

Dynamically Reconfigurable Meshes with Local Adaptation for Gas Dynamic Problems

Kirill Merkulov¹, Igor Menshov²

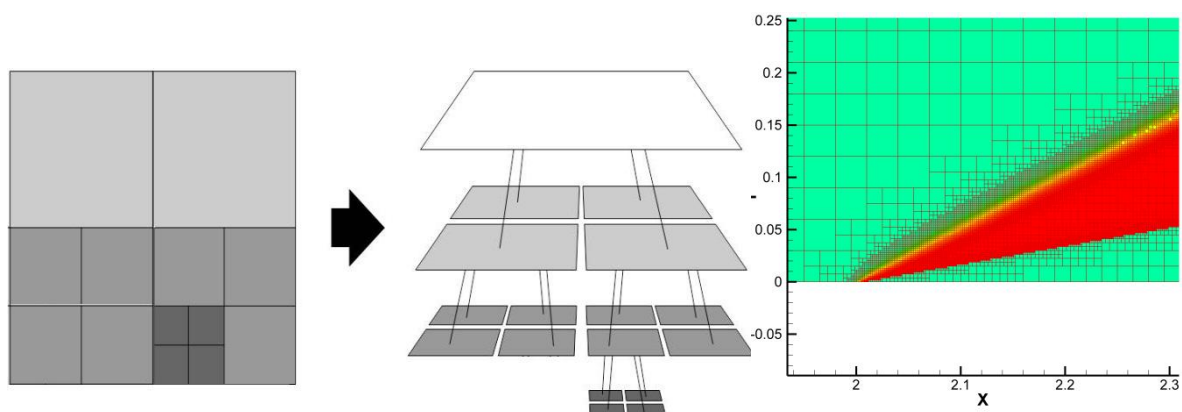
¹ *Dukhov All-Russia Research Institute of Automatics, Moscow, 127473, Russia*

² *Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, 125047, Russia*
parovoz1991@yandex.ru

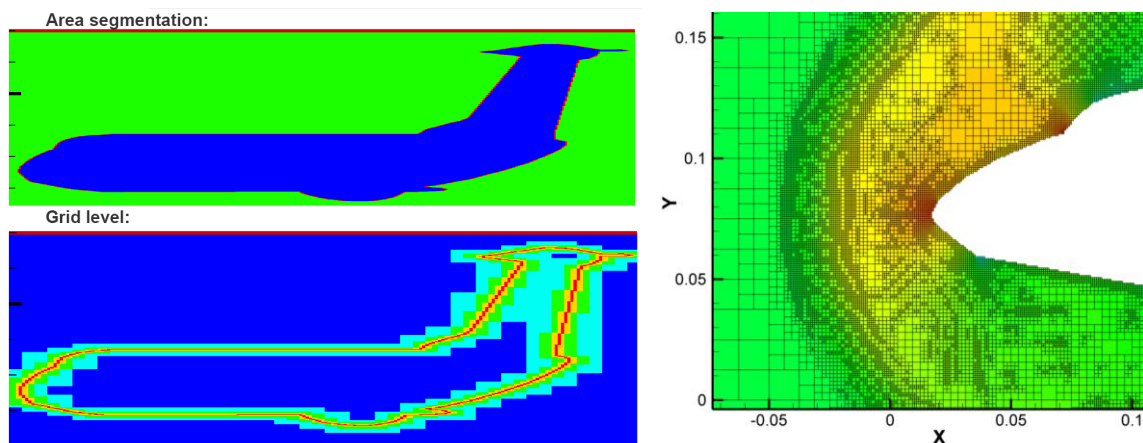
Abstract

The report focuses on algorithms for constructing and modifying Cartesian grids with dynamic local adaptation, as well as methods for the numerical calculation of physical problems using meshes of this type. An algorithm for multilevel grid adaptation by arbitrary criteria is described. Unique method of subgrid WENO-reconstruction for interlevel data transfer is proposed. We have adapted the Free Boundary Method [1] for flow around body calculations on adaptive Cartesian meshes. The advantages and features of described algorithm, indicators for mesh refinement and coarsening are presented and analyzed for various problems of gas dynamics.

Keywords: adaptive meshes, gas dynamics, finite volume methods, free boundary method.



Data representation format (left figure) and example of flow around cline (right figure) calculated using 5-level Cartesian mesh with dynamic adaptation: density field and mesh configuration



Mesh segmentation and gridding (left figure) and flow calculation for aircraft model

УДК 519.6

Динамически перестраиваемые декартовы сетки с локальным измельчением для расчета задач газовой динамики

К.Д. Меркулов¹, И.С. Меньшов²

¹ ВНИИА имени Н.Л. Духова, Россия, Москва, 127473, Сущевская улица, д. 22

² ИПМ имени М.В. Келдыша РАН, Россия, Москва, 125047, Миусская площадь, д. 4
parovoz1991@yandex.ru

Аннотация

Данная работа посвящена алгоритмам построения и модификации декартовых сеток с динамической локальной адаптацией, а также методам численного счета физических задач на данном классе сеток. Описывается алгоритм многоуровневой адаптации сетки по произвольному критерию. Для переноса данных между сетками различных уровней измельчения предлагается метод функциональной реконструкции на основе WENO-подхода. Для расчета задач обтекания тела на сетках с локальным уточнением приспособлен метод свободной границы [1]. Преимущества и особенности представленных алгоритмов, индикаторы для измельчения и огрубления ячеек проанализированы на различных задачах газовой динамики.

Ключевые слова: адаптивные сетки, газовая динамика, методы конечного объема, метод свободной границы

1. Введение

Настоящая работа посвящена динамически перестраиваемым декартовым сеткам. Мы предлагаем уникальный глобальный метод анализа сеточных решения на основе вейвлет-разложения и новую методику консервативной подсеточной реконструкции решения. Описывается алгоритм многоуровневой адаптации сетки по произвольному критерию. Для расчета задач обтекания тела на сетках с локальным уточнением приспособлен метод свободной границы. Преимущества и особенности представленных алгоритмов, индикаторы для измельчения и огрубления ячеек проанализированы на различных задачах газовой динамики.

2. Двумерные сетки с локальной адаптацией

Одна из наиболее трудоемких и сложных задач при использовании сеток с локальной адаптацией – это поиск наиболее оптимального и удобного формата представления данных. Для адаптации изначально структурированных декартовых сеток, где разбиение подразумевается по какому-либо заранее выбранному закону, удобно использовать различные древовидные структуры. Кроме того, для них хорошо известны быстрые рекурсивные алгоритмы обхода и перестроения [2].

Для описания двумерной сетки с возможностью локальной адаптации предлагается следующий формат. Ячейка может разбиваться только на четыре равных, делением пополам по каждому из направлений. В этом случае удобно говорить о наличии четырех *потомков* данной ячейки. Берется первоначальная прямоугольная сетка (допустима и неравномерная) размера $M \times N$ с ячейками, которым приписан нулевой уровень.

Каждая ячейка адаптивной сетки описывается своим уровнем lvl (т.е. сколько разбиений начиная с нулевого уровня было проведено для ее получения) и виртуальным положением на этом уровне – парой индексов (i, j) , таких, какими они были бы в случае полного заполнения данного уровня. Каждый узел дерева хранит флаг наличия подразделения. Если он равен единице, ячейка обязательно имеет 4 потомка и хранит указатели на них, для листовых ячеек дерева эти указатели нулевые, но устанавливаются ненулевые указатели на координаты и вектор физических параметров.

Кроме того, с особенностями численных методов газовой динамики связано еще одно дополнительное ограничение на конфигурацию сетки: соседние ячейки могут отличаться не более, чем в 2 раза.

Такой тип данных позволяет описывать адаптивные сетки различных конфигураций без использования лишней памяти. Этот формат будем называть *четверичным деревом* по числу потомков родительской ячейки (рис. 1).

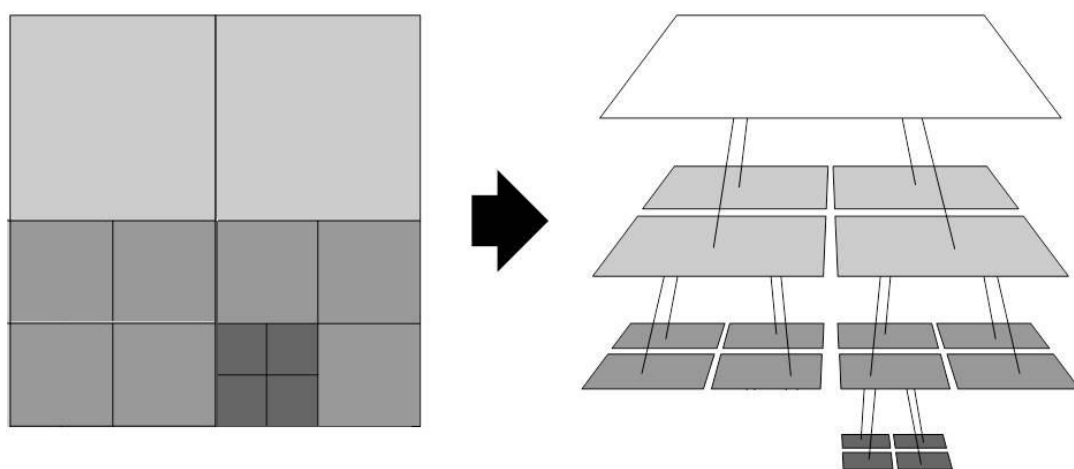


Рис. 1. Четверичное дерево как формат представления двумерной декартовой сетки с измельчением

Описанный выше формат характеризуется рядом особенностей, которые становятся очень полезными при разработке алгоритмов над описываемыми сетками:

- Ячейка 1-го уровня с индексами (i, j) обязательно имеет своим родителем ячейку с индексами $(\lfloor i/2 \rfloor, \lfloor j/2 \rfloor)$, где $\lfloor \cdot \rfloor$ – операция целочисленного деления, а нумерация обоих индексов начинается с нуля, $i=0, M-1$; $j=0, N-1$.
- Число соседей варьируется от 6 до 12, *прямых соседей* (вдоль осей) – от 4 до 8.
- Если записать виртуальные координаты ячейки (i, j) на ее уровне lvl в двоичной системе счисления так, чтобы число знаков в двоичной записи составляло lvl , можно заметить, что на k -й двоичной записи индекса $i(j)$ будет стоять 0, если при получении ячейки из родителя $lvl-1$ уровня рассматривался нижний (левый) потомок.

Последнее свойство иллюстрируется рис. 2: для ячейки с $lvl=2$ и $(i, j)=(1, 2)$, показанной оранжевым двоичная запись виртуальных индексов есть $(01_2, 10_2)$, 1-е цифры индексов – 0 и 1 – показывают, что сначала рассматривается нижний правый потомок базовой ячейки (бордовая стрелка), 2-е цифры – 1 и 0 – адресуют ячейку как верхнего левого подпотомка выбранной ячейки 1-го уровня (белая стрелка).

Таким образом, зная 3 адресных координаты ячейки, мы автоматически знаем путь к ней от корневой ячейки дерева.

Обход квадратного массива (матрицы) деревьев, описанных выше, осуществляется простой процедурой: в двойном цикле обходятся все элементы базовой сетки, в случае, если текущая ячейка является конечной (листовой), то применяем целевую функцию к ней, в противном случае вызываем процедуру для всех четырех потомков данной ячейки.

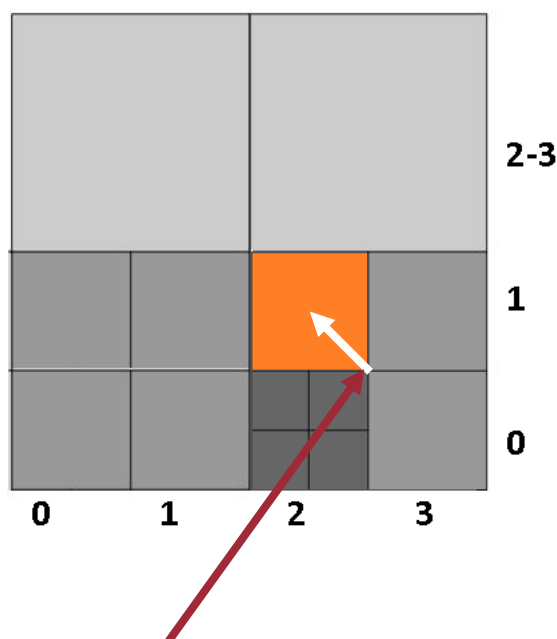


Рис. 2. Иллюстрация к определению адреса ячейки через двоичную запись ее виртуальных индексов на уровне адаптации

Для поиска соседей удобно пользоваться последним свойством используемого формата данных: будем подразумевать, что ячейка обладает соседями, равными себе по размеру во все стороны вдоль каждой из осей. Если ее координаты (lvl, i, j) , тогда, например, правый сосед – $(lvl, i, j+1)$. При поиске ячейки с такими координатами (прохождении по определяемому координатами пути) возможны 3 случая: мы нашли такую ячейку и она *физическая* (листовая), она подразбита, тогда правыми соседями исходной будут 2 левых потомка найденной. Если же мы не дошли до искомой ячейки и остановились на уровне $lvl-1$, то эта ячейка и будет правым соседом исходной, просто вчетверо большим.

3. Математическая модель

В настоящей работе предлагается вариант адаптации сеток для решения задачи о движении идеального газа, пригодный для массивного распараллеливания. Математическая постановка задачи сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{U}) = 0, \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) + \text{grad}(p) = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{U} H) = 0, \end{cases}$$

в области $V(\Gamma) \subset \mathbf{R}^2$, ограниченной некоторой заданной замкнутой кривой $\Gamma = \Gamma(x, y)$. Здесь введены стандартные обозначения: \mathbf{U} – вектор скорости; ρ – плотность; p – давление; $H = E + p/\rho$ – полная удельная энтальпия; $E = e + 0.5\mathbf{U}^2$ – полная удельная энергия; e – удельная внутренняя энергия.

Уравнения системы соответствуют законам сохранения массы, импульса и энергии. Для замыкания подобных систем служат уравнения состояния. Газ предполагается идеальным, т.е. $p = (\gamma - 1)\rho e$.

Для уравнений Эйлера ставится стандартная начально-краевая задача в области $V(\Gamma)$.

4. Численный метод

Запишем в векторном виде систему определяющих уравнений в консервативных переменных

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} \right] = 0,$$

где $\mathbf{Q} = (\rho, \rho U_x, \rho U_y, \rho E)^T$ – вектор консервативных переменных, а

$\mathbf{F}_k = (\rho U_k, \rho U_k U_x + p \delta_k, \rho U_k U_y + p \delta_k, \rho U_k H)^T$, $k = x, y$ – векторы потоков по направлениям.

Эта система численно решается на временном шаге Δt на неподвижной декартовой сетке. Для этого используется метод конечного объема с использованием приближенного решения задачи о распаде произвольного разрыва по Русанову [3] или Годунову [4].

Устойчивость численной схемы обеспечивается переменным шагом по времени, который вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta t = K_{safe} \cdot (\Delta t)_{CFL}, \quad 0 < K_{safe} < 1,$$

где K_{safe} – коэффициент запаса; $(\Delta t)_{CFL}$ – максимальный курантовский шаг. $(\Delta t)_{CFL}$ пересчитывается по формуле

$$(\Delta t)_{CFL} = \min_{\Omega} (\tau_x, \tau_y),$$

$$\tau_i = \min_{\Omega} \left(\frac{\Delta i}{c_0 + |U_i|} \right), \quad i = x, y,$$

где Δi – пространственный шаг по i -му направлению в конкретной ячейке; c_0 – скорость звука в ячейке, минимум берется по всей расчетной области.

Если расчетная стека состоит одновременно из ячеек разных уровней (например, нулевого и первого), она становится неконформной и насчитывать суммарные потоки через ячейку приходится по более сложной формуле

$$\mathbf{Q}_{lvl,i,j}^{n+1} = \mathbf{Q}_{lvl,i,j}^n - \frac{\Delta t}{V_{lvl,i,j}} \left[\sum_{\sigma_x} s_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} + \sum_{\sigma_y} s_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} \right],$$

где $\mathbf{Q}_{lvl,i,j}^n$ – значение вектора консервативных переменных в ячейке уровня lvl с виртуальными индексами (i, j) на этом уровне на временном шаге с номером n . Потоки по каждому из направлений суммируются вдоль всей границы ячейки, умноженные на соответствующие площади части границы.

5. Подсеточная реконструкция

При изменении конфигурации сетки необходимо как-либо заполнять обновленные ячейки данными. Объединение нескольких ячеек заведомо связано с потерей данных и потому консервативное осреднение выглядит наилучшим решением. Однако при измельчении сетки необходимо заполнить новые ячейки данными, зная только информацию о их родителе и, возможно, его соседях. Простой снос значений из родительских ячеек в дочерние порождает ступенчатость в распределениях физических величин, нарушает гладкость самого численного решения и не позволяет получить более подробное решение чем то, каковым оно было до измельчения.

Разумным выглядит применение некоторой гладкой интерполяции физических величин на основе некоторого окружения разбиваемой ячейки. Особенно актуальным гладкое восполнение новоявленных потомков становится при использовании численных методов 2-го и больших порядков.

Для подсеточной реконструкции численных решений зачастую применяются методы на основе WENO-подхода [5–7], не порождающие нефизических осцилляций газодинамических полей. С учетом физических особенностей решаемых задач, необходимо, чтобы реконструкция оставалась консервативной, то есть суммы интегралов всех параметров по подячейкам соответствовали интегралу старых значений этих же параметров по всей родительской ячейке.

Можно показать, что для удовлетворения требованию консервативности подходит только линейная реконструкция, при которой распределение величин внутри ячейки помимо значения в ее центре описывается еще величиной градиента.

Для вычисления суммарного градиента надо определить множество рассматриваемых соседей. С целью упрощения модели и сокращения числа рассматриваемых вариантов без сильного нарушения точности было решено рассмотреть следующую модель: будем считать, что все соседи данной ячейки вдвое меньше ее самой, пронумерованы числами от 1 до 8 по часовой стрелке образом, показанным на рис. 3.

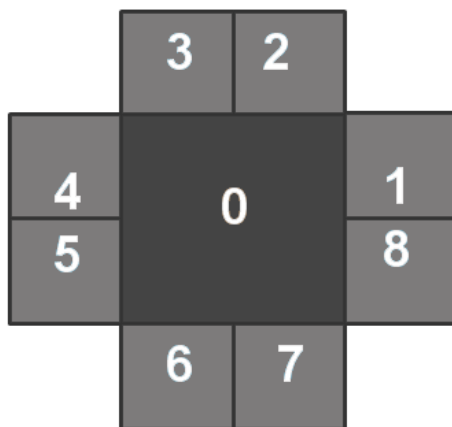


Рис. 3. Виртуальные соседи ячейки для WENO-реконструкции внутри нее

Согласно теории, представленной в работе [5], для составления реконструкционной формулы по ячейке и 8 ее соседям в двумерном случае необходимо выбрать 8 линейно независимых шаблонов. Нами были рассмотрены следующие: 4, которые будем условно называть квадратными: 2-0-4, 4-0-6, 6-0-8, 8-0-2 и еще 4 – треугольными: 1-0-2, 3-0-4, 5-0-6, 7-0-8. Если, например, рассматривать помимо треугольных еще и другие треугольные шаблоны: 2-0-3, 4-0-5 и т.д, то мы получим линейную зависимость с имеющимися двумя группами (например, шаблон 2-0-3 можно получить вычитанием 3-0-4 из 2-0-4), при этом применение шаблонов разных типов всегда рекомендуется в случае отсутствия других правил для выбора.

По любым трем узлам на плоскости, не лежащим на одной прямой можно составить единственный градиент. Например для шаблона 1-0-2 его можно вычислить следующим образом.

Пусть U -исследуемая консервативная величина, заданная сеточной функцией на некотором множестве узлов, U_0, U_1, U_2 – ее значения в узлах 1, 2 и 3 соответственно; Δx и Δy – линейные размеры ячейки с центром в узле 0, тогда можно составить следующую систему

линейных уравнений относительно градиента $\nabla U_{102} = \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{102}, \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{102} \right) = (U_{x,102}, U_{y,102})$:

$$\begin{cases} U_0 + \frac{3}{4}\Delta x U_{x,102} + \frac{1}{4}\Delta y U_{y,102} = U_1, \\ U_0 + \frac{1}{4}\Delta x U_{x,102} + \frac{3}{4}\Delta y U_{y,102} = U_2 \end{cases},$$

откуда можно получить следующее выражение градиента:

$$(U_{x,102}, U_{y,102}) = \left(\frac{U_1 - 3U_2 + 2U_0}{2\Delta x}, \frac{U_2 - 3U_1 + 2U_0}{2\Delta y} \right)$$

Аналогично вычисляются оставшиеся 7 градиентов.

Относительный вес шаблонов из каждой группы прямо пропорционален заметаемой шаблоном площади внутри рассматриваемой ячейки и обратно – расстоянию от центра привязки шаблона до центра ячейки.

Получим, что веса шаблонов равны соответственно: $w_{mp} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $w_{кв} = \frac{3}{4\sqrt{5}}$.

Далее по каждому шаблону вычисляем градиент, итоговый считаем как взвешенную сумму градиентов по шаблонам с весами $\frac{w_{mp(кв)}}{(\varepsilon + \beta)^2}$, где β – показатель гладкости (модуль градиента), ε – малое число, позволяющее избежать деления на ноль. В конце нормируем все веса так, чтобы их сумма равнялась единице. Итоговое выражение градиента есть сумма 8 градиентов по шаблонам соответствующими нормированными весами.

6. Алгоритм многоуровневой адаптации сетки

Рассмотрим теперь анализатор как черный ящик, выдающий 1, если ячейку надо измельчить и 0, если не нужно. Для всех ячеек черный ящик работает для некоторого локального окна (креста из 5 ячеек в центре с заданной и сторонами вдоль осей или квадрата со стороной 5 ячеек и центром в заданной). Все данные переда анализом сносим на текущий шаблон: если элемент шаблона является частью большой ячейки, сносим значение, если состоит из подячеек – осредняем. В данном случае применять консервативное осреднение и специфическую подсеточную реконструкцию нецелесообразно, так как для анализа решения высокая точность значений не нужна, а на результатах итогового расчета это проектирование не сказывается.

Как теперь построить алгоритм, формирующий конфигурацию сетки, адекватно соответствующую текущему сеточному полю некоторой физической величины?

Предлагается следующий порядок действий:

1. Сначала проводим процедуру огрубления сетки: те ячейки, которые можно сделать более крупными, согласно вейвлет-анализу объединяем в одну без нарушения имеющейся структуры дерева. В цикле на уровнях, начиная с предпоследнего до нулевого (базового) ищем виртуальные ячейки, которые могут быть огрублены (имеют четырех физических потомков) и удовлетворяют критерию огрубления (черный ящик для ячейки-родителя выдает ноль).

2. Следом осуществляем процедуру измельчения сетки. Проходим по уровням с нулевого до предпоследнего, ищем на них физические ячейки, для которых выполняется критерий измельчения (черный ящик выдает единицу) и делим ее на 4 части.

3. Проводим процедуру сглаживания сетки: удаляем все несоответствия ограничению, что соседние ячейки отличаются не более, чем вдвое. В цикле, на уровнях, начиная с последнего до второго, ищем ячейки, у которых соседи крупнее, более чем в 2 раза и мельчим их до нужной градации.

Результаты работы данного алгоритма представлены на расчете задачи Седова [3, 8] с 4-мя и 6-ю (рис. 4) уровнями адаптации в виде итогового поля плотности и конфигурации сетки, показанной величиной уровня и для геометрической адаптации сетки к двум многоугольникам и контуру осевого разреза авиалайнера Ту-134 (рис. 5). Под геометрической адаптацией понимаем адаптацию с анализатором, выдающим единицу для ячеек, имеющих ненулевое пересечение с внедренным в область геометрическим телом. Вычисления с 6-ю уровнями адаптации проводились на вычислительном кластере «ТИС-ЛАД 2D» Нижегородского Государственного Университета.

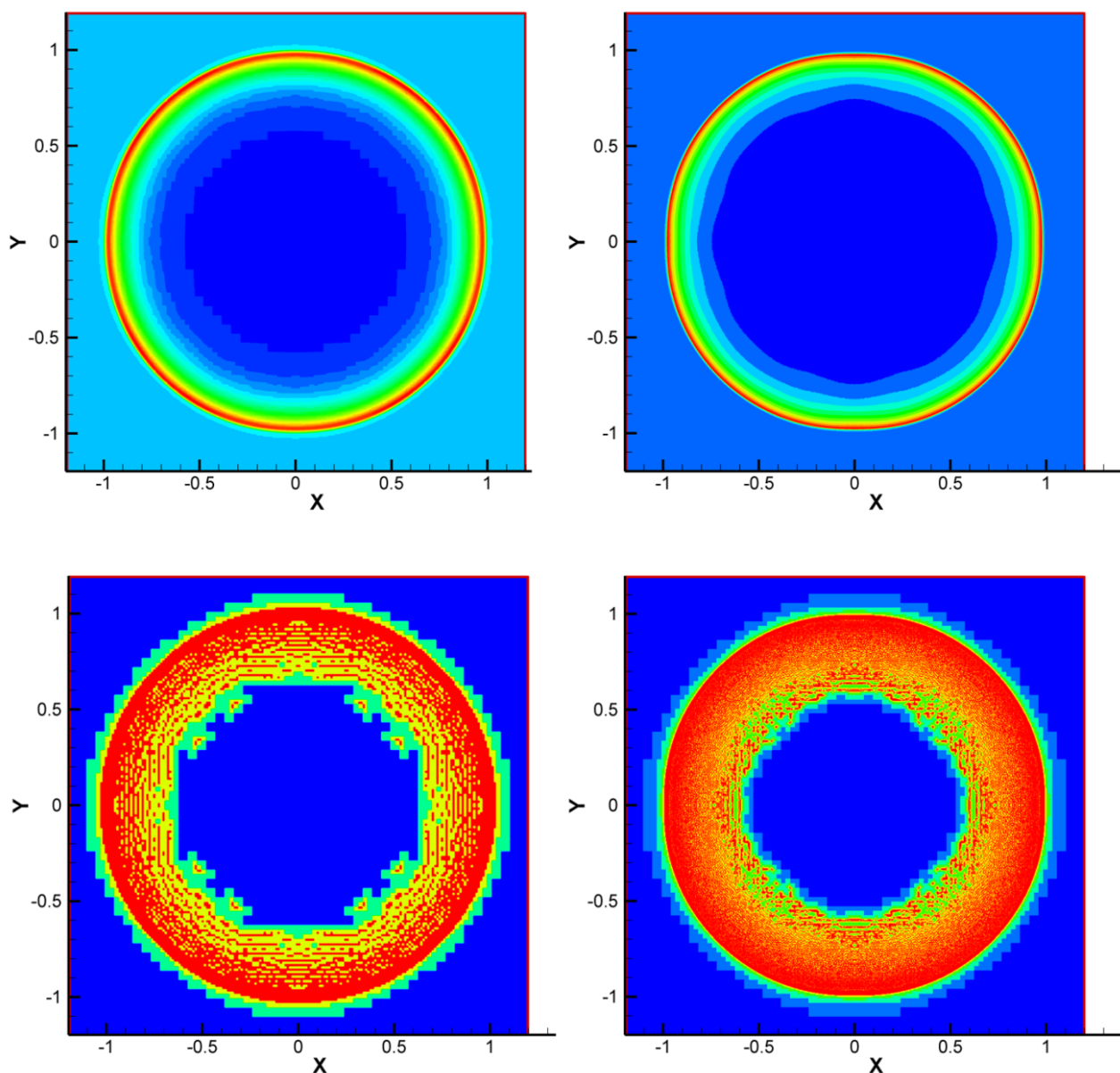


Рис. 4. Результаты расчетов задачи Седова (верхний ряд, поля плотности, плотность показана цветом от синего к красному) на многоуровневой адаптивной сетке и соответствующие им конфигурации расчетных сеток на конец расчета (от синего к красного показан уровень физической ячейки). Левый столбец – 4 уровня, правый 6 – уровнем, базовая сетка 50×50

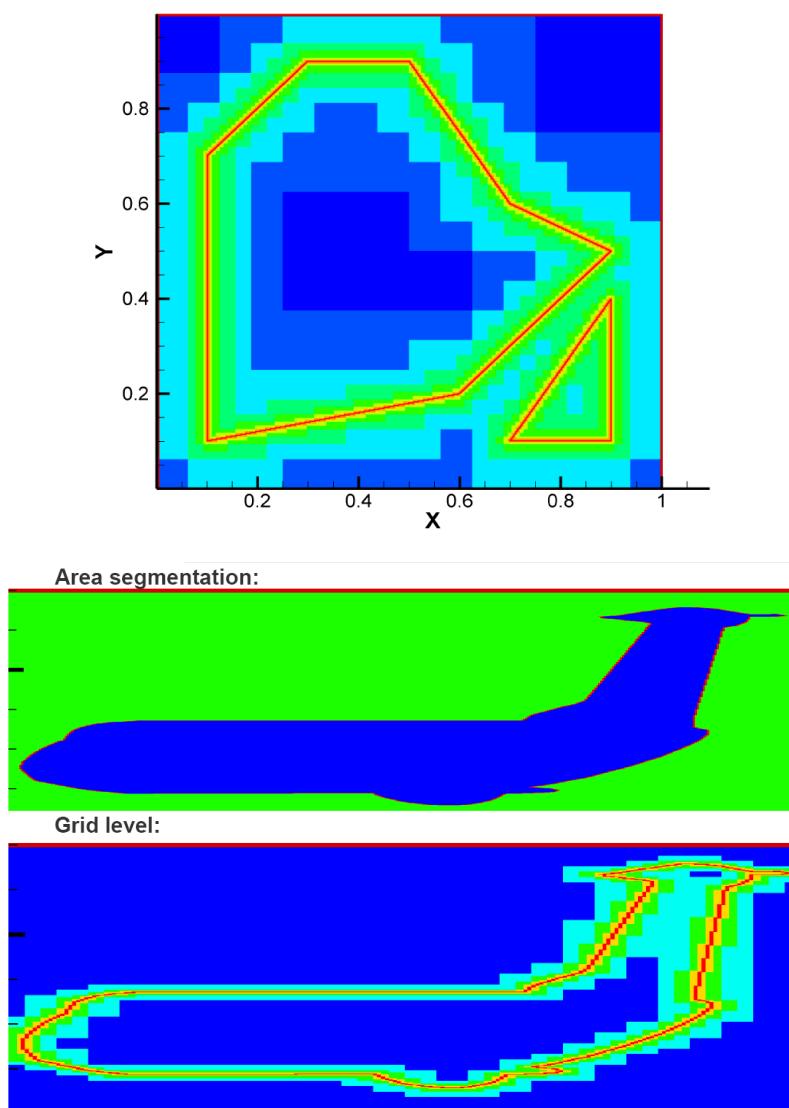


Рис. 5. Примеры работы алгоритма геометрической адаптации сетки. Сверху – расчетная сетка (цветом от синего к красного показан уровень физической ячейки) после геометрической адаптации к двум многоугольникам, внедренным в область. 8 уровней, базовая сетка 10×10 . Внизу – расчетная сетка (снизу, цветом от синего к красного показан уровень физической ячейки) и сегментация расчетной области (зеленый – внешние ячейки, синий – внутренние, красный – пересекаемые) после геометрической адаптации к контуру осевого разреза самолета Ту-134. 5 уровней, базовая сетка 70×70

7. Внедрение метода свободной границы

Был осуществлен перенос метода свободной границы на класс используемых сеток. Алгоритм расчета консервативных переменных на следующем временном слое разбился на 2 этапа: расчет газодинамических полей по потоковой схем так, как будто тело отсутствует, и введение поправки для пересекаемых ячеек на основе формульного выражения компенсационного потока. Второй шаг требует применения неявной численной схемы, в качестве которой использованы итерации Ньютона.

Для тестирования модуля обработки геометрии и представления его возможностей была проведена серия расчетов набегающей на клин волны (рис. 6) и обтекания носа осевого разреза авиалайнера (рис. 7). Угол, в котором образуются ударные волны для первой задачи стремится к аналитическому значению при увеличении числа используемых при счете уровней адаптации.

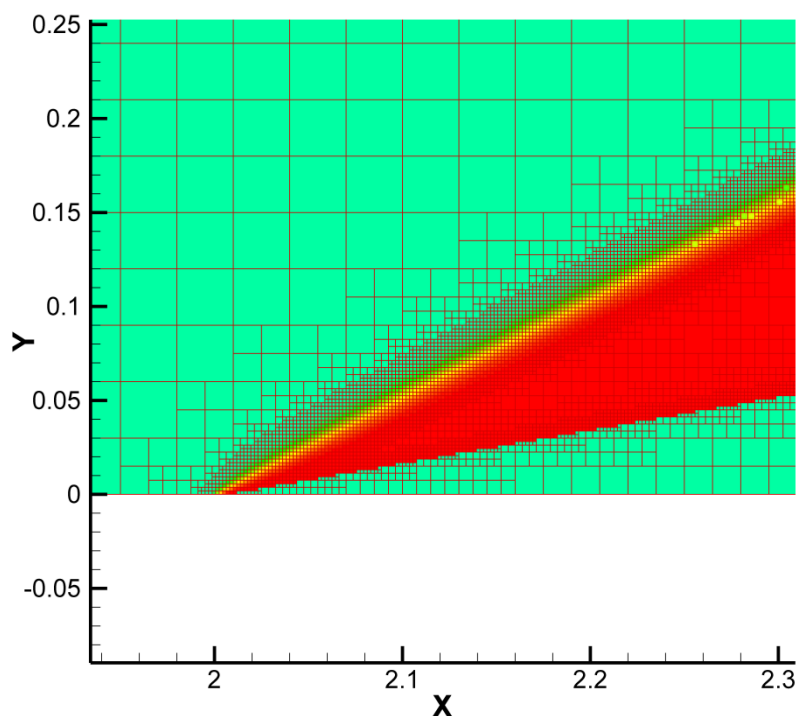


Рис. 6. Поле плотности и сетка для расчета задачи о набегающей на клин волне. Раствор клина 10° , набегающий поток с числом Маха $M = 3$

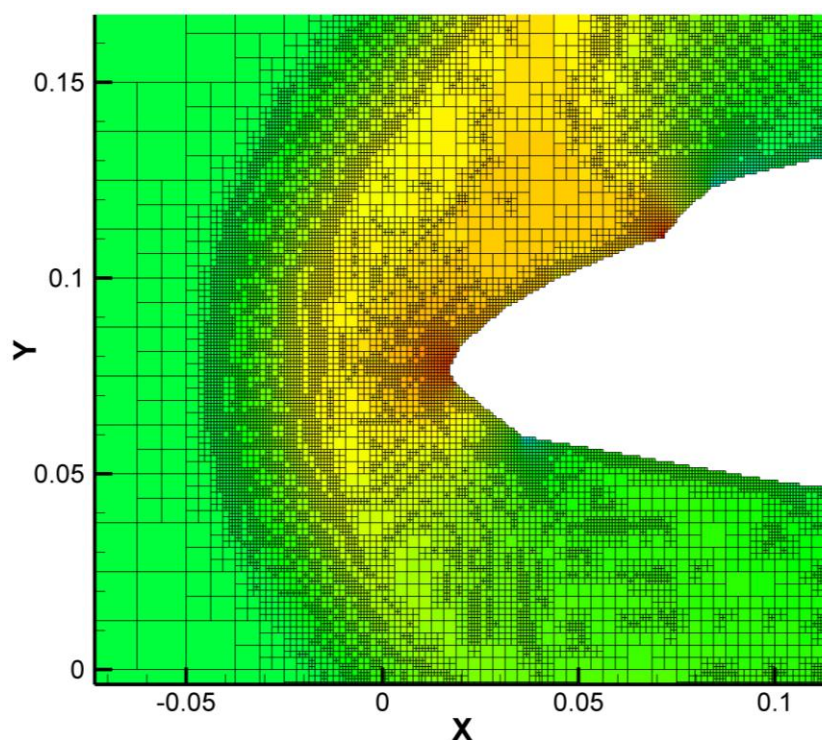


Рис. 7. Фрагмент сетки с полем давлений для расчета задачи обтекания осевого разреза авиалайнера Ту-134 с числом Маха $M = 0.75$ и углом атаки 1°

8. Заключение

В данной работе была представлена информация о программном комплексе «ТИСЛАД», моделирующем течение газа согласно системе уравнений Эйлера в областях с возможным вкраплением сложной геометрии на декартовых сетках с динамическим локальным уточнением. Описаны алгоритмы модификации сетки, многоуровневой адаптации,

подсеточной реконструкции, процесс внедрения геометрического тела в расчетную область. Представлены результаты счета разнообразных задач при разных параметрах настройки вычислительного комплекса, показана эффективность применения адаптивных сеток.

Благодарности и ссылки на гранты

Работа поддержана грантом Российского Научного Фонда № 14-11-00872.

Авторы благодарят администрацию суперкомпьютера «Лобачевский» за предоставление вычислительных мощностей в секторе с операционной системой Windows.

Литература

1. Меньшов И.С., Корнев М.А. Метод свободной границы для численного решения уравнений газовой динамики в областях с изменяющейся геометрией // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26. – №. 5. – С. 99–112.
2. Сушинов А.А. Построение декартовых сеток с динамической адаптацией к решению // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22. – №. 1. – С. 86–98.
3. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1961. – Т.1. – №. 2. – С. 267–279.
4. Годунов С.К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – 1976.
5. Chi-Wang Shu, High Order ENO and WENO Schemes for Computational Fluid Dynamics // High-order methods for computational physics, Springer, Heidelberg, 1999, pp. 438–480.
6. Тишкин В.Ф., Пескова Е.Е., Жалнин Р.В., Горюнов В.А., О построении WENO-схем для гиперболических систем уравнений на неструктурированных сетках // Известия высших учебных заведений. Приволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 1(29).
7. Semplice M., Coco A., Russo G. Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Systems based on Third-Order Compact WENO Reconstruction // arXiv preprint arXiv:1407.4296. – 2014.
8. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. Наука, М. - 1977. – С. 243–274.

Статья поступила в редакцию 20 ноября 2015 г.