

# SPH Modeling of Brittle Materials Failure

M.S. Egorova<sup>1</sup>, A.N. Parshikov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Dukhov Research Institute of Automatics (VNIIA), Moscow, 127055, Russia

<sup>2</sup>Joint Institute for High Temperature RAS, Moscow, 125412, Russia

egorova.maria.serg@gmail.com

## Abstract

Modeling of cylindrical soda-lime glass sample under shock loading is performed using SPH method with an interparticle contact algorithm guided by the Riemann solver. Problem is solved in axisymmetric formulation according to experimental geometry. Failure process of brittle material is described by Johnson – Holmquist model (JH-2), and shown on Fig. 1. Algorithm based on JH-2 model is provided. For verification of the developed algorithm the modeling results for shock loading of B<sub>4</sub>C (boron carbide) are compared with known experimental data

Keywords: SPH, brittle fracture, JH-2.

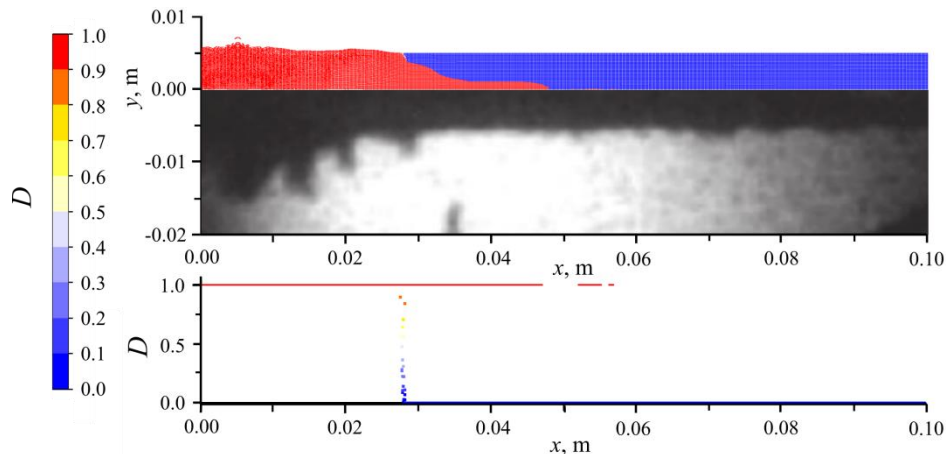
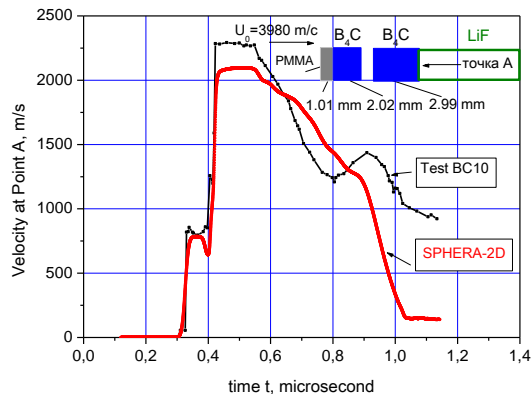


Fig. 1. Impact of soda-lime glass cylindrical rod of velocity 500 m/s with a rigid wall. Modeling results (red colored area) and experimental data (black contour around) are shown on the top. Lower part provides the spatial distribution of fracture parameter  $D$ . Material with  $D = 1$  is considered as failed

Figure 2 shows the velocity profile of rear surface of B<sub>4</sub>C sample after an impact with a plate. Relations used to calculate the plastic deformation speed and failure parameter  $D$  are given by:



$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{3G} \frac{d\sigma_e}{dt}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_p^f} \frac{d\varepsilon_p}{dt}$$

# Численное моделирование разрушения хрупких материалов методом SPH

М.С. Егорова<sup>1</sup>, А.Н. Паршиков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ФГУП ВНИИА им. Н.Л. Духова, Россия, Москва, 127055, Сущевская улица, дом 22

<sup>2</sup> ФГУП ОИВТ РАН, Россия, Москва, 125412, Ижорская улица, 13, строение 2  
egorova.maria.serg@gmail.com

## Аннотация

С помощью метода SPH, использующего соотношения распада произвольного разрыва, проведено численное моделирование ударного воздействия на цилиндрический образец из хрупкого материала (натриево-кальциево-силикатное стекло). Задача решалась в двумерной осесимметричной постановке, соответствующей эксперименту, изложенному в [1]. Процессы разрушения описывались с помощью модели Джонсона – Холмквиста (JH-2). Приводится алгоритм, построенный на основе уравнений JH-2. Тестирование разработанного алгоритма проводилось сопоставлением результатов расчетов по ударному нагружению керамики В<sub>4</sub>С с известными данными экспериментов [2].

Ключевые слова: SPH, хрупкое разрушение, JH-2.

## 1. Введение

Разрушение стеклянных стержней, индуцированное ударом, исследовалось и наблюдалось в ряде работ [1, 3, 4]. Интерес к данной проблеме объясняется тем, что из всего класса хрупких материалов только в стёклах наблюдается распространение волн разрушения [5]. При этом, в отличие от стеклянных пластин, в стержнях скорость волн разрушения достигает высоких значений, приближаясь к скорости упругих волн. Это связано с инициацией волн разрушения на боковых поверхностях непосредственно за фронтом головной ударной волны [6].

Математическое моделирование разрушения основано, как правило, на введении параметра разрушения  $D$  ( $0 < D < 1$ ), определяющего степень потери сплошности материала, и уравнений, описывающих его изменение в нагруженном материале. Для разрушающегося материала строятся реологические соотношения, функционально зависящие от параметра разрушения. Существует ряд подходов к построению уравнений, описывающих эволюцию параметра разрушения в ударно-сжатом материале. В зависимости от целей исследования, эволюция параметра разрушения  $D$  может описываться кинетическим уравнением [7], диффузионным уравнением [8], волновым уравнением [9, 6].

В настоящей работе для описания разрушения хрупких материалов используется феноменологический подход, представленный моделью Джонсона – Холмквиста JH-2 [2]. Разработанный на её основе алгоритм включён в гидродинамический свободно-лагранжев код SPHERA-2D, реализующий метод сглаженных частиц SPH, в котором использованы соотношения распада произвольного разрыва. В данной работе упомянутый метод SPH не излагается, так как он в полном объёме представлен в [10, 11, 12].

## 2. Разрушение хрупкого материала в модели JH-2

Согласно модели JH-2, реология хрупкого материала в процессе разрушения представляется семейством кривых в плоскости эквивалентное напряжение–давление (рис. 1). Область разрушения при этом ограничена предельными кривыми для неразрушенного материала

$$\sigma_i^* = A(P^* + T^*)^N (1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*) \quad (1)$$

и полностью разрушенного материала

$$\sigma_f^* = \begin{cases} B(P^*)^M (1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*), & \sigma_f^* > \sigma_{f \max}^* \\ \sigma_{f \max}^*, & \sigma_f^* \leq \sigma_{f \max}^* \end{cases} \quad (2)$$

Состояние частично разрушенного материала описывается промежуточными кривыми

$$\sigma^* = \sigma_i^* - D(\sigma_i^* - \sigma_f^*), \quad (3)$$

являющимися линейной комбинацией предельных кривых с коэффициентом пропорциональности, равным параметру разрушения  $D$ . Параметры  $A, B, C, N, M, T^*, \sigma_{f \max}^*$  в (1), (2) являются константами, характеризующими хрупкий материал. Величина параметра разрушения рассчитывается по уравнению, связывающему скорость разрушения материала со скоростью эквивалентной пластической деформации

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_p^f} \frac{d\varepsilon_p}{dt} \quad (4)$$

Скорость «пластических» (согласно терминологии [2]) деформаций можно определить как разность скоростей полной и упругой деформаций

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{3G} \frac{d\sigma_e}{dt} \quad (5)$$

В представленном виде уравнения (4) и (5) не содержатся в [2] при описании модели JH-2 [2]. Модель JH-2 рассматривает разрушение как локальный процесс в каждом элементе среды, не зависящий от состояния соседних элементов. Разрушение хрупкого материала начинается в той локальной области, где величина эквивалентного напряжения  $\sigma_e = \sqrt{3}J_2$  достигает предельного значения  $\sigma_e = \sigma_i$ , соответствующего точке А на рис. 1.

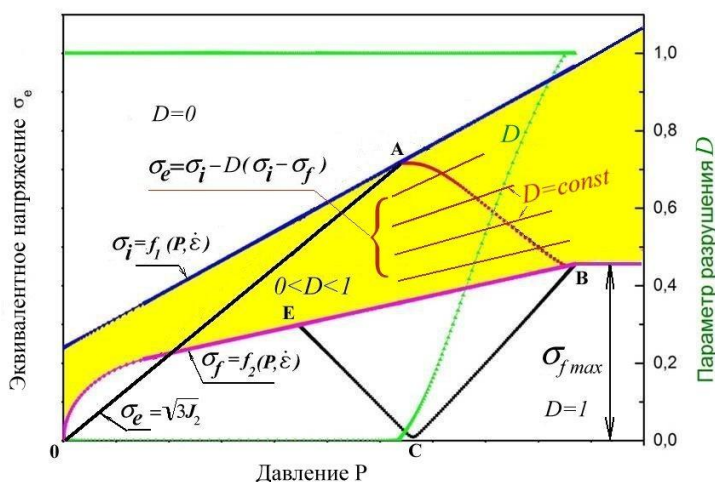


Рис. 1. Разрушение хрупкого материала по модели JH-2

В процессе разрушения элемент среды проходит через ряд промежуточных состояний (кривая А-В), описываемых уравнением (3), на поверхность Друкера – Прагера (2). Разгрузка разрушенного материала происходит упруго, вдоль линии В-С-Е.

### 3. Алгоритмическая реализация модели ЖН-2

Перед началом расчета разрушения материала для каждой SPH-частицы (из решения уравнений гидродинамики на шаге интегрирования  $n+1$  по времени) должны быть определены величины компонент тензора скоростей деформаций  $\dot{\epsilon}_{ij}^{n+1}$  и плотность  $\rho^{n+1}$ , после чего расчёт разрушения ведётся по представленному в таблице 1 алгоритму. Величины, которые вычисляются без учёта разрушения материала за время текущего шага интегрирования, помечены в таблице 1 верхним значком «^». Они вычисляются без учёта тех изменений, которые должны были произойти на текущем шаге  $\Delta t$  вследствие процесса разрушения среды.

Таблица 1

Алгоритмическая реализация модели ЖН-2

Шаг	Описание	Уравнение
1	Скорости изменения компонент девиатора упругих напряжений на шаге интегрирования	$\frac{d\hat{S}_{ij}^{n+1}}{dt} = \hat{S}_{ij}^{n+1} = 2G\dot{\epsilon}_{ij}^{n+1}$
2	Значения компонент девиатора упругих напряжений без учёта разрушения материала на текущем шаге $\Delta t$ и без учёта поворота	$\hat{S}_{ij}^{n+1} = S_{ij}^n + \Delta t \hat{S}_{ij}^{n+1}$
3	Интенсивность напряжений и нормализованная интенсивность напряжений. Влияние разрушения на напряжённое состояние материала не учитывается	$\hat{\sigma}_e^{n+1} = \left[ \sqrt{\frac{3}{2} (\hat{S}_{xx}^2 + \hat{S}_{yy}^2 + \hat{S}_{\theta\theta}^2 + 2\hat{S}_{xy}^2)} \right]^{n+1}$ и $\hat{\sigma}_e^{*n+1} = \hat{\sigma}_e^{n+1} / \sigma_{HEL}$
4	Интенсивность скорости деформаций и нормализованная интенсивность скорости деформаций	$\dot{\epsilon}^{n+1} = \left[ \frac{2}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2 + \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^2 - \dot{\epsilon}_{yy}\dot{\epsilon}_{xx} + \frac{3}{2}\dot{\epsilon}_{xy}^2)} \right]^{n+1}$ и $\dot{\epsilon}^{*n+1} = \dot{\epsilon}^{n+1} / \dot{\epsilon}_0$
5	Вычисляется приращение пластической деформации за шаг	$\Delta \epsilon_p = \Delta t \cdot \dot{\epsilon}^{n+1} - \frac{\sigma_e^n - \sigma_e^{n-1}}{3G}$
6	Величина нормализованного давления	$P^{*n} = \frac{P^n}{P_{HEL}}$ и $\epsilon_p^f = D_1 (P^{*n} + T^*)^{D_2}$
7	Величина параметра разрушения	$D^{n+1} = D^n + \Delta \epsilon_p / \epsilon_p^f$
8	Значения на предельных кривых, отделяющих зону разрушения ( $0 < D < 1$ , рис. 1) от области неразрушенного материала ( $D = 0$ ) и области полностью разрушенного ( $D = 1$ )	$\sigma_i^{*n+1} = A (P^{*n} + T^*)^N (1 + C \ln \dot{\epsilon}^{*n+1})$
9		$\sigma_f^{*n+1} = \begin{cases} B (P^{*n})^M (1 + C \ln \dot{\epsilon}^{*n+1}), & \sigma_f^* > \sigma_{f \max}^* \\ \sigma_{f \max}^*, & \sigma_f^* \leq \sigma_{f \max}^* \end{cases}$
10	Интенсивность напряжений, вычисленная с учётом того, что девиатор напряжений изменился на текущем шаге интегрирования вследствие процессов разрушения.	$\sigma_e^{*n+1} = [\sigma_i^* - D (\sigma_i^* - \sigma_f^*)]^{n+1}$
11	Если $D^{n+1} > 0$ , то начался (или продолжается) процесс разрушения. Если при этом $\hat{\sigma}_e^* > \sigma_e^*$ , то производится корректировка вычисленного на шаге 2 девиатора упругих напряжений на текущую поверхность разрушения	$S_{ij}^{n+1} = \left[ \hat{S}_{ij} \left( \frac{\sigma_e^*}{\hat{\sigma}_e} \right) \right]^{n+1}$ Полученные значения компонент, подставленные в формулу шага 3, должны дать ту же величину, что и шаг 10

Шаг	Описание	Уравнение
12	Корректировка девиатора на поворот	Процедура описана в [13] и [14]
13	Вычисляется изменение упругой энергии в разрушающемся материале	$\Delta U = U_1 - U_2, \text{ где}$ $U_2 = \frac{\sigma_e^{n+2}}{6G} = \frac{1}{6G} [\sigma_i^{n+1} - D^{n+1} (\sigma_i^{n+1} - \sigma_f^{n+1})]^2,$ $U_1 = \frac{1}{6G} [\sigma_i^{n+1} - D^n (\sigma_i^{n+1} - \sigma_f^{n+1})]^2$
14	Вычисляется изменение давление в материале за счёт «разбухания» при разрушении	$\Delta P^{n+1} = -K_1 \mu + \sqrt{(K_1 \mu + \Delta P^n)^2 + 2\beta K_1 \Delta U},$ где $\mu = \rho^{n+1} / \rho_0 - 1$
15	Вычисляется величина давления в материале согласно уравнению состояния [2]	$P^{n+1} = \begin{cases} K_1 \mu + K_2 \mu^2 + K_3 \mu^3 + \Delta P^{n+1}, & \mu > 0 \\ K_1 \mu, & \mu \leq 0 \end{cases}$

Если при вычислении пластических деформаций на шаге 5 применить вместо выражения  $(\sigma_e^n - \sigma_e^{n-1})/3G$  более корректное выражение  $(\sigma_e^{n+1} - \sigma_e^n)/3G$ , это не позволяет построить алгоритм расчёта явным. Аналогично, по той же причине на шаге 6 используется  $P^{*n}$  вместо  $P^{*n+1}$ . О погрешности в расчётах, которую вносят подобные упрощения, можно судить лишь сравнив результаты, полученные обоими алгоритмами, безытерационным (представленным в таблице) и итерационным, который разрабатывается авторами в настоящее время.

#### 4. Валидация алгоритма

В работе [2] приведены результаты четырёх экспериментов по ударному нагружению керамики В<sub>4</sub>С и сравнение их с результатом компьютерного моделирования. Эксперименты состояли в том, что пластина из В<sub>4</sub>С разгонялась до скоростей 1633 м/с (рис. 2), 2076 м/с (рис. 3) и 3980 м/с (рис. 5), после чего производилось соударение пластины с испытуемым образцом из В<sub>4</sub>С. В эксперименте ВС7 (рис. 4) образец из В<sub>4</sub>С нагружался ударом танталовой пластины при скорости 2059 м/с. Тыльные стороны образцов во всех экспериментах контактировали с пластинами из фторида лития. Движение тыльной поверхности образца регистрировалось оптическим способом.

Были проведены расчёты ударного нагружения и разрушения керамики В<sub>4</sub>С согласно исходным данным экспериментов ВС4, ВС5, ВС7, ВС10 [2]. Исходные данные для материалов приведены в таблице 2. Сравнение результатов расчётов и экспериментов показано на рисунках 2–5. Численное моделирование эксперимента ВС4 проводилось с помощью кода SPHERA-2D в двумерной осесимметричной постановке при размере расчётной области  $x \times y = 4000 \times 5$  SPH-частиц, размер каждой частицы составлял  $D = 10$  мкм. Толщина ударника составляла 484 SPH-частицы, толщина мишени из В<sub>4</sub>С составляла 1032 SPH-частицы, толщина пластины из LiF составляла 2484 SPH-частицы. В  $y = 0$  (ось симметрии) и в  $y = 50$  мкм помещались жёсткие стенки. Вводилось условие проскальзывания SPH-частиц на жёстких стенках. Таким образом, организация расчётной области имитировала одномерный расчёт соударения, выполняемый с помощью 2D-кода. В эксперименте ВС4 к тыльной поверхности ударника крепился слой пенопласта толщиной 5 мм. Расчёты показали, что наличие/отсутствие пенопласта мало сказывается на профиле скорости  $U_x(t)$  в точке А.

Расчёты демонстрирует удовлетворительное совпадение вычисленных амплитуд предвестника и профилей скорости с экспериментально измеренными. Характер изменения напряжённого состояния материала в процессе разрушения, показанный на рис. 2–5, соответствует представлениям о разрушении керамики, развитым в [2].

Таблица 2

Константы материалов в модели ЖН-2 [2,15,16]

Параметр	B <sub>4</sub> C	Стекло
Плотность $\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup>	2510	2530
Модуль объёмного сжатия $K_1$ , ГПа	233	45.4
Модуль сдвига $G$ , ГПа	197	30.4
Напряжение $\sigma_{HEL}$ , ГПа	15.44	4.54
Давление $P_{HEL}$ , ГПа	8.71	2.92
Нормализованное напряжение $T^*$		
A	0.927	0.93
N	0.67	0.77
C	0.005	0.003
B	0.7	0.2
M	0.85	1
$\sigma_{fmax}^*$	0.2	0.5
$K_1$ , ГПа	233	45.4
$K_2$ , ГПа	-593	-138.0
$K_3$ , ГПа	2800	290.0
B	1	1
$D_1$	0.001	0.043
$D_2$	0.5	0.85

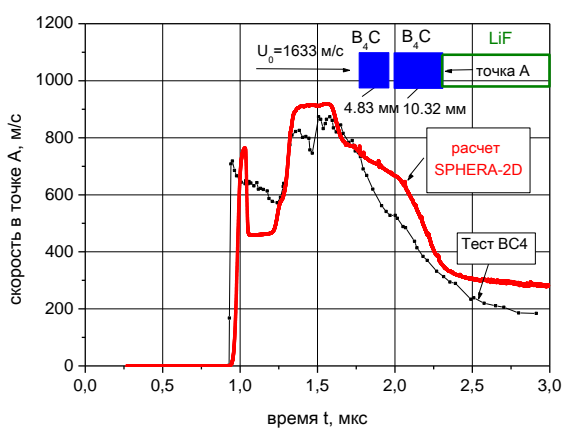


Рис. 2. Сравнение результатов расчёта и эксперимента BC4

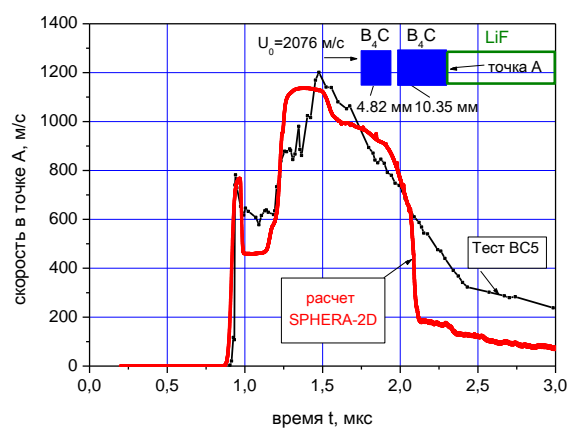


Рис. 3. Сравнение результатов расчёта и эксперимента BC5

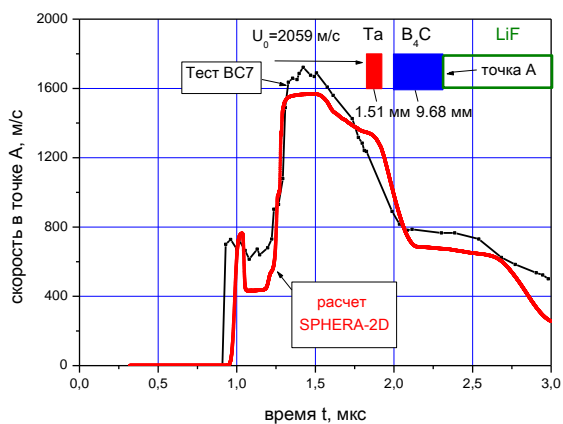


Рис. 4. Сравнение результатов расчёта и эксперимента BC7

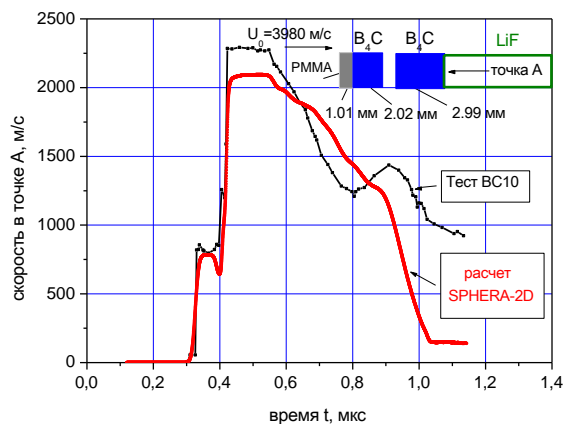


Рис. 5. Сравнение результатов расчёта и эксперимента BC10

## 5. Моделирование соударения стеклянных стержней

Численное моделирование эксперимента по соударению одинаковых стеклянных стержней длиной 100 мм и диаметром 10 мм каждый, проводилось в двумерной осесимметричной постановке при размере расчётной области  $x \times y = 2000 \times 50$  SPH-частиц, размер каждой частицы составлял 0.1 мм. Скорость соударения составляла  $U_x = 500$  м/с, ударником являлся левый стержень. Плоскость соударения стержней располагалась в начале координат при  $t = 0$ . Фоторегистрация процесса разрушения стеклянного стержня при ударном нагружении приведена в [1].

На рис. 6 показано сравнение результатов расчета и эксперимента. Характерно, что границы расчётной и экспериментальной областей полного разрушения стержня примерно совпадают на момент времени  $t = 20$  мкс и находятся в  $x \approx 28$  мм от плоскости соударения  $x \approx 5$  мм, которая принималась за начало координат  $x = 0$  при  $t = 0$ .

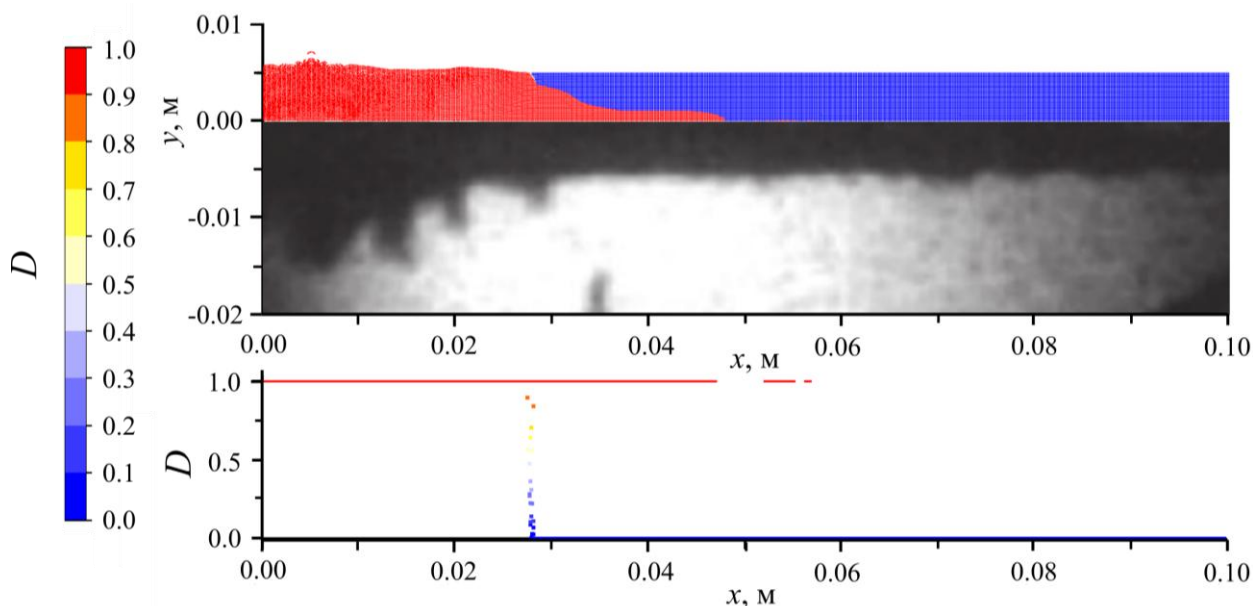


Рис. 6. Разрушение стеклянного стержня при соударении в момент времени  $t = 20$  мкс, модель JH-2

## 6. Заключение

Из сравнения приведенных результатов расчётов и экспериментов по ударному нагружению керамики и стекла можно сделать вывод, что представленный в табл. 1 алгоритм расчета разрушения хрупких материалов, основанный на безытерационной схеме решения многократно неявной системы уравнений модели JH-2, обеспечивает эффективную и устойчивую работу кода SPH и с достаточной степенью достоверности позволяет моделировать динамическое разрушение хрупких материалов.

## Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН «Теплофизика высоких плотностей энергии» (код программы I.13П).

## Литература

1. Walley S.M. An introduction to the properties of silica glass in ballistic applications // Strain. 2014. Т. 50. № 6. Pp. 470–500.
2. Johnson G.R., Holmquist T.J. Response of boron carbide subjected to large strain, high strain rates, and high pressures // J. Appl. Phys. 1999. Vol.85. No. 12. Pp. 8060–8073.

3. Brar N.S., Bless S.J., Rosenberg Z. Impact-induced failure waves in glass bars and Plates // *Appl. Phys. Lett.* 1991. Vol. 59. No. 26. Pp. 3396–3398.
4. Willmott G.R., Radford D.D. Taylor impact of glass rods // *J. Appl. Phys.* 2005. Vol.97. No. 9. P. 093522.
5. Канель Г.И., Разоренов С.В., Фортон В.Е. Волны разрушения в ударно-сжатом стекле // *Успехи механики.* 2005. Т. 3. №3. С. 9–57.
6. Медин С.А., Паршиков А.Н. Моделирование распространения волн разрушения при ударном сжатии хрупких материалов (стекло) // *Механика твердого тела.* 2012. № 2. С. 102–113.
7. Кондауров В.И. Об особенностях волн разрушения в высокооднородных хрупких материалах // *ПММ.* 1998. Т.62. вып.4. С.707–714.
8. Chen Z., Feng R., Xin X., Shen L. A computational model for impact failure with shear-induced dilatancy // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2003. Vol. 56. No. 14. Pp. 1979–1997.
9. Partom Y. Modeling failure waves in glass // *Int. J. Impact Engng.* 1998. V. 21. No. 9. P. 791-799.
10. Паршиков А.Н. Применение решения задачи Римана в методе частиц // *ЖВМ и МФ.* 1999. Т. 39. № 7. С. 1216.
11. Parshikov A.N., Medin S.A., Loukashenko I.I., Milekhin V.A., Improvements in SPH Method by means of Interparticle Contact Algorithm and Analysis of Perforation Tests at Moderate Projectile Velocities // *Int. J. Impact Eng.* 2000. Vol. 24. P.779
12. Parshikov A.N, Medin S.A. Smoothed Particle Hydrodynamics Using Interparticle Contact Algorithms // *J. Comp. Phys.* 2002. Vol. 180, No. 358.
13. Уилкинс М.Л. Расчёт упруго-пластических течений // *Вычислительные методы в гидродинамике* / Под ред. Б.Олдера, С.Фернбаха, М. Ротенберга. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
14. Мейдер Ч. Численное моделирование детонации. М.: Мир. 1985. 384 с.
15. Holmquist T.J. High strain rate properties and constitutive modeling of glass // 15<sup>th</sup> International Symposium on Ballistics – Jerusalem, Israel, 21–24 May, 1995
16. Gasonas G.A. Implementation of the Johnson-Holmquist (JH-2) Constitutive Model into DYNA3D // ARL-TR-2699. March 2002. 17 P.

Статья поступила в редакцию 20 ноября 2015 г.