (n_p - n_e), \quad (7)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (8)$$

В данной системе n_e, n_p – плотность электронов и положительно заряженных ионов, соответственно; $\mathbf{j}_e, \mathbf{j}_p$ – плотности потоков электронов и положительно заряженных ионов, соответственно; α – коэффициент ионизации; β – коэффициент электрон-ионной рекомбинации; μ_e, μ_p – подвижность электронов и положительно заряженных ионов; D_e, D_p – коэффициент диффузии электронов и положительно заряженных ионов; \mathbf{E} – напряженность электрического поля; φ – потенциал электрического поля; $e = 1.6 \times 10^{-19}$ Кл – элементарный электрический заряд; $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-14}$ Ф/см – электрическая постоянная; $\mathbf{v}_{\text{gas}}^{\text{electr}} = (v_z, v_r)$ – скорость газа, учитываемая в дрейфово-диффузионном приближении (поскольку задача симметрична относительно поворота вокруг оси цилиндрической системы, то угловая компонента скорости остается неизменной и не учитывается при решении).

Уравнения (2) и (3) являются аналогами закона сохранения электрического заряда и записываются, соответственно, для плотностей электронов и положительно заряженных ионов. В их состав входят плотности потоков частиц, определяемые на основе соотношений (4) и (5). Поскольку нейтральный газ в задаче в ходе газодинамических процессов двигается в межэлектродном зазоре, то необходимо в плотности потока положительно заряженных ионов учитывать еще дополнительно конвективное слагаемое, включающее макроскорость нейтральной среды (6). В записи плотности потока электронов конвективное слагаемое отсутствует, поскольку рассматриваемая плазма является слабо ионизированной (на один свободный электрон приходится около миллиона нейтральных молекул азота), а также размер (масса) электрона на 3 порядка меньше, чем размер нейтральных частиц и положительно заряженных ионов, что позволяет пренебречь макродвижением нейтральной среды в конвективном движении электронов. Формула (7) – уравнение Пуассона, определяющее распределение потенциала электрического поля в межэлектродном зазоре, формула (8) – соотношение, связывающее напряженность электрического поля и потенциал.

Для описания газодинамических и тепловых процессов используется нестационарная двумерная система уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial r} = -\frac{\rho v_r}{r}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial (\rho v_z)}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho v_z^2)}{\partial z} + \frac{\partial (\rho v_z v_r)}{\partial r} = -\frac{\rho v_z v_r}{r}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_z v_r)}{\partial z} + \frac{\partial(p + \rho v_r^2)}{\partial r} = -\frac{\rho v_r^2}{r}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_z v_\theta)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_r v_\theta)}{\partial r} = -\frac{\rho v_r v_\theta}{r}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial[(p + \rho E)v_z]}{\partial z} + \frac{\partial[(p + \rho E)v_r]}{\partial r} = -\frac{(p + \rho E)v_r}{r} + \eta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}), \quad (13)$$

$$E = e + \frac{v_z^2 + v_r^2 + v_\theta^2}{2}, \quad (14)$$

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \quad (15)$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.4, \quad (16)$$

$$\mathbf{v}_{\text{gas}}^{\text{Euler}} = v_z \mathbf{e}_z + v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (17)$$

В системе уравнений Эйлера ρ – плотность нейтрального газа; p – давление нейтрального газа; $\mathbf{v}_{\text{gas}}^{\text{Euler}} = (v_z, v_r, v_\theta)$ – скорость нейтрального газа, рассматриваемая в газодинамике (в данном случае, в отличие от дрейфово-диффузионной модели, пренебрегать угловой компонентой скорости v_θ нельзя, так как она, как и две другие компоненты скорости, влияет на решение системы уравнений); E – полная энергия, приходящаяся на единицу объема; e – плотность внутренней энергии; γ – показатель адиабаты.

Формула (9) – закон сохранения массы, формулы (10)–(12) – законы сохранения импульса, формула (13) – закон сохранения энергии. В уравнении, соответствующем закону сохранения энергии, справа стоит скалярное произведение, описывающее основной энерговыход, возникающий за счет джоулева нагрева $Q = \eta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{j})$, где $\mathbf{j} = (j_z, j_r) = \mathbf{j}_p - \mathbf{j}_e$ – плотность электрического тока. Именно через это слагаемое взаимосвязаны дрейфово-диффузионная модель и система уравнений Эйлера. Коэффициент $\eta = 0.5$ определяет долю энергии электрического поля, выделяющейся при протекании тока, которая в дальнейшем идет на непосредственный нагрев газа.

Коэффициенты ионизации и подвижности являются функциями давления и напряженности и представимы в виде

$$\alpha(p, |\mathbf{E}|) = 12 \cdot p \cdot e^{-\frac{342}{|\mathbf{E}|/p}}, (\text{Торр} \cdot \text{см})^{-1}, \quad (18)$$

$$\mu_e(p) = \frac{4.5 \times 10^5}{p}, \frac{\text{Торр} \cdot \text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}, \quad (19)$$

$$\mu_p(p) = \frac{1.45 \times 10^3}{p}, \frac{\text{Торр} \cdot \text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}} \quad (20)$$

Эти зависимости позволяют учесть локальное влияние газодинамических параметров на динамику компонент плазмы, то есть поведение электронов и положительно заряженных ионов. Так, например, в случае, когда электрическое поле становится почти однородным, основным фактором, влияющим на появление электронов и ионов, будет давление. Из анализа зависимости (18) можно выявить, что у нее есть экстремум при фиксированной напряженно-

сти, при котором достигается наибольшая ионизация (оценка дает значение давления в окрестности 100 Торр). Изменение напряженности электрического поля приводит к сдвигу положения максимума. Коэффициенты подвижности связаны простыми соотношениями с коэффициентами диффузии

$$D_e = \mu_e T_e, \quad (21)$$

$$D_p = \mu_p T_p \quad (22)$$

В данной работе температура электронов $T_e = 2$ эВ, а положительно заряженных ионов $T_p = 2.58 \times 10^{-2}$ эВ, что дает право говорить о низкотемпературной плазме.

Коэффициент электрон-ионной рекомбинации принимает постоянное значение и слабо зависит от сорта ионов, т.е. его можно использовать и для других сред. В настоящей работе он принимает следующее значение

$$\beta = 2 \times 10^{-7} \text{ см}^3/\text{с}, \quad (23)$$

Таким образом, дрейфово-диффузионная модель и система уравнений Эйлера нестационарной газодинамики образуют сопряженную модель, описывающую большой класс явлений, сопровождающих электрический разряд и его газодинамические последствия.

2.3. Начальные распределения

В начальный момент времени система состоит из нейтрального молекулярного азота и его квазинейтральной двухкомпонентной низкотемпературной плазмы. Газ равномерно заполняет все расчетное пространство, в то время как вблизи катода располагается затравочное пятно электронов и положительно заряженных ионов в форме Гауссова распределения

$$n_e|_{t=0} = 10^9 \times e^{-\frac{z^2+r^2}{\sigma^2}}, \text{ см}^{-3}, \quad (24)$$

$$n_p|_{t=0} = 10^9 \times e^{-\frac{z^2+r^2}{\sigma^2}}, \text{ см}^{-3} \quad (25)$$

В данных формулах $\sigma = 10^{-2}$ см – параметр, определяющий ширину Гауссова профиля. При включении внешнего электрического поля электроны и ионы начинают перераспределяться в пространстве – происходит рост стримера.

Разность потенциалов, прикладываемая к электродам, на протяжении всего расчета остается неизменной. При этом катод считается заземленным ($\varphi_c = 0$), а на анод подается напряжение ($\varphi_a = V = 25$ кВ). Соответственно, в начальный момент в межэлектродном зазоре устанавливается линейное распределение потенциала в виде

$$\varphi(r, z)|_{t=0} = \frac{V}{l_z} z \quad (26)$$

Газодинамические параметры перед началом расчета соответствуют случаю молекулярного азота при атмосферном давлении и температуре $T = 300$ К

$$p(r, z)|_{t=0} = 760 \text{ Торр}, \quad (27)$$

$$\rho(r, z)|_{t=0} = 1.13 \times 10^{-3} \text{ г/см}^3, \quad (28)$$

$$\mathbf{v}_{\text{gas}}^{\text{Euler}}|_{t=0} = 0 \text{ см/с} \quad (29)$$

Далее газодинамические параметры, соответствующие вышеперечисленным значениям, будут называться невозмущенными.

2.4. Граничные условия

Прежде (раздел 2.3) отмечалось, что разность потенциалов на электродах все время первого этапа (горение разряда) поддерживается постоянной. Отсюда граничное условие для потенциала на катоде и аноде выглядит

$$\varphi|_{z=0} = 0, \varphi|_{z=l_z} = V \quad (30)$$

Для электронов и положительно заряженных ионов ставится условие нулевого потока через электроды, что означает

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial n_e}{\partial z} \right|_{z=l_z} = 0, \quad (31)$$

$$\left. \frac{\partial n_p}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial n_p}{\partial z} \right|_{z=l_z} = 0 \quad (32)$$

Не учитывается вторичная электронная эмиссия из материала катода, а также термоэмиссия электронов, поскольку электроды не успевают нагреться до температур, при которых данный процесс может начаться.

Также обсуждался вопрос размера области в радиальном направлении (раздел 2.1). Его нужно выбирать таким, чтобы возмущения от процессов, связанных с горением разряда и газодинамикой, не распространялись до внешней боковой границы. Для этого на внешней боковой границе ставится условие отсутствия электронов и положительно заряженных ионов

$$n_e|_{r=l_r} = 0, n_p|_{r=l_r} = 0 \quad (33)$$

В таком случае потенциал можно считать также невозмущенным на внешней боковой границе, т.е. он сохраняет свое начальное распределение

$$\varphi|_{r=l_r} = \frac{V}{l_z} z \quad (34)$$

На оси в силу симметрии задачи потоки электронов и положительных ионов отсутствуют; для потенциала аналогично выполняется условие второго рода

$$\left. \frac{\partial n_e}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \left. \frac{\partial n_p}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (35)$$

При решении системы уравнений Эйлера на твердых стенках (анод и катод) ставятся условия непротекания газа, которые обнуляют нормальную по отношению к стенке компоненту скорости

$$v_z|_{z=0} = v_z|_{z=l_z} = 0 \quad (36)$$

Для радиальной составляющей скорости на оси тоже ставится условие отсутствия протекания газа

$$v_r|_{r=0} = 0 \quad (37)$$

3. Численные методы решения задачи

Для реализации численного решения задачи используются современные разностные схемы, позволяющие решить уравнения гиперболического и эллиптического типов.

3.1. Метод Гаусса – Зейделя с верхней релаксацией

Уравнение Пуассона, описывающее распределение потенциала электрического поля в межэлектродном зазоре, имеет эллиптический тип. При его аппроксимации на декартовой разностной сетке с использованием пятиточечного шаблона типа “крест” образуется система линейных алгебраических уравнений, позволяющая найти распределение потенциала электрического поля. Полученная система уравнений решается итерационными методом Гаусса-Зейделя совместно с методом верхней релаксации. Преимущество такого метода заключается в том, что он содержит параметр ω , варьируя который можно ускорить сходимости итерационного процесса. В данной работе параметр релаксации $\omega \in [1; 2)$ подбирался для каждой расчетной сетки с помощью вычислительного эксперимента.

Итерационная процедура для определения потенциала электрического поля выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}^{k+1} = \frac{\omega \cdot a_z}{a_{zr}} (\varphi_{i+1,j}^k + \varphi_{i-1,j}^{k+1}) + \frac{\omega \cdot a_r}{a_{zr}} \left[\left(1 + \frac{r_{j+1}}{r_j} \right) \varphi_{i,j+1}^k + \left(1 + \frac{r_{j-1}}{r_j} \right) \varphi_{i,j-1}^{k+1} \right] + \\ + (1 - \omega) \varphi_{i,j}^k + \frac{\omega}{a_{zr}} \cdot \frac{e}{\varepsilon_0} (n_p - n_e), \end{aligned} \quad (38)$$

где $a_z = \frac{1}{\Delta z^2}$, $a_r = \frac{1}{2\Delta r^2}$, $a_{zr} = \frac{2}{\Delta z^2} + \frac{2}{\Delta r^2}$.

Практика решения уравнения Пуассона методом Гаусса – Зейделя с верхней релаксацией на сетках размером 100×300 узлов показывает, что параметр ω принимает значение, близкое к 1.97.

3.2. Схема С.К. Годунова

Дрейфово-диффузионная модель и система уравнений Эйлера содержат уравнения гиперболического типа, для корректного численного решения которых используется схема Годунова. Преимущественно ее применяют при решении задач гидро- и газодинамики, в которых возникает большое количество газодинамических разрывов в течении. Рассматриваемая задача характеризуется наличием разрывов в решении, которые распространяются как в осевом, так и в радиальном направлениях.

В дрейфово-диффузионной модели члены, отвечающие за дрейфовый и конвективный перенос заряженных частиц, аппроксимируются с помощью варианта явного метода Годунова (эквивалентен противопоточной численной схеме), а члены, описывающие диффузионный перенос, аппроксимируются с помощью центрально-разностной схемы. Источниковые члены определяются на старом временном слое. Продвижение по времени происходит в соответствии с разностной схемой Эйлера.

Систему уравнений гиперболического типа (9)–(17) можно записать в векторном виде (относительно вектора консервативных переменных (Q) и векторов потоков (F и G), а также вектора правых частей (ψ))

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rG) = \psi \quad (39)$$

Схема Годунова для системы (39) записывается в виде

$$Q_{i,j}^{k+1} = Q_{i,j}^k - \frac{\tau}{\Delta z} \left(F_{i+\frac{1}{2},j}^k - F_{i-\frac{1}{2},j}^k \right) - \frac{\tau}{r_j \cdot \Delta r} \left(r_{j+\frac{1}{2}} G_{i,j+\frac{1}{2}}^k - r_{j-\frac{1}{2}} G_{i,j-\frac{1}{2}}^k \right) + \psi_{i,j}^k \tau \quad (40)$$

Схема является явной и условно устойчивой, поэтому выбор соответствующего шага по времени τ определяется на основе критерия Куранта – Фридрихса – Леви с учетом размера

шага сетки по пространственным координатам (Δz и Δr) и скорости распространения возмущений в каждом узле. Для газодинамической системы реализован вариант метода Годунова второго порядка точности на гладких решениях.

4. Результаты численного моделирования

Весь процесс численного исследования можно разделить на три этапа. Первый этап – нетермический (без заметного выделения тепла), второй – термический (с заметным выделением тепловой энергии в разрядном промежутке – энерговыкладом), третий этап связан с расчетом газодинамических последствий разряда (энерговыкладом).

4.1. Первый этап: проращение отрицательного стримера в азоте

При численном расчете процессов, происходящих на первом этапе, вблизи катода располагается “затравочное” пятно квазинейтральной плазмы азота. Затем к электродам прикладывается разность потенциалов, вследствие чего начинается перераспределение электронов и положительно заряженных ионов. На временах до нескольких наносекунд большее влияние на развитие процессов оказывает движение электронов. Во-первых, в силу значительно меньшей массы, электроны способны быстрее реагировать на появление внешнего поля (ускоряться). Они также обладают на несколько порядков большими скоростями в сравнении с ионами. Во-вторых, электроны, разогнавшиеся во внешнем электрическом поле, способны путем соударения с нейтральными молекулами ионизировать их. Именно процесс ионизации ударом приводит к образованию новых заряженных частиц и является основополагающим для поддержки горения разряда.

Таким образом, проращение отрицательного стримера характеризуется эволюцией распределения плотности электронов и положительно заряженных ионов в межэлектродном зазоре. На рис. 1 и 2 представлены распределения плотности электронов n_e и осевой составляющей электрического поля E_z в моменты времени 2, 8, 14, 21 нс, соответственно.

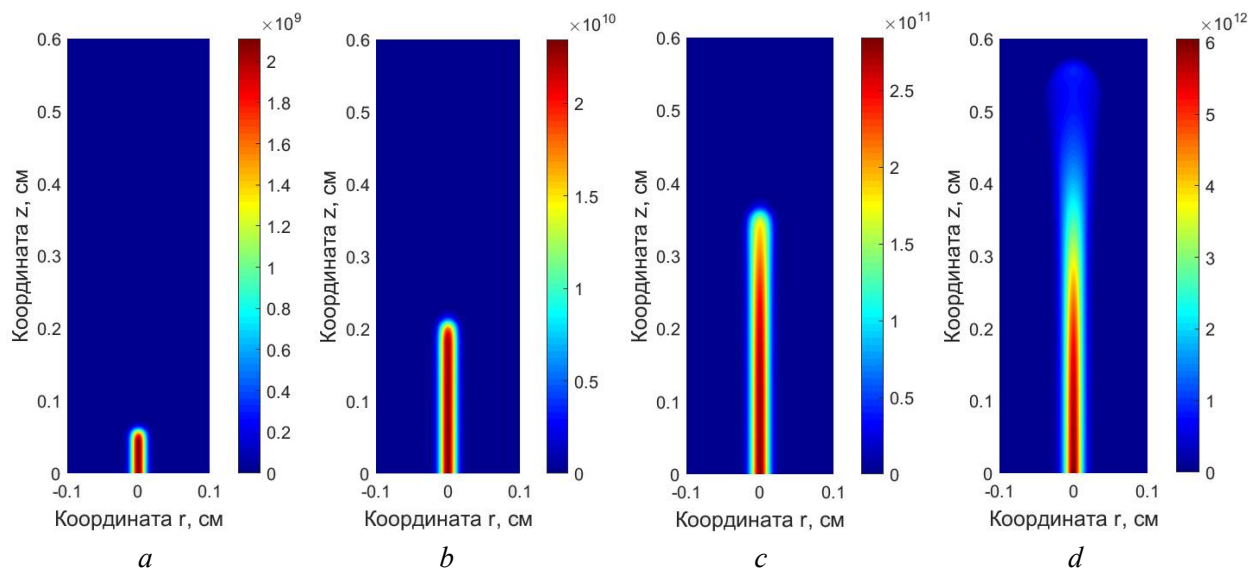


Рис. 1. Распределение плотности электронов n_e (см^{-3}) в моменты времени: *a*) $t = 2$ нс, *b*) $t = 8$ нс, *c*) $t = 14$ нс, *d*) $t = 21$ нс

Из полученных зависимостей можно сделать следующие заключения.

Во-первых, проращение стримера идет вдоль оси симметрии. Наибольшие изменения параметров электрического поля и концентраций заряженных частиц происходят именно на оси симметрии. При этом вблизи головной части стримера формируется такое разделение рядов, которое порождает “внутреннее” электрическое поле, существенно ослабляющее внешнее. В результате самосогласованного взаимодействия этих полей стример оказывается контр-агированным и распространяется к аноду.

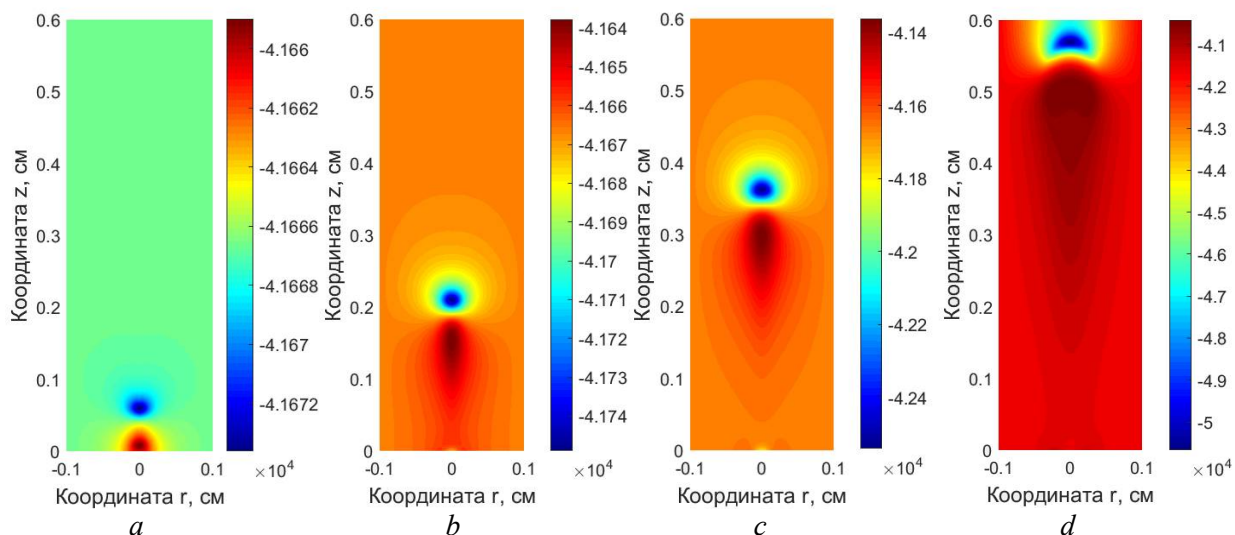


Рис. 2. Распределение осевой компоненты электрического поля E_z (В/см) в моменты времени: а) $t=2$ нс, б) $t=8$ нс, в) $t=14$ нс, г) $t=21$ нс

Во-вторых, головка стримера при приближении к аноду слегка увеличивается в поперечном направлении. Этот эффект объясняется диффузией электронов в радиальном направлении.

В-третьих, полученные результаты позволяют говорить об ускоренном распространении головки стримера к аноду. Так как речь идет про заряженные частицы во внешнем электрическом поле, то это не противоречит классическим представлениям электродинамики. Например, в работе [19] были получены результаты зависимости скорости головки стримера от времени, которые согласуются с результатами данной работы.

На рис. 3 представлена зависимость скорости головки стримера от времени, полученная в данной работе. Из графика следует, что по мере зарождения и роста стримера, а также его приближения к аноду, головка ускоряется, при этом зависимость скорости от времени нелинейная.

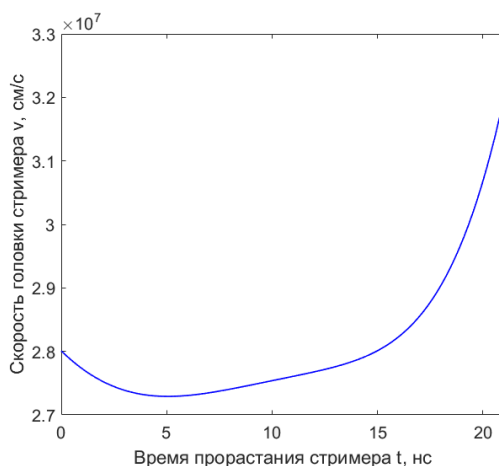


Рис. 3. Зависимость скорости головки отрицательного стримера v (см/с) от времени ее движения t (нс) в межэлектродном зазоре

На первом этапе длина радиального направления берется $l_r = 0.1$ см. Расчеты показывают, что за время первого этапа (десятки наносекунд) возникающее внутри разрядного промежутка электрическое поле не “выталкивает” заряженные частицы (в первую очередь электроны) на внешнюю границу расчетной области и тем самым ситуация на внешних границах не изменяется. В дальнейшем расчетная область существенно увеличивается в радиальном направлении.

4.2. Второй этап: процесс выделения тепловой энергии (энерговклада) в околоосевой области

Из результатов расчетов первого этапа следует, что примерно через 22 нс происходит замыкание стримерного разряда на электродах и в приосевой области образуется узкий плазменный канал. При этом наблюдается быстрое увеличение концентрации электронов и положительно заряженных ионов. По этой причине в области горения разряда внутри плазменного канала увеличивается значение плотности тока, которая пропорциональна возрастанию концентрации заряженных частиц. Ранее (раздел 2.2) обсуждалась взаимосвязь дрейфово-диффузионной модели и системы уравнений нестационарной газодинамики Эйлера. Две данные модели связаны друг с другом через следующие параметры: давление, плотность электрического тока и напряженность поля. Первый и третий влияют на процесс ионизации, а последние два определяют энерговклад в области горения. Следовательно, при увеличении плотности тока наблюдается увеличение энерговклада в околоосевой области и повышение температуры нейтрального газа.

На рис. 4 представлено распределение температуры T нейтрального газа в межэлектродном зазоре в моменты времени 25, 50, 75, 100, 150, 200 нс.

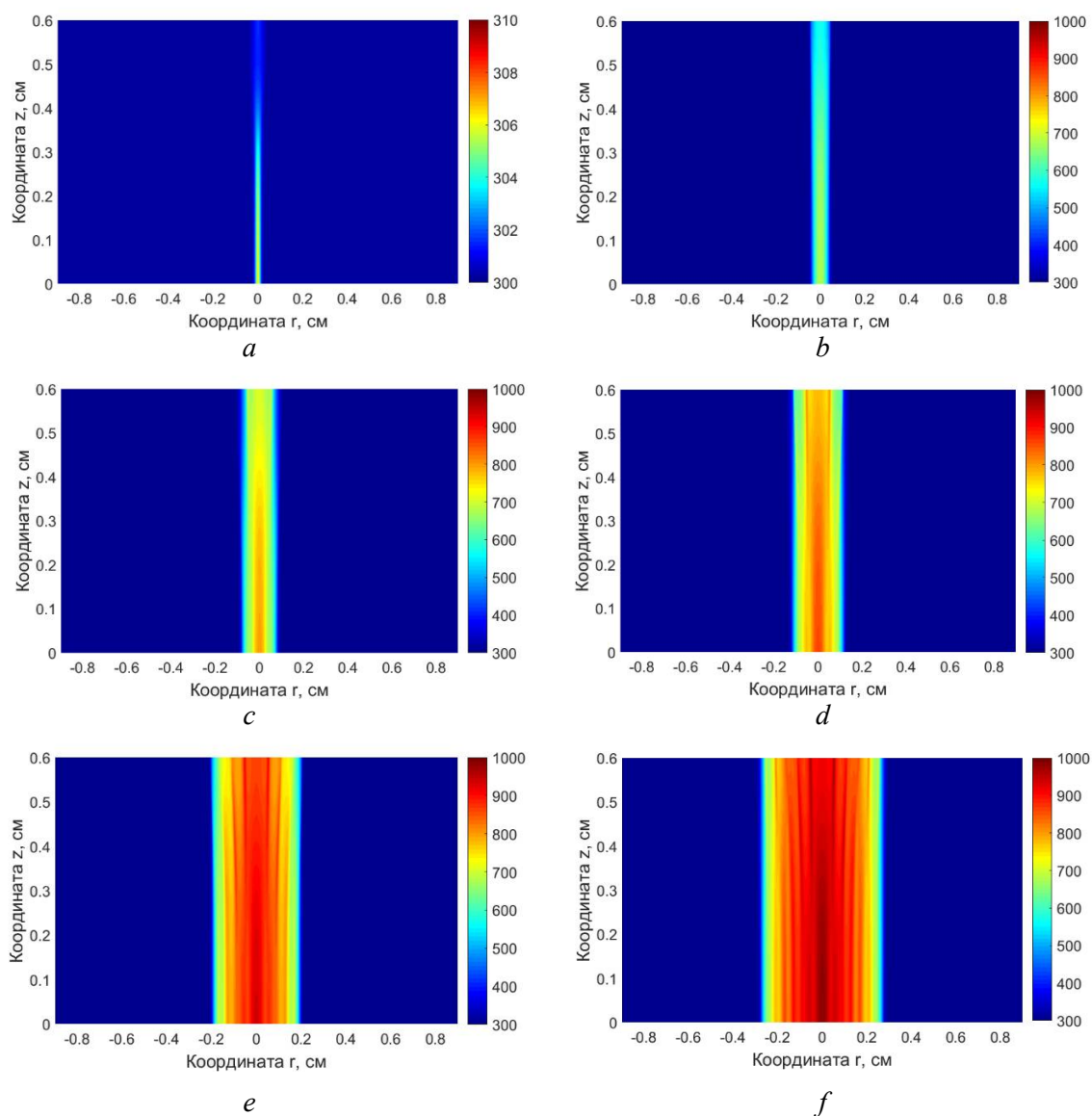


Рис. 4. Распределение температуры нейтрального газа T (К) в моменты времени: *a*) $t = 25$ нс, *b*) $t = 50$ нс, *c*) $t = 75$ нс, *d*) $t = 100$ нс, *e*) $t = 150$ нс, *f*) $t = 200$ нс

По сравнению с предыдущим этапом расчета на втором этапе был изменен размер области в радиальном направлении (увеличен в 9 раз): новый размер равен $l_r = 0.9$ см (при том же значении $l_z = 0.6$ см). Сделано это из следующих соображений: так как при замыкании область, занятая разрядом, начинает расти в радиальном направлении за счет диффузии, то исходный размер расчетной области в поперечном направлении $l_r = 0.1$ см оказывается недостаточным для вычислений, поскольку электрическое поле теперь возмущает параметры на внешней границе, а это противоречит принятым прежде граничным условиям. Поэтому процедура расчета повторяется с самого начала, но уже с большей расчетной областью. Для сохранения разрешения численного алгоритма в радиальном направлении количество узлов увеличивается (со 101 до 301).

Результаты, полученные при энерговыкладе, показывают, что температура газа вблизи оси за первые 25 нс второго этапа увеличивается более, чем в 2 раза, достигая значения около 670 К. За оставшиеся 150 нс энерговыклада максимальная температура увеличивается еще на 300 К. При этом, начиная с момента времени 75 нс, становится заметно, что профиль температуры перестает быть монотонно убывающим в радиальном направлении, считая от оси. Около анода вдоль оси появляются дополнительные возмущения, которые являются следствием пульсационного режима нагрева нейтрального газа в плазменном канале. Их распространение приводит к тому, что в области горения появляются пульсации тока, которые приводят к дополнительному тепловыделению. Скачкообразный профиль температуры – следствие подобных возмущений. К моменту окончания энерговыклада ($t = 200$ нс) наблюдается несколько локальных экстремумов температуры в радиальном распределении.

Еще одной особенностью при горении «замкнутого» разряда является уменьшение интенсивности процесса ионизации в околоосевой области (максимум ионизации смещается от оси в сторону в радиальном направлении). Профиль давления схож с профилем температуры, поскольку плотность нейтрального газа слабо меняется за данные промежутки времени. Согласно формуле (18), вблизи оси ионизация становится существенно меньше, чем на боковой границе разряда. Следовательно, протекание тока происходит в основном на некотором расстоянии от оси симметрии, что подтверждается графиками на рис. 5 для начала и окончания основного процесса тепловыделения (в сравнении).

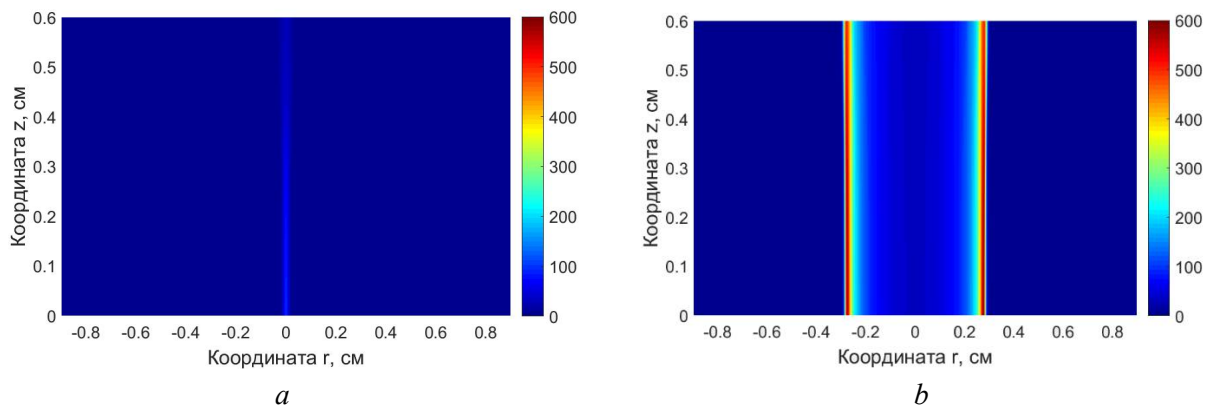


Рис. 5. Распределение осевой компоненты плотности тока $|j_z|$ (A/cm^2) в моменты времени: а) $t = 25$ нс, б) $t = 200$ нс

Такое перераспределение плотности тока меняет пространственное (по радиусу) распределение температуры и давления и тем самым влияет на последующие газодинамические процессы.

4.3. Третий этап: ударно-волновые процессы после энерговыклада

В момент времени $t = 200$ нс отключается внешнее электрическое поле (потенциалы электродов становятся нулевыми). Таким образом, в дальнейшем численно решается только

газодинамическая задача. На этом этапе рассматривается новая постановка задачи, в которой начальными условиями являются распределения газодинамических параметров, полученные на предыдущем этапе в момент отключения электрического поля.

На рис. 4, *f* заметно, что пространственное распределение параметров становится практически одномерным, то есть параметры значительно меняются только в радиальном направлении. Исходя из этого на рис. 6 приводятся распределения параметров (давление p и температура T) в радиальном направлении в середине разрядного промежутка в сечении (при $z = 0.3$ см).

При решении системы уравнений Эйлера (9)–(17) шаг по времени выбирается существенно большим, чем на втором расчетном этапе ($\tau = 10^{-8}$ с вместо $\tau = 10^{-14}$ с), что позволяет значительно ускорить расчеты. Как и в начале второго этапа, расчетная область и расчетная сетка увеличиваются в радиальном направлении в 2 раза. В новом расчете исходная область дополняется областью таких же размеров и такой же расчетной сеткой, в узлах которой задаются газодинамические параметры с правой границы расчетной области предыдущего этапа («невозмущенные» значения газа). Размер расчетной области в радиальном направлении на третьем этапе равняется $l_r = 1.8$ см.

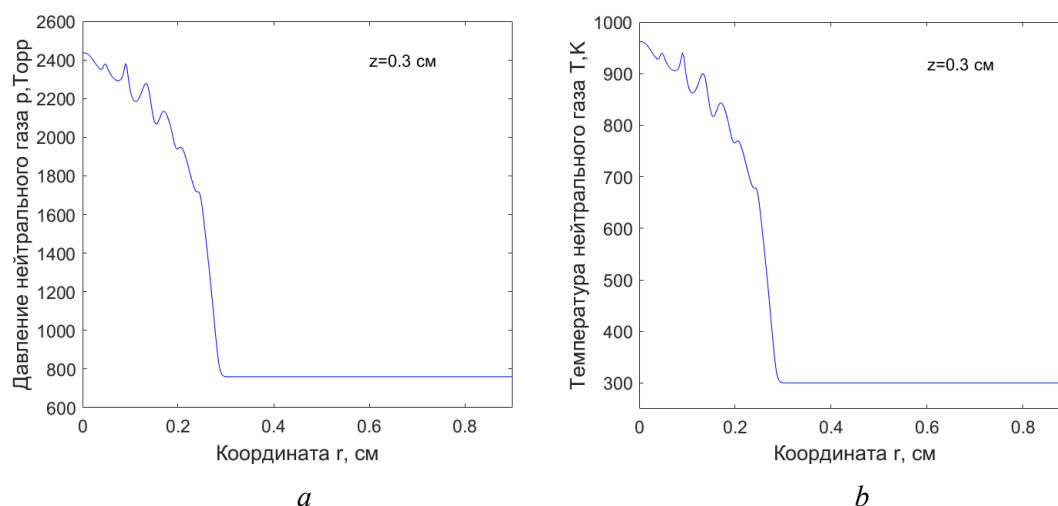


Рис. 6. Распределение давления p (Торр) (*a*) и температуры T (К) (*b*) при $z = 0.3$ см нейтрального газа в момент времени $t = 200$ нс

Решение газодинамической задачи с данными начальными условиями аналогично решению задачи о цилиндрическом взрыве. Как результат, были получены распределения давления p , температуры T и радиальной компоненты скорости v_r для моментов времени 5, 10, 20, 30 мкс, которые приведены на рис. 7 и 8.

Как следует из рис. 7 и 8, в результате процессов, связанных с распадом разрыва между зоной повышенного и «фонового» давления (рис. 6, *a*), а также отражением волн от оси симметрии, формируется взрывная ударная волна, распространяющаяся в радиальном направлении от оси симметрии к внешней границе. Первая ударная волна, имеющая характерный профиль взрывной волны, распространяется по невозмущенному газу, теряя свою интенсивность, в то время как между осью симметрии задачи и фронтом этой ударной волны можно наблюдать несколько более слабых вторичных ударных волн и волн разрежения, которые движутся в разных направлениях, отражаясь от оси симметрии и взаимодействуя между собой (рис. 7, *a*).

Аналогично, динамику этого процесса можно наблюдать на профилях температуры (рис. 7, *b*) и радиальной скорости (рис. 8). На графике температуры (рис. 7, *b*) заметно формирование контактной поверхности, разделяющей область первоначально нагретого от энерговклада газа и первоначально холодного «невозмущенного» газа. Положение контактной поверхности устанавливается приблизительно в районе координаты $r = 0.4$ см.

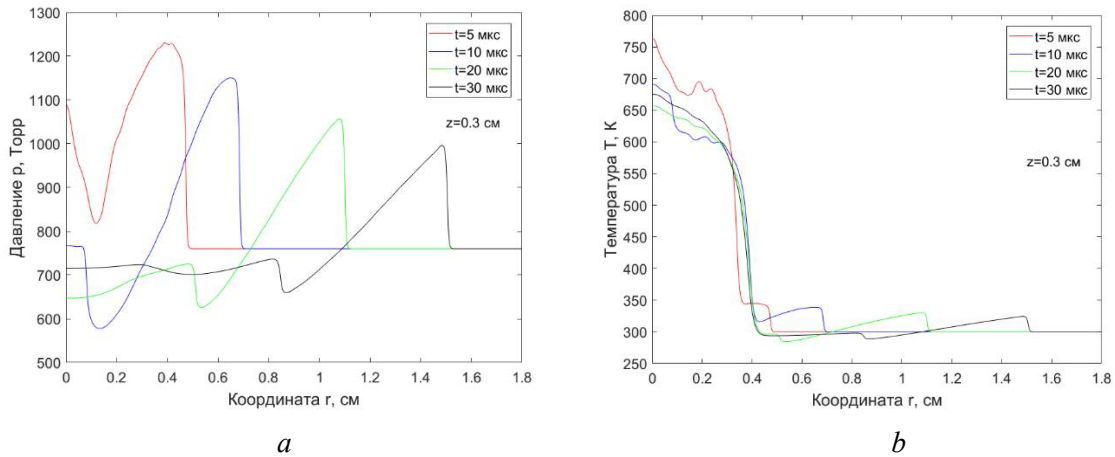


Рис. 7. Распределения давления p (Торр) (а) и температуры T (К) (б) при $z=0.3$ см в моменты времени $t=5$ мкс, $t=10$ мкс, $t=20$ мкс, $t=30$ мкс

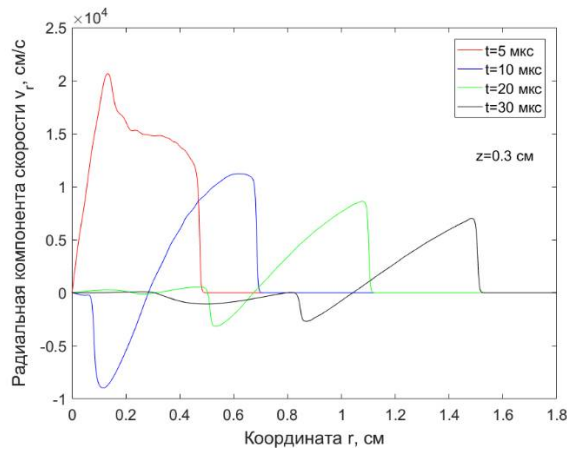


Рис. 8. Распределения радиальной компоненты скорости v_r (см/с) при $z=0.3$ см в моменты времени $t=5$ мкс, $t=10$ мкс, $t=20$ мкс, $t=30$ мкс

В дальнейшем, когда все ударно-волновые структуры покинут расчетную область, вблизи оси симметрии сформируется область сильно нагретого газа и область с фоновым значением температуры. На больших временных промежутках будут происходить процессы, обусловленные теплопроводностью, за счет которых энергия, запасенная вблизи оси распределится по всей области.

На рис. 9 приводятся в разные моменты времени пространственные (двухмерные) распределения температуры, также демонстрирующие распространение ударно-волновых структур.

5. Заключение

В ходе проведенного исследования были изучены:

- 1) особенности прорастания отрицательного стримера в азоте;
- 2) процесс энерговыделения в околоосевой области за счет выделения джоулева тепла;
- 3) ударно-волновые и тепловые процессы после отключения внешнего электрического поля.

Обнаружено, что прорастание стримера происходит преимущественно на оси с незначительным уширением головки за счет диффузии. Его скорость не постоянна – наблюдается ускоренное движение.

После замыкания стримерного разряда на электродах наблюдается процесс нарастания тока в плазменном канале и выделение тепловой энергии (энерговыделения), в результате кото-

рого, в первую очередь, увеличиваются температура и давление. Их профили не являются монотонно убывающими в радиальном направлении от оси, а имеют возмущения. Данные возмущения являются следствием пульсационного режима нагрева газа. Определено, что ток изначально протекает вблизи оси, однако, по мере расширения плазменного канала и увеличения области энерговыклада, максимум плотности тока реализуется на краю данной области.

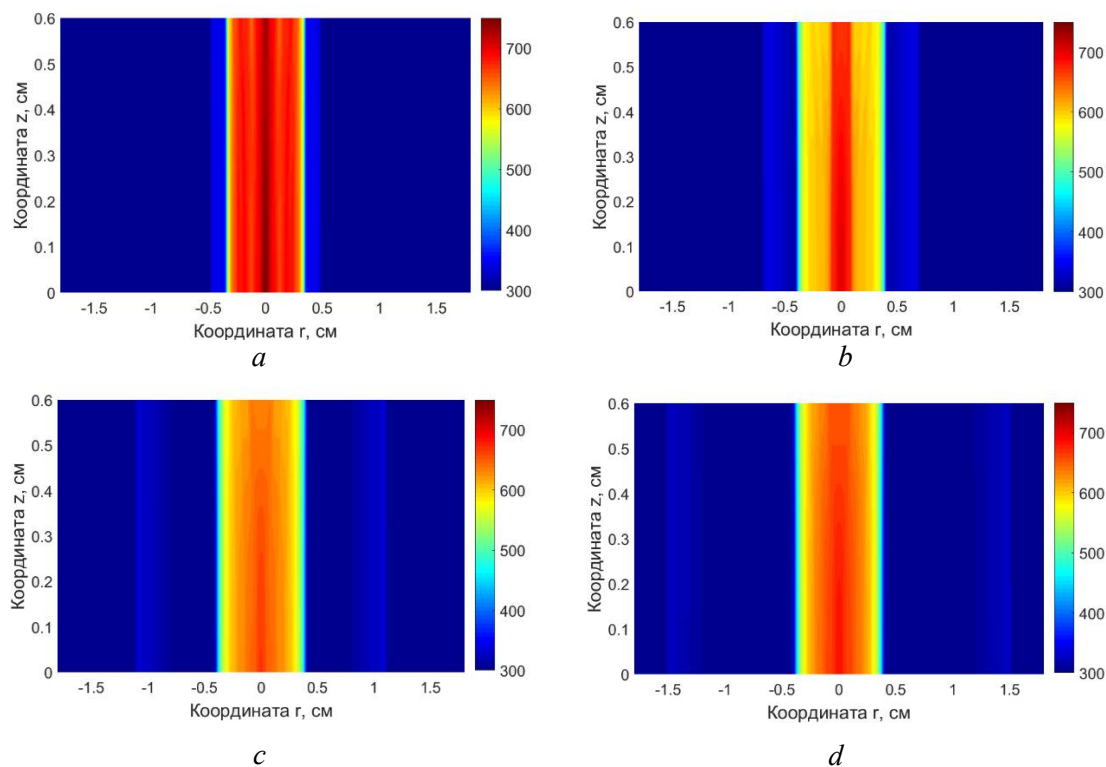


Рис. 9. Распределения температуры T (К) в моменты времени (a) $t = 5$ мкс, (b) $t = 10$ мкс, (c) $t = 20$ мкс, (d) $t = 30$ мкс

После отключения электрического поля численно решалась газодинамическая задача о распространении ударно-волновых структур от области энерговыклада. Обнаружено распространение головной и отраженной ударных волн в радиальном направлении от оси к внешней границе. Отмечается ослабление фронта ударной волны при ее распространении. Определено положение контактной поверхности, разделяющей область нагретого и ненагретого газа.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект 18-19-00672).

Литература

1. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987, 592 с.
2. Суржиков С.Т. Физическая механика газовых разрядов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 640 с.
3. Базелян А.Е., Базелян Е.М. Катодонаправленный стример в воздухе при импульсных напряжениях с наносекундным временем нарастания. ТВТ, 31(6), 1993, с. 867–874.
4. Georghiou, G. E., Papadakis, A. P., Morrow, A., Metaxas, A. C., “Numerical modeling of atmospheric pressure gas discharges leading to plasma production,” *J. Phys. D. Appl. Phys.*, Vol. 38, 2005, pp. R303–R328.

5. Голота В.И., Доценко Ю.В., Карась В.И., Мануйленко О.В., Письменецкий А.С., “Численное моделирование отрицательного стримера в азоте,” *ВАНТ серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения*, Т. 7, № 4, 2010, с. 176–180.
6. Tholin, F., Bourdon, A., “Simulation of the hydrodynamic expansion following a nanosecond pulsed spark discharge in air at atmospheric pressure,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 46, 365205, 2013.
7. Kulikovskiy, A. A., “The structure of streamers in N₂. I: fast method of space-charge dominated plasma simulation,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 27, 2556–63, 1994.
8. Qin, J., Pasko, V., “On the propagation of streamers in electrical discharges,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 47, 435202, 2014.
9. Kim, H. C., Iza, F., Yang, S. S., et al., “Particle and fluid simulations of low-temperature plasma discharges: benchmarks and kinetic effects,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 38, 2005, pp. R283–301.
10. Li, C., Ebert, U., Brok, W. J. M., “Avalanche-to-Streamer Transition in Plasma Simulations,” *IEEE Trans. Plasma Sci.*, Vol. 36, 2008, pp. 910–911.
11. Базелян Е.М., Райзер Ю.П. Рост канала стримера: поле и плотность плазмы за волной ионизации, затравочные электроны перед ней. *ТВТ*, 35(2): с. 181–186, 1997.
12. Xu, D. A., Shneider, M. N., Lacoste, D. A., Laux, C. O., “Thermal and hydrodynamic effect of nanosecond discharges in atmospheric pressure air,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 47, 235202, 2014, 13 p.
13. Agnihotri, A., Hundsdorfer, W., Ebert, U., “Coupling discharge and gas dynamics in stream-less spark formation in supercritical N₂,” *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 55, 07LD06, 2016, pp. 1–4.
14. Райзер Ю.П., Суржиков С.Т., “Расчетная модель тепловых и электроразрядных процессов в камерах технологических лазеров,” *Математическое моделирование*, Т. 5, № 3, 1993, с. 32–58.
15. Ermakov, E. A., Ivanov, I. E., Kryukov, I. A., Mursenkova, I. V., and Znamenskaya, I. A., “Numerical simulation of nanosecond discharge in gas-dynamic flows,” *J. Phys.: Conf. Ser.* 1647 012015 (6 pp.).
16. Korytchenko, K. V., Essmann, S., Markus D., Maas, U., and Poklonskii, E. V., “Numerical and experimental investigation of the channel expansion of a low-energy spark in the air,” *Combustion science and technology*, Vol. 191, No. 12, 2019, pp. 2136–2161.
17. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
18. Иванов, И. Э., Крюков, И. А., “Квазимонотонный метод повышенного порядка точности для расчета внутренних и струйных течений невязкого газа,” *Матем. моделирование*, 8:6 (1996), 47–55.
19. Kulikovskiy, A. A., “The structure of streamers in N₂. II: two-dimensional simulation,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 27, 1994, pp. 2564–2569.
20. Знаменская И.А., Мурсенкова И.В., Наумов Д.С., Сысоев Н.Н., “Локализация импульсного объемного разряда в вихревую зону за клином, обтекаемым сверхзвуковым потоком,” *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия*, № 5, 2019.
21. Mursenkova, I. V., Liao, Y., Ivanov, I. E., Sysoev, N. N., “The characteristics of a nanosecond surface sliding discharge in a supersonic airflow flowing around a thin wedge,” *Moscow University Physics Bulletin*, Vol. 74, No. 3, 2019, pp. 269–276.
22. Суржиков С. Т., “Численный анализ структуры двух типов тлеющих разрядов,” *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*, 2008. Т. 7. <http://chemphys.edu.ru/issues/2008-7/articles/464/>
23. Сторожев Д. А., Куратов С. Е., Суржиков С. Т., “Численное моделирование 2D структуры тлеющего разряда в молекулярном водороде с учетом кинетики ионизации и диссоциации,” *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*, 2015. Т.16, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-4/articles/566/>
24. Суржиков С. Т., Куратов С. Е., “Диффузионно-дрейфовая модель Пеннинговского разряда при давлениях порядка 1 Торр,” *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*, 2014. Т.15, вып. 5. <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-5/articles/252/>

25. Знаменская И. А., Иванов И. Э., Крюков И. А., Мурсенкова И. В., Тимохин М. Ю., “Численное и экспериментальное исследование ударно-волновых структур от наносекундного разряда в гелии,” *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*, 2014. Т. 15, вып. 3.
<http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-3/articles/222/>

References

1. Rajzer, Ju. P., *Fizika gazovogo razrjada* (Gas discharge physics), М.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1987, 592 p.
2. Surzhikov, S. T., *Fizicheskaja mehanika gazovyh razrjadov* (Physical mechanics of gas discharges), М.: Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, 2006, 640 p.
3. Bazeljan, A. E., Bazeljan, E. M., “Katodonapravlennyj strimer v vozduhe pri impul'snyh naprjazhenijah s nanosekundnym vremenem narastanija,” *TVT*, Vol. 31, No. 6, 1993, pp. 867–874.
4. Georghiou, G. E., Papadakis, A. P., Morrow, A., Metaxas, A. C., “Numerical modeling of atmospheric pressure gas discharges leading to plasma production,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 38, 2005, pp. R303–R328.
5. Golota, V. I., Docenko, Ju. V., Karas', V. I., Manujlenko, O. V., Pis'meneckij, A. S., “Chislennoe modelirovanie otricatel'nogo strimera v azote,” *VANT serija: Plazmennaja jelektronika i novye metody uskorenija*, Vol. 7, No. 4, 2010, pp. 176–180.
6. Tholin, F., Bourdon, A., “Simulation of the hydrodynamic expansion following a nanosecond pulsed spark discharge in air at atmospheric pressure,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 46, 365205, 2013.
7. Kulikovskiy, A. A., “The structure of streamers in N₂. I: fast method of space-charge dominated plasma simulation,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 27, 2556–63, 1994.
8. Qin, J., Pasko, V., “On the propagation of streamers in electrical discharges,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 47, 435202, 2014.
9. Kim, H. C., Iza, F., Yang, S. S., et al., “Particle and fluid simulations of low-temperature plasma discharges: benchmarks and kinetic effects,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 38, 2005, pp. R283–301.
10. Li, C., Ebert, U., Brok, W. J. M., “Avalanche-to-Streamer Transition in Plasma Simulations,” *IEEE Trans. Plasma Sci.*, Vol. 36, 2008, pp. 910–911.
11. Bazeljan, E. M., Rajzer, Ju. P., “Rost kanala strimera: pole i plotnost' plazmy za volnoj ionizacii, zatravochnye jelektrony pered nej,” *TVT*, Vol. 35, No. 2, 1997, pp. 181–186.
12. Xu, D. A., Shneider, M. N., Lacoste, D. A., Laux, C. O., “Thermal and hydrodynamic effect of nanosecond discharges in atmospheric pressure air,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 47, 235202, 2014, 13 p.
13. Agnihotri, A., Hundsdorfer, W., Ebert, U., “Coupling discharge and gas dynamics in stream-less spark formation in supercritical N₂,” *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 55, 07LD06, 2016, pp. 1–4.
14. Rajzer, Ju. P., Surzhikov, S. T., “Raschetnaja model' teplovyh i jelektrozrazjadnyh processov v kamerah tehnologicheskikh lazerov,” *Matematicheskoe modelirovanie*, Vol. 5, No. 3, 1993, pp. 32–58.
15. Ermakov, E. A., Ivanov, I. E., Kryukov, I. A., Mursenkova, I. V., and Znamenskaya, I. A., “Numerical simulation of nanosecond discharge in gas-dynamic flows,” *J. Phys.: Conf. Ser.* 1647 012015 (6 pp.).
16. Korytchenko, K. V., Essmann, S., Markus D., Maas, U., and Poklonskii, E. V., “Numerical and experimental investigation of the channel expansion of a low-energy spark in the air,” *Combustion science and technology*, Vol. 191, No. 12, 2019, pp. 2136–2161.
17. Godunov, S. K., Zabrodin, A. V., Ivanov, M. Ja., Krajkov, A. N., Prokopov, G. P., *Chislennoe reshenie mnogomernyh zadach gazovoj dinamiki* (Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics), М.: Nauka, 1976.
18. Ivanov, I. Je., Krjukov, I. A., “Kvazimonotonnyj metod povyshennogo porjadka tochnosti dlja rascheta vnutrennih i strujnyh techenij nevjazkogo gaza,” *Matem. modelirovanie*, Vol. 8, No. 6, 1996, pp. 47–55.
19. Kulikovskiy, A. A., “The structure of streamers in N₂. II: two-dimensional simulation,” *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 27, 1994, pp. 2564–2569.

20. Znamenskaja, I. A., Mursenkova, I. V., Naumov, D. S., Sysoev, N. N., “Lokalizacija impul'snogo ob#emnogo razrjada v vihrevuju zonu za klinom, obtekaemym sverhzvukovym potokom,” *Vestnik Moskovskogo universiteta. Serija 3: Fizika, astronomija*, No. 5, 2019.
21. Mursenkova, I. V., Liao, Y., Ivanov, I. E., Sysoev, N. N., “The characteristics of a nanosecond surface sliding discharge in a supersonic airflow flowing around a thin wedge,” *Moscow University Physics Bulletin*, Vol. 74, No. 3, 2019, pp. 269–276.
22. Surzhikov, S. T., “Numerical simulation of electrodynamic structure of two kinds of glow discharge,” *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, Vol. 7, 2008. <http://chemphys.edu.ru/issues/2008-7/articles/464/>
23. Storozhev, D. A., Kuratov, S. E., Surzhikov, S. T., “Numerical simulation of 2D structure of the glow discharge in molecular hydrogen in view of ionization and dissociation kinetics,” *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, Vol. 16, No. 4, 2015. <http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-4/articles/566/>
24. Surzhikov, S. T., Kuratov, S. E., “Drift-diffusion model of the Penning discharge at pressures about 1 Torr,” *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, Vol. 15, No. 5, 2014. <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-5/articles/252/>
25. Znamenskaya, I. A., Ivanov, I. E., Kryukov, I. A., Mursenkova, I. V., Timokhin, M. Yu., “Numerical and experimental investigation of the shock-wave structure formed by nanosecond helium discharge,” *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, Vol. 15, No. 3, 2014. <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-3/articles/222/>

Статья поступила в редакцию 30 декабря 2020 г.