

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ ВСЛЕДСТВИЕ ДЕФОРМАЦИИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ

М.К. Ермаков

Институт проблем механики Российской академии наук, Москва

Аннотация

Рассматривается задача о перемешивании однородной несжимаемой изотермической жидкости в двумерной «квадратной» области, верхняя граница которой деформируется по заданному периодическому закону. Исследование перемешивания жидкости осуществляется методом математического моделирования в переменных Эйлера. Движение жидкости описывается уравнениями Навье – Стокса. В уравнениях делается замена переменных, благодаря которой область переменной формы отображается в квадратную область. Преобразованные уравнения Навье – Стокса решаются традиционным явным методом Чорина, а преобразованное уравнение Пуассона для давления решается методом последовательной нижней релаксации. Исследовалось перемешивание жидкости для трех законов деформации границы: стоячая волна, гармоническая бегущая волна с условием проскальзывания и гармоническая бегущая волна с условием прилипания на верхней границе. Длина волны во всех трех случаях совпадала с размером области, а амплитуда равнялась одной десятой размера области. В случае стоячей волны перемешивание практически не происходит, в случае бегущей волны происходит перемешивание. При отсутствии касательных напряжений перемешивание происходит за время порядка 120, а при наличии касательных напряжений за время порядка 40 периодов движения границы. И в том, и в другом случае степень перемешивания достигает примерно 40 процентов. Однако, при наличии касательных напряжений степень перемешивания, достигнув максимума в 42 процента при времени 50, далее снижается до 30 процентов при времени 500. Для случаев бегущей волны приведены эволюции лагранжевых частиц.

THE MODELING OF A HOMOGENEOUS LIQUID MIXING DUE TO DEFORMATION OF THE BOUNDARY REGION

The problem of homogeneous-incompressible-liquid mixing in two-dimensional “square” region with periodically deformed upper boundary is under consideration. The study of liquid mixing is performed by the mathematical modeling method in the Euler variables. The liquid motion is governed by the Navier – Stokes equations. There is a variables transformation which does reflect the variable shaped region to a square one. The transformed Navier – Stokes equations are solved by the traditional explicit Chorin method and a transformed Poisson equation is solved by the lower successive relaxation method. The liquid mixing is studied for the three cases of boundary deformation: the staying wave, the harmonically running wave with slip condition and the harmonically running wave with no-slip condition on the upper boundary. The wavelength in the all three cases coincides with region size, and the amplitude was 1/10 of the region size. In the case of the staying wave there is no practically any mixing, and in the case of the running waves there are visible mixing of the liquid. In the absence of tangential stresses the mixing time is about 120, and in the presence of tangential stresses the mixing time is about 40 periods of the boundary motion. In the both cases the mixing rate is about 40 percents. However, in the presence of tangential stresses the mixing rate having been achieved the maximum of about 42 percents at time equal 50 then decreases to 30 percents for time equal 500. For the running wave cases the evolution of lagrangian particles is presented.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для перемешивания жидких сред существует механический, вибрационный и пневматический способы. Механическое перемешивание жидкостей осуществляют лопастными, пропеллерными, турбинными и специальными мешалками. В данной работе рассматривается способ механического перемешивания, связанный с наличием деформируемой границы. Такой способ перемешивания используется, в частности, в пищевой обработке.

Чтобы понять, почему простое двумерное периодическое движение вязкой жидкости может стать хаотическим, что приведет к эффективному перемешиванию, рассмотрим этот вопрос подробнее [1]. Примеры перемешивания можно обнаружить буквально всюду во Вселенной. Временные и пространственные масштабы этих явлений меняются в огромных пределах. Газ, попадающий в атмосферу, смешивается с окружающим воздухом за считанные секунды, тогда как процессы перемешивания в мантии Земли длятся несколько сотен

миллионов лет и даже больше. Перемешивание имеет также решающее значение в современной технологии. Оно позволяет химикам контролировать химические реакции для производства полимерных материалов с уникальными свойствами и распределять добавки, уменьшающие вязкое трение в трубопроводах.

Все двумерные потоки построены из одинаковых «блоков», связанных с гиперболическими (седловыми) и эллиптическими точками. К гиперболической точке жидкость движется в одном направлении, от нее – в другом, а эллиптическую точку жидкость обтекает. Поскольку в стационарном потоке линии тока фиксированы, и траектории частиц жидкости никогда не пересекаются, они не могут войти в контакт друг с другом, т.е. перемешаться. Для того чтобы избежать этого надо заставить поток меняться со временем так, чтобы линии тока, соответствующие картинам течения в разные моменты времени, пересекались.

Анализ показывает, что эффективное перемешивание возникает при наличии гиперболических критических точек, а наличие эллиптических критических то-

чек, наоборот, препятствует перемешиванию. Нестационарные двумерные потоки могут приводить к эффективному перемешиванию, поскольку в этом случае отток, связанный с одной гиперболической периодической точкой, может пересекать область вытекающего потока этой же или какой-либо другой гиперболической точки. Точку, в которой пересекаются втекающей и вытекающей потоки, связанные с одной гиперболической точкой, называют трансверсальной гомоклинической точкой. Если эти пересекающиеся потоки связаны с двумя разными гиперболическими точками, то точку пересечения потоков называют трансверсальной гетероклинической точкой.

Гомоклинические и гетероклинические пересечения – характерные следы хаоса. С математической точки зрения система, в которой могут возникать подковообразные структуры или трансверсальные гомо- или гетероклинические пересечения, может считаться хаотической. Оказывается, даже единственное пересечение втекающего и вытекающего потоков с неизбежностью приводит к появлению трансверсальных гомоклинических точек и что подобные пересечения могут возникать даже в таких «хороших» системах, как системы, описываемые законами движения Ньютона. Этот факт впервые был открыт в XIX в. французским математиком Анри Пуанкаре. В 1984 г. Х. Арэф из Университета Брауна обнаружил, что уравнения, описывающие траектории частиц жидкости в двумерном потоке, формально идентичны уравнениям, описывающим гамильтоновы системы. Развивая это наблюдение путем компьютерного моделирования, он доказал, что в гамильтоновой системе под действием периодически меняющихся сил может происходить эффективное перемешивание.

В монографии [2] показана возможность аналитического описания перехода к хаосу в системе с деформируемой границей при наличии касательных напряжений. Цель настоящей работы попытаться воспроизвести эффективное перемешивание в жидкости путем стандартных численных методов моделирования гидродинамических систем.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПЕРЕМЕШИВАНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННЫХ ЭЙЛЕРА

2.1. Геометрия области и определяющие уравнения

Течение жидкости происходит в двумерной области, боковые и нижняя границы которой представляют собой части квадратной области, а верхняя граница $y = h(x, t)$ является известной функцией горизонтальной координаты x и времени t (рис. 1). Определяющими уравнениями для течения в области являются уравнения Навье – Стокса однородной несжимаемой жидкости в безразмерном виде:

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0, \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \operatorname{Re}(\vec{U} \nabla) \vec{U} = -\nabla p + \Delta \vec{U},$$

где $\vec{U} = (u, v)$ – вектор скорости, представленный двумя декартовыми компонентами u и v ; p – давление. Первое уравнение есть уравнение неразрывности, выражающее закон сохранения массы, а второе уравнение представляет собой второй закон Ньютона для эле-

мента жидкой среды в переменных Эйлера. Параметр Re есть число Рейнольдса.

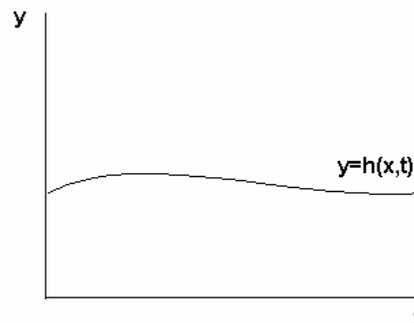


Рис.1. Криволинейная область в исходных координатах (x, y)

Граничные условия на нижней и боковых границах области есть условия непроницаемости и прилипания

$$u = v = 0,$$

а на верхней границе ставятся условия непроницаемости и, в зависимости от характера функции $h(x, t)$, либо условие проскальзывания, либо условие прилипания.

2.2. Граничные условия на деформируемой границе

Рассматривается два вида деформации границы: стоячая волна и бегущая волна. Стоячая волна определяется как

$$h(x, t) = 1 + A \cos(\pi t) \sin(2\pi x),$$

а бегущая волна как

$$h(x, t) = 1 + A \sin[2\pi(x - t)],$$

где A – амплитуда волны. В обоих случаях площадь области остается постоянной, и, таким образом, возможно решение с постоянной плотностью, т.е. однородной жидкости. В обоих случаях ставится условие непротекания через верхнюю границу $h(x, t)$. Для случая стоячей волны и гармонической бегущей волны с проскальзыванием граничные условия ставились в виде:

$$u = 0, v = h_t,$$

а для случая гармонической волны без проскальзывания граничные условия ставились в виде:

$$u = 1, v = 0.$$

2.3. Преобразование координат и способ получения уравнений в дивергентном виде

На рис. 1 представлена форма области в координатах (x, y) . Нижняя граница области ограничена $y = 0$, а верхняя уравнением $y = h(x, t)$. Осуществим замену переменных таким образом, чтобы в новых переменных форма области была прямоугольной (квадратной). Введем новые переменные (ξ, η, τ) следующим образом:

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{h(x, t)}, \quad \tau = t.$$

Якобиан преобразования J равен $J = \frac{\partial(\xi, \eta, \tau)}{\partial(x, y, t)}$.

Вычислим элементы якобиана:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\eta \frac{h_\xi(\xi, \tau)}{h(\xi, \tau)}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{h(\xi, \tau)}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\eta \frac{h_\tau(\xi, \tau)}{h(\xi, \tau)},$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = 1.$$

Теперь вычисляем якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{1}{h(x, t)} = \frac{1}{h(\xi, \tau)}.$$

Частные производные при замене переменных преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \eta \frac{h_\tau(\xi, \tau)}{h(\xi, \tau)} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{h_\xi(\xi, \tau)}{h(\xi, \tau)} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{h(\xi, \tau)} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Перепишем уравнение вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

в новых переменных в дивергентном виде ([3], §8.2, с. 519):

$$\frac{\partial hU}{\partial \tau} + \frac{\partial hE}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[h \left(U \frac{\partial \eta}{\partial t} + E \frac{\partial \eta}{\partial x} + F \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] = 0.$$

Подставляя выражения для элементов якобиана в уравнения, окончательно получаем

$$\frac{\partial hU}{\partial \tau} + \frac{\partial hE}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\eta U \frac{\partial h}{\partial \tau} - \eta E \frac{\partial h}{\partial \xi} + F \right) = 0.$$

2.4. Уравнения неразрывности и движения в дивергентном виде

Используя приведенные формулы, для исходных уравнений Навье – Стокса получаем

$$\frac{\partial hu}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (-\eta h_\xi u + v) = 0,$$

$$\frac{\partial hu}{\partial \tau} + \text{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} hu^2 + \frac{\partial}{\partial \eta} (uv - \eta h_\xi u^2) \right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \xi} hp + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta h_\xi p + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(h \frac{\partial u}{\partial \xi} - \eta h_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta h_\tau u - \eta h_\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1 + \eta^2 h_\xi^2}{h} \frac{\partial u}{\partial \mu} \right),$$

$$\frac{\partial hv}{\partial \tau} + \text{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} huv + \frac{\partial}{\partial \eta} (v^2 - \eta h_\xi uv) \right] =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(h \frac{\partial v}{\partial \xi} - \eta h_\xi \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta h_\tau v - \eta h_\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1 + \eta^2 h_\xi^2}{h} \frac{\partial v}{\partial \mu} \right).$$

Дивергентная форма уравнений необходима для используемого ниже метода контрольных объемов решения уравнений.

2.5. Определение степени перемешивания частиц

Для вычисления степени перемешивания частиц введем числовую характеристику, которая для большого числа частиц обращалась бы в 0 в случае, если все частицы находятся в одной точке, и равнялась бы единице при равномерном распределении частиц. В данной работе в качестве такой характеристики введено отношение площади, покрываемой квадратами, центры которых совпадают с частицами, к площади области. При этом площадь всех квадратов равна площади области. Данную характеристику назовем степенью перемешивания частиц.

3. РЕАЛИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ

3.1. Применение явной схемы Чорина

Для решения полученных в предыдущей части уравнений используется метод конечных объемов, причем дискретизация уравнений происходит на смещенной сетке, в которой скалярные величины (давление) определены внутри конечных объемов, а компоненты скорости на соответствующих гранях конечных объемов. Для интегрирования полученных уравнений используется традиционная явная схема расщепления Чорина (см. напр. в [3]). Учитывая тот факт, что давление входит в уравнения линейно, на первом шаге вычисляется промежуточная скорость (\bar{u}, \bar{v}) :

$$\frac{h^{n+1} \bar{u} - h^n u^n}{\tau} = L_u(u^n, v^n),$$

$$\frac{h^{n+1} \bar{v} - h^n v^n}{\tau} = L_v(u^n, v^n),$$

где операторы правой части включают члены уравнений движения все, кроме давления.

На втором шаге решается уравнение Пуассона для определения давления на верхнем слое p^{n+1} . Уравнение Пуассона для давления получается, если подставить уравнения движения с учетом вычисления промежуточных скоростей в уравнение неразрывности, полагая, что скорости на верхнем слое удовлетворяют ему. Уравнение Пуассона для давления выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(h \frac{\partial p}{\partial \xi} - \eta h_\xi \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\eta h_\xi \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1 + \eta^2 h_\xi^2}{h} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\tau} \left[\frac{\partial h \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (-\eta h_\xi \bar{u} + \bar{v}) \right].$$

Для его решения необходимо, чтобы граничные условия для промежуточной скорости (\bar{u}, \bar{v}) совпадали с граничными условиями для скорости на верхнем слое. Для этого, в частности, требуется согласованная аппроксимация граничных условий с аппроксимацией уравнения Пуассона.

На третьем шаге осуществляется коррекция скорости:

$$\frac{u^{n+1} - \bar{u}}{\tau} = -\frac{\partial p^{n+1}}{\partial \xi} - \eta \frac{h_\xi}{h} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \eta},$$

$$\frac{v^{n+1} - \bar{v}}{\tau} = -\frac{1}{h} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \eta}.$$

Получаемые компоненты скорости удовлетворяют уравнению неразрывности.

Схемы первого и третьего шагов являются явными, а уравнение Пуассона (эллиптическое) второго шага решается итерационным методом нижней последовательной релаксации.

3.2. Движение лагранжевых частиц

Движение лагранжевых частиц в исходных координатах (x, y) вычисляется через скорости, определенные в узлах преобразованной сетки, следующим образом:

$$x^{n+1} = x^n + \Delta\tau u^{n+1}(x^n, y^n),$$

$$y^{n+1} = y^n + \Delta\tau \left[v^{n+1}(x^n, y^n) - \eta h_t \right],$$

где $\Delta\tau$ – шаг интегрирования по времени.

3.3. Вычисление степени перемешивания частиц

Для вычисления степени перемешивания частиц вычислялась общая площадь, занимаемая квадратами заданного размера, центр которых совпадал с лагранжевыми частицами. Для вычисления общей площади сканировался список прямоугольников, представленных соответствующими координатами сторон для определения попарных пересечений. Результатом пересечения двух прямоугольников, стороны которых параллельны, является от одного до четырех непересекающихся прямоугольников, стороны которых параллельны исходным. Лишние прямоугольники удалялись из списка, а новые, в случае необходимости, добавлялись в него; размеры некоторых прямоугольников корректировались в списке. Процесс продолжался до исчерпания пересекающихся прямоугольников. Искомая площадь после этого вычислялась как сумма площадей прямоугольников в списке. Степень перемешивания частиц вычислялась как отношение площади, занимаемой прямоугольниками, к площади области.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОБСУЖДЕНИЕ

4.1. Параметры расчетов и верификация кода

Вычисления проводились для трех видов движения верхней границы: стоячей волны, гармонической бегущей волны с проскальзыванием и гармонической бегущей волны с прилипанием. Амплитуда волн A во всех случаях равнялась 0.1, а круговая частота волны равнялась единице. Число Re в расчетах равнялось нулю, что соответствовало расчетам в [2] для течения Стокса. Расчеты проводились на двух типах сеток: 21×21 и 41×41 . Степень перемешивания частиц на обеих сетках отличалась незначительно. Кроме этого, при движущейся плоской границе распределение скоростей соответствует расчетам по ранее разработанным кодам [4, 5]. Для исследования смешивания рассматривалось 100 частиц, которые равномерно заполняли квадрат $[0.2 \div 0.38] \times [0.4 \div 0.58]$ в исходных координатах с шагом 0.02 по вертикали и горизонтали. Шаг инте-

рирования соответствовал половине допустимого шага по диффузионному ограничению явной схемы.

4.2. Результаты моделирования

Ниже представлены результаты моделирования в виде зависимости степени перемешивания от времени для трех законов поведения верхней границы и распределения лагранжевых частиц. На рис. 2 представлены зависимости степени перемешивания от времени от 0 до 500 периодов изменения верхней границы. Отчетливо видно, что в случае стоячей волны (кривая 1) перемешивания не происходит; при этом сами частицы совершают колебания вокруг среднего положения, близкого к начальному. В случае гармонического движения волны с проскальзыванием (кривая 2) перемешивание происходит за время примерно 120 периодов движения границы, достигая значения примерно 37 процентов, которое в дальнейшем практически не меняется, колеблясь около данного значения. В случае гармонического движения волны без проскальзывания (кривая 3) перемешивание происходит примерно за 40 периодов, однако, достигнув максимума перемешивания в 42 процента при времени 50, затем достаточно монотонно снижалось до значения в 30 процентов при времени 500 периодов. Данный эффект, возможно, имеет численный характер. Таким образом, перемешивание при наличии проскальзывания происходит примерно в три раза быстрее, чем без проскальзывания, и степень перемешивания в первом случае выше. По причинам, которые в настоящее время непонятны, при отсутствии проскальзывания, степень перемешивания уменьшается со временем.

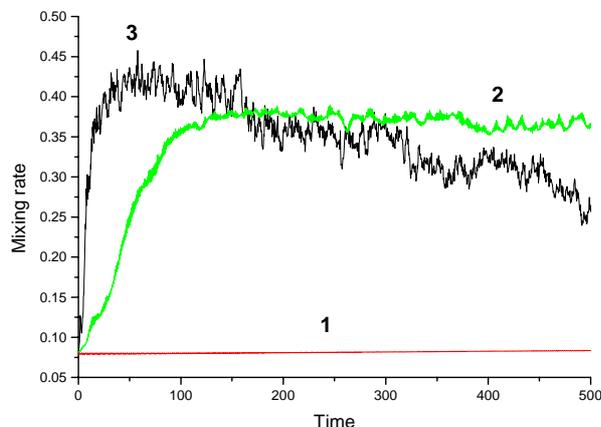


Рис. 2. Зависимость степени перемешивания от времени для движения верхней границы в виде стоячей волны (1), бегущей волны при наличии проскальзывания (2) и бегущей волны при наличии прилипания на деформируемой границе (3)

Далее, на рис. 3–5 представлены распределения лагранжевых частиц за времена, кратные целым значениям периода волны для гармонических бегущих волн. На рис. 3 для случая бегущей волны без проскальзывания представлена эволюция лагранжевых частиц с начального момента до 8 периодов для каждого периода. Отчетливо видно, что уже за первый десяток периодов происходит значительная деформация ансамбля частиц. На рис. 4 представлена дальнейшая эволюция частиц для времен кратных десяти до 50 периодов. Видно, что к времени 40 периодов визуально распределение изначально компактного ансамбля частиц можно характеризовать как хаотическое.

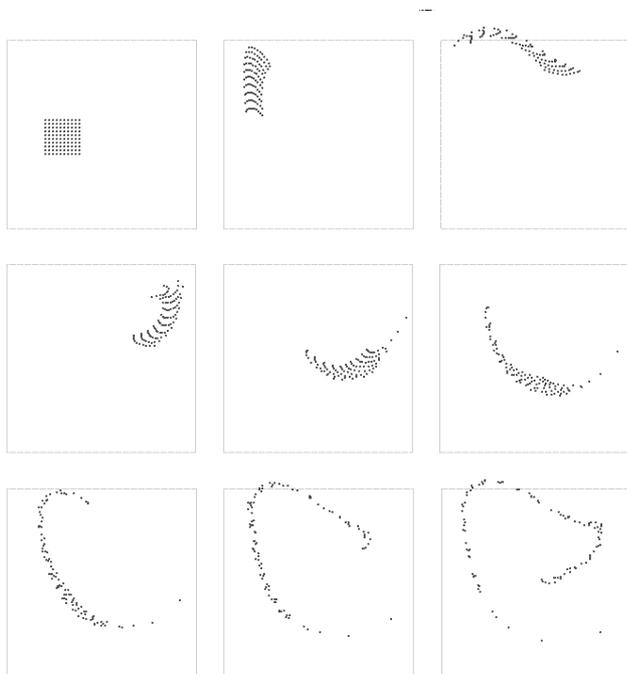


Рис. 3. Эволюция лагранжевых частиц для случая движения верхней границы в виде бегущей волны с прилипанием для времен, равных 0, 1, ..., 8 периодов движения границы (слева направо, сверху вниз)

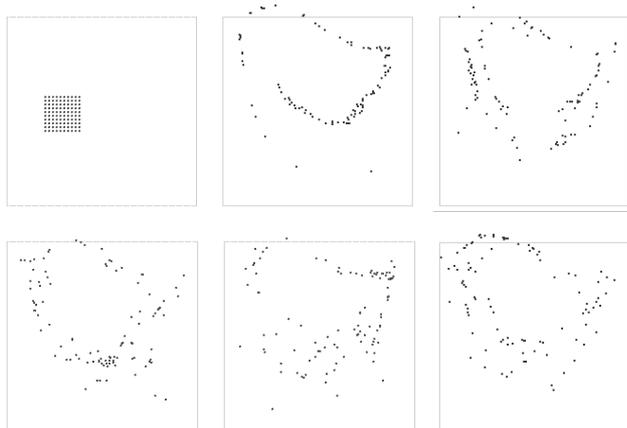


Рис. 4. Эволюция лагранжевых частиц для случая движения верхней границы в виде бегущей волны с прилипанием для времен, равных 0, 10, 20, 30, 40, 50 периодов движения границы (слева направо, сверху вниз)

На рис. 5 представлена эволюция лагранжевых частиц для случая гармонической бегущей волны с проскальзыванием с начального момента до 50 периодов с шагом в 10 периодов. Отчетливо видна “наматывающаяся” структура распределения ансамбля частиц и растягиванием “хвоста” ансамбля.

4.3. Об использовании моделирования уравнений в переменных Лагранжа

В задачах о моделировании перемешивания жидкости, особенно неоднородной, более перспективным является подход с использованием переменных Лагранжа для записи уравнений и их интегрирования. Примеров применения подхода с использованием переменных Лагранжа в литературе имеется достаточно (см., например, [6–9]), однако при значительных относительных перемещениях частиц жидкости требуется частая перестройка расчетной сетки, и возможно сильное падение шага интегрирования из-за диффузионного ограничения для явных схем, либо требуется ис-

пользование трудоемких и затратных неявных схем, связанных с обращением разреженных матриц. Вместе с тем, при моделировании перемешивания неоднородной жидкости, использование переменных Лагранжа, видимо, не имеет альтернатив

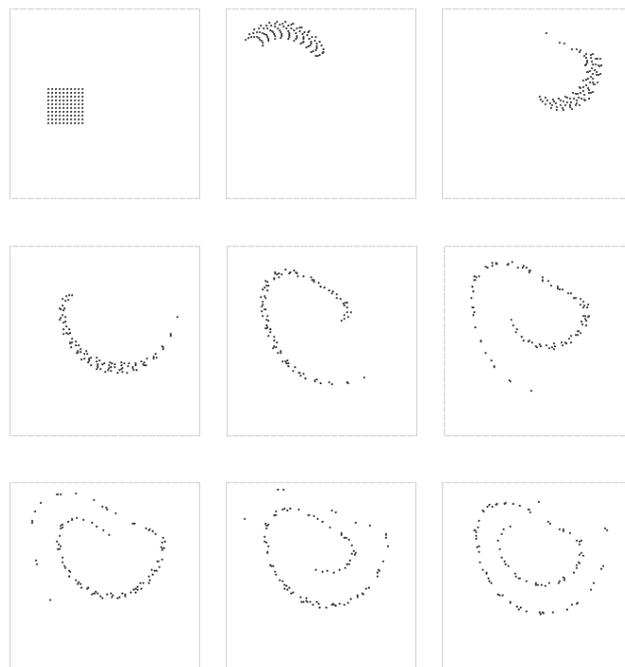


Рис. 5. Эволюция лагранжевых частиц для случая движения верхней границы в виде бегущей волны с проскальзыванием для времен, равных 0, 10, 20, 30, 40, 50 периодов движения границы (слева направо, сверху вниз)

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача о перемешивании однородной несжимаемой жидкости вследствие деформации верхней границы двумерной области. Для данной задачи в переменных Эйлера построена разностная схема на основе традиционного явного метода Чорина. Рассмотрены деформации верхней границы в виде стоячей волны при наличии прилипания, гармонической бегущей волны при наличии проскальзывания на ней и гармонической бегущей волны при наличии прилипания на ней. В случае стоячей волны перемешивание не происходит. В случае бегущей волны с проскальзыванием перемешивание происходит за время, равное 120 периодов движения границы, а в случае с прилипанием за время, равное 40 периодов движения границы. Степень перемешивания достигает примерно 40 % в обоих случаях. В случае бегущей волны с прилипанием максимум перемешивания в примерно 40 % достигается за время равное примерно 50 единицам времени, а далее монотонно уменьшается до примерно 30 % к времени, равном 500 единиц. Данный эффект, возможно, имеет численный характер.

Моделирование перемешивания, особенно неоднородной жидкости, логичнее проводить в переменных Лагранжа. Однако моделирование течений в переменных Лагранжа при наличии больших деформаций встречает существенные трудности на своем пути, хотя и не имеет альтернатив для моделирования перемешивания в неоднородных средах.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

A — амплитуда волны для верхней границы

h — форма верхней границы

p — давление

t — время

u, v — компоненты скорости

x, y — декартовы координаты

Re — число Рейнольдса

ξ — новая горизонтальная координата

η — новая вертикальная координата

τ — новая временная координата

$\Delta\tau$ — временной шаг интегрирования

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оттино Д.М. Перемешивание жидкостей // В мире науки. № 3. 1989. С. 34 – 45.
2. Климов Д.М., Петров А.Г., Георгиевский Д.В. Вязкопластические течения. Динамический хаос, устойчивость, перемешивание. М.: Наука, 2005. 394 с.
3. Андерсен Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: «МИР», 1990.
4. Ермаков М.К., Никитин С.А., Полежаев В.И. Система и компьютерная лаборатория для моделирования конвективного тепло- и массообмена // Изв. РАН, сер. Механика жидкости и газа. №3, 1997. С. 22–38.
5. Ermakov M.K., Nikitin S.A., Polezhaev V.I. et.al. Educational and tutorial modelling of elementary flows, heat and mass transfer during crystal growth in ground-based and microgravity environment // J. Crystal Growth. V. 266, 2004. pp. 388–395.
6. Кроули У. FLAG – свободно-лагранжев метод для численного моделирования гидродинамических течений в двух измерения // Численные методы в механике жидкостей. М.: МИР, 1973. С. 133–145.
7. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994. 528 с.
8. Франк А.М. Дискретные модели несжимаемой жидкости. М.: Физматлит, 2001. 208 с.
9. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Лагранжев численный метод решения двумерных задач свободной конвекции //Тр. 4-й Росс. нац. конф. по теплообмену. Т. 3. М.: Изд. Дом МЭИ. 2006. С. 38–41.