

# Solution of plane diode problem for the verification of the particle-in-cell method

A.S. Dikalyuk<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> FSUE VNIIA, Russia, Moscow, 127473, Sushchevskaya st., 22

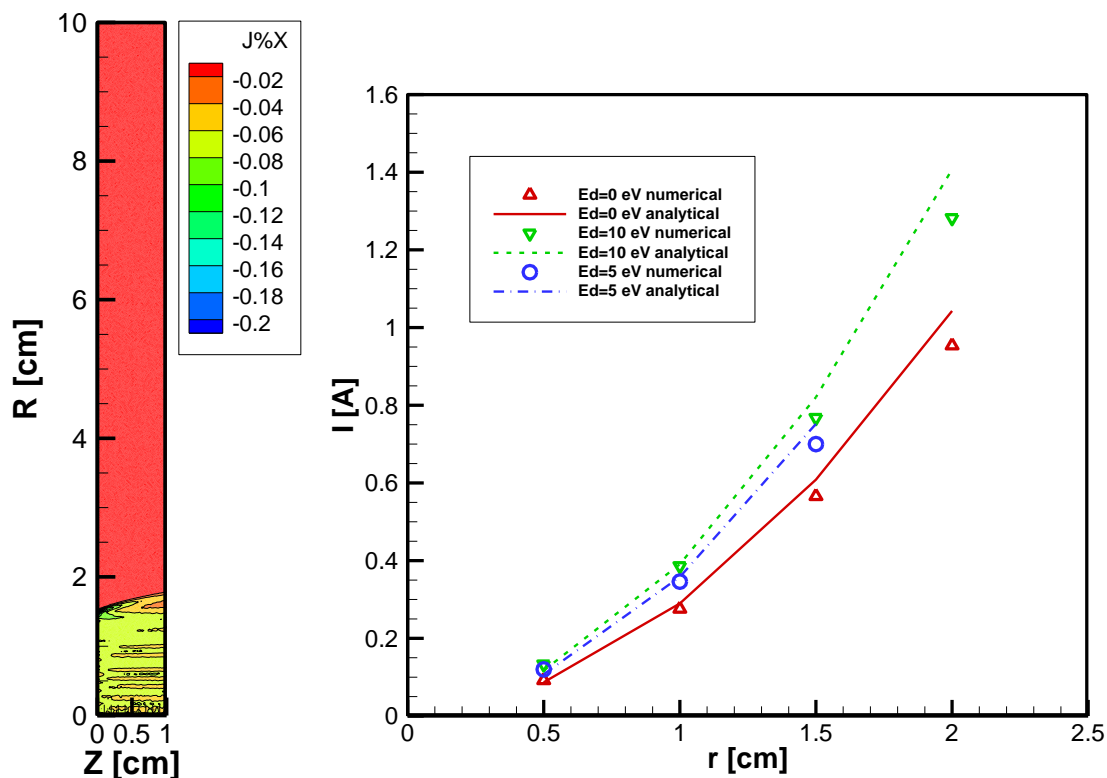
<sup>2</sup> IPMech RAS, Russia, Moscow, 119526, prosp. Vernadskogo, 101, build. 1

<sup>3</sup> MIPT, Russia, Dolgoprudny, 141700, Institutskiy per., 9  
aleks.dikalyuk@gmail.com

## Abstract

Techniques lying in the basis of axisymmetrical electrostatic particle-in-cell computer code are described in the paper. Unstructured triangular meshes are used in the developed particle-in-cell code. Multigrid technique is used for the solution of the Poisson equation. Boris method is used for the solution of equation of motion of superparticles. Some details are given for the procedures of interpolation of the electrostatic field to the position of the superparticles and calculation of charge density field created by these particles. The plane diode problem is used for the verification of the developed particle-in-cell code.

Key words: multigrid method, particle-in-cell method, plane diode problem, space charge rejime.



A typical distribution of the current density [ $A/cm^2$ ] of electrons in the interelectrode space for the plane diode problem; dependence of the space charge limited current on the emitter radius at various initial drift velocities of electrons

УДК 537.291

# Верификация метода частиц-в-ячейках на примере задачи о плоском диоде

А.С. Дикалюк<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> ФГУП ВНИИА им. Н.Л. Духова, Россия, Москва, 127473, Сущевская ул., 22

<sup>2</sup> ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского, Россия, Москва, 119526, пр. Вернадского, 101, корп. 1

<sup>3</sup> МФТИ, Россия, Долгопрудный, 141700, Институтский пер., 9

aleks.dikalyuk@gmail.com

## Аннотация

В работе изложены основные подходы, положенные в основу реализации осесимметричного электростатического варианта метода частиц-в-ячейках. Метод реализован для случая неструктурированной сетки с треугольными элементами. Для решения уравнения Пуассона используется многосеточный метод. Уравнения движения заряженных частиц решаются методом Бориса. Приведены некоторые детали реализации процедуры интерполяции величины электростатического поля к положению частицы, а так же процедуры расчета поля плотности заряда частиц. Разработанный программный код верифицирован на примере задачи о плоском диоде, работающем в режиме пространственного заряда.

Ключевые слова: многосеточный метод, метод частиц-в-ячейках, задача о плоском диоде, режим пространственного заряда

## 1. Введение

В настоящее время плазменные устройства широко распространены. Они используются в микроэлектронной промышленности, медицине, ракетнокосмической отрасли и т.д. Плазма, образующаяся внутри некоторых из этих устройств, может считаться бесстолновительной. В бесстолновительной плазме характерные пространственные масштабы протекающих в ней процессов намного меньше длины свободного пробега частиц между парными соударениями [1]. Для моделирования такой плазмы с 60х годов 20 века развивается метод частиц-в-ячейках [2–4].

В рамках метода частиц-в-ячейках электроны и ионы плазмы заменяются макрочастицами, которые, фактически, имитируют поведение большого количества (сотен тысяч) частиц плазмы того или иного сорта. Каждый расчетный шаг по времени рассматриваемого метода состоит из последовательности следующих действий:

1. Решение уравнений Максвелла;
2. Интерполяция электромагнитных полей к местоположению макрочастиц;
3. Решение уравнений Ньютона для макрочастиц;
4. Интерполяция зарядов макрочастиц в узлы расчетной сетки.

В данной работе представлена реализация осесимметричного электростатического варианта метода частиц-в-ячейках на неструктурированных треугольных сетках. Отличительной особенностью данной реализации можно считать использование многосеточного метода для решения уравнения Пуассона, что позволяет существенно ускорить расчет каждого шага по времени по сравнению с традиционными итерационными методами, описанию реализации многосеточного метода уделено особое внимание. Коротко рассмотрена реали-

зация ключевых шагов метода. Для демонстрации работоспособности разработанной реализации метода решена задача о токе насыщения в плоском диоде. Продемонстрировано хорошее соответствие между полученными результатами и данными других авторов.

## 2. Описание составных частей расчетного метода

### 2.1. Многосеточный метод решения уравнения Пуассона

В электростатическом варианте метода частиц-в-ячейках вместо полной системы уравнений Максвелла решается уравнение Пуассона. Это уравнение записывается в цилиндрической системе координат (рассматриваются осесимметричные задачи), при этом на границе расчетной области может ставиться граничное условие смешанного типа

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \right] = \frac{\rho(r, z)}{\varepsilon_0}; \quad \left( \alpha_1\varphi + \alpha_2 \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) \Big|_{\partial D} = g(r, z) \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая постоянная. Дискретизация уравнения проводится с использованием метода конечного объема, используется вариант метода, в котором расчетные величины относятся к центрам треугольников [5]. После интегрирования уравнения (1) по объему элементарной расчетной ячейки (используются только треугольники) и применения теоремы Острогардского – Гаусса, приходим к следующему соотношению:

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Delta A_j} \vec{n}_i \cdot (r \nabla \varphi) dA = \frac{r_j S_j \rho_j}{\varepsilon_0} \quad (2)$$

Здесь суммирование ведется по всем граням (индекс  $i$ ) треугольника  $j$ .  $r_j$  и  $S_j$  – радиальная координата барицентра и площадь  $j$ -го треугольника;  $\vec{n}_i$  – нормаль к грани  $i$  треугольника  $j$ . Для расчета интеграла, входящего в (1), используется аппроксимация

$$\int_{\Delta A_j} \vec{n}_i \cdot (r \nabla \varphi) dA = \vec{n}_i \cdot (r_i \nabla \varphi) \Delta A_i \quad (3)$$

Здесь  $\Delta A_i$  и  $r_i$  – длина и радиальная координата центра грани  $i$  треугольника  $j$ . Для вычисления выражения, стоящего в правой части (3), в [5] предлагается вычислять градиент относительно линии соединяющей центры соседних элементов и грани, которая является общей для этих элементов

$$\vec{n} \cdot (r_i \nabla \varphi) \Delta A_i = \frac{r_i (\vec{n} \cdot \vec{n}) \Delta A_i}{(\vec{n} \cdot \vec{e}_\xi)} \frac{\varphi_A - \varphi_j}{\Delta \xi} - \frac{r_i (\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_\eta) \Delta A_i}{(\vec{n} \cdot \vec{e}_\xi)} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \quad (4)$$

Здесь  $\vec{e}_\xi$  – направляющий вектор линии, соединяющий центры соседних треугольников;  $\vec{e}_\eta$  – направляющий вектор грани, общей для двух соседних элементов;  $\varphi_j$  – значение функции  $\varphi$  в центре рассматриваемого треугольника  $j$ ;  $\varphi_A$  – значение функции  $\varphi$  в центре соседнего треугольника. Второе слагаемое в (4) учитывает тот факт, что, вообще говоря, линия, соединяющая центры двух соседних элементов, не перпендикулярна грани, которая является общей для них. На точность метода влияние оказывает способ расчета производной  $\partial\varphi/\partial\eta$  в центре грани  $i$  треугольника  $j$ . В данной работе для этого используется метод наименьших квадратов, шаблоном для метода выступают все треугольники, содержащие хотя бы одну точку грани, в центре которой рассчитывается указанная производная [6]. Отметим, что в выражении (4) коэффициенты перед неизвестными значениями потенциала зависят только от сетки. Это означает, что их можно рассчитать только один раз на этапе перед основными вычислениями.

Комбинируя выражения (2)–(4), нетрудно видеть, что в результате для значения потенциала в данной ячейке  $A$  получаем линейное уравнение, в которое в виде неизвестных также входят значения потенциала в ячейках, соседних с данной. Если выписать аналогичные выражения для всех ячеек, то получится система линейных алгебраических уравнений с сильно разреженной матрицей (на каждой строке матрицы находится 4 ненулевых элемента). Решение этой системы можно искать, например, традиционными итерационными методами (метод Якоби, метод Гаусса – Зейделя), однако в данной работе предлагается использовать многосеточный метод. Целесообразность этого заключается в том, что в электростатическом варианте метода частиц-в-ячейках основные затраты машинного времени приходится на решение уравнения Пуассона. Поэтому, чтобы получать решение задач на разумных сетках необходимо использовать методы, которые обеспечивают более высокую скорость сходимости, чем традиционные итерационные методы.

Основоположителем многосеточного метода является Федоренко Р.П. В основе метода лежит представление о том, как эволюционирует ошибка в ходе итерационного процесса. Оказывается, что ошибка численного решения имеет компоненты, которые кратны размеру элементарной ячейки сетки. При этом традиционные итерационные численные методы приводят к быстрому затуханию коротковолновых компонент ошибки, а длинноволновые компоненты, наоборот, эволюционируют очень медленно [5]. В связи с этим общая идея многосеточного подхода состоит в том, чтобы быстро подавить коротковолновые компоненты ошибки на подробной сетке, а затем перейти к решению задачи на более грубой сетке. Результатом такого перехода станет превращение длинноволновых компонент ошибки в коротковолновые, которые смогут быть эффективно устранены существующими методами. Данный подход оказался весьма эффективным, причем не только для решения эллиптических уравнений, но и для решения уравнений газовой динамики [7–9].

Допустим, что в результате аппроксимации исходной дифференциальной задачи получена система линейных алгебраических уравнений

$$A^h \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad (5)$$

В простейшем случае схема расчета с использованием многосеточного метода состоит из следующих шагов [5, 7] (так называемый V-цикл):

- 1) Каким-либо итерационным методом ищется приближенное промежуточное решение системы (5) на подробной сетке;
- 2) Далее необходимо перенести вектор невязки с подробной сетки на грубую (так называемая операция «ограничения», в зарубежной литературе – restriction) и аппроксимировать уравнение на грубой сетке (построить соответствующую матрицу);
- 3) После получения точного решения на самой грубой сетке, его необходимо перенести на более подробную сетку, которая предшествует ей в многоуровневой иерархии. Эта операция называется операцией «продолжения» (prolongation);
- 4) После получения решения на самой подробной сетке обычно делают еще несколько итераций, чтобы убрать ошибки, которые могли быть внесены на этапах ограничения и продолжения и снова при необходимости повторяют пункты 3) и 4). Указанные шаги 1) – 4) могут быть повторены до достижения необходимой точности.

Для неструктурированных сеток можно предложить различные способы построения измельчающихся сеток. Различают следующие варианты [7]: вложенные сетки (nested-mesh subdivision), смещенные сетки (overset meshes), метод агломерации (agglomeration methods). В данной работе для реализации был выбран метод смещенных сеток. Этот метод привлекателен тем, что в отличие от метода вложенных сеток позволяет создавать сетки независимо друг от друга (узлы грубой сетки не обязаны совпадать с частью узлов подробной сетки) и в отличие от методов агломерации не приводит к усложнению метода дискретизации решаемого уравнения. Его недостатком является необходимость расчета пересечений между

элементами грубой и подробной сеток, что для произвольных треугольных элементов является относительно непростой задачей.

Как указывалось выше важными элементами многосеточного метода являются процедуры интерполяции вектора невязки с подробной сетки на грубую и вектора ошибки с грубой сетки на подробную. Для метода смещенных сеток и варианта метода конечного объема, в котором рассчитываемые величины относятся к центрам элементарных ячеек (cell-centered finite volume method), расчетные формулы для переноса информации между сетками основываются на объемном взвешивании. Предположим, что переносятся значения с сетки 1 ( $w$ ) на сетку 2 ( $W$ ) (под сеткой 1 при этом может пониматься как грубая сетка, так и подробная), тогда [7]:

$$W_2 = \sum_{\text{элементы сетки 1}} w_1 \frac{S_{12}}{S_2} \quad (6)$$

Здесь суммирование ведется по всем элементам сетки 1, которые пересекаются с рассматриваемым элементом сетки 2;  $S_{12}$  – площадь многоугольника, получающегося в результате этого пересечения;  $S_2$  – площадь рассматриваемого элемента сетки 2. Как видно из (6) данная интерполяция является консервативной.

Для использования этой формулы необходимо предварительно рассчитать величины  $S_{12}$ . Для нахождения площади пересечения двух треугольников сначала вычисляются координаты вершин многогранника, который получается в результате этого пересечения (алгоритм Сазерленда – Хогдмана). По координатам вершин многоугольника вычисляется его площадь

$$S = \frac{1}{2} \sum_s |x_1^s y_2^s - x_2^s y_1^s| \quad (7)$$

Здесь суммирование ведется по сторонам  $s$  получившегося в результате пересечения многоугольника. Нетрудно понять, что прежде чем вычислять результат пересечения треугольников, следует понять пересекаются ли они вообще. Для этого можно использовать понятие о разделяющей линии. Суть этого объекта в следующем: если существует линия, для которой интервалы проекций двух многоугольников на эту линию не пересекаются, то многоугольники так же не пересекаются.

Система линейных алгебраических уравнений, получающаяся в процессе дискретизации исходного дифференциального уравнения, на всех уровнях кроме самого грубого решается с помощью метода Якоби. На самой грубой сетке система уравнений решается с помощью метода LU-разложения. Важно учитывать, что разложение исходной матрицы на грубой сетке на произведение верхней и нижней треугольных можно сделать один раз, на этапе подготовки к вычислениям, а потом использовать их для вычисления решения на каждой итерации (это можно сделать в силу линейности решаемого дифференциального уравнения).

## 2.2. Перенос зарядов частиц в узлы расчетной сетки

После нахождения решения уравнения Пуассона на текущем шаге по времени производится интерполяция компонент вектора электрического поля ( $E_r$  и  $E_z$ ) к местоположению макрочастиц. Эта процедура описана в [1, 19] и выполняется с использованием линейных базисных функций. Базисная функция  $N_n^k(z, r)$  определяется локально для каждого  $k$ -го треугольного элемента и  $n$ -й вершины ( $n$  – номер локально пронумерованной вершины, меняется от 1 до 3), принимает значение 1 в вершине  $n$  и 0 в двух оставшихся вершинах треугольного элемента.

Затем с использованием интерполированных полей  $E_r$  и  $E_z$  решаются уравнения движения макрочастиц. Для этого используется нерелятивистский метод Бориса [1, 10, 11]. Ис-

пользование метода сопряжено со следующими сложностями: первое связано с особенностями интегрирования уравнений движения в цилиндрической системе координат, второе – с инициализацией расчета, когда координаты и скорости макрочастиц известны в один и тот же момент времени. Преодоление этих трудностей описано в [10, 11].

Перенос зарядов частиц в узлы расчетной сетки выполняется с использованием методики, описанной в [1, 12]. Для этого используются локальные базисные функции. Формула для интерполяции выглядит следующим образом:

$$q_n = \frac{1}{V_n} \sum_k \sum_j Q_j N_n^k(z, r) \quad (8)$$

Суммирование ведется по всем элементам с номерами  $k$ , окружающих  $n$ -й узел, и по всем частицам  $j$ , центры которых находятся внутри  $k$ -х элементов. Соответственно  $Q_j$  – заряд макрочастицы с номером  $j$ ;  $q_n$  – заряд в узле  $n$ ;  $V_n$  – в случае двухмерной задачи, ассоциированный с узлом  $n$  3-мерный гиперобъем

$$V_n = \sum_k \frac{S_k}{3}, \quad (9)$$

где  $S_k$  – площадь  $k$ -ого треугольного элемента, содержащий  $n$ -й узел. Далее необходимо учесть специфику цилиндрической геометрии, чтобы получить реальную плотность зарядов.

Утверждается, что данная методика реализует порядок интерполяции на неструктурированных сетках на уровне методов СИС и РС в случае структурированных сеток.

Таким образом, замыкается процедура самосогласованного расчета движения заряженных макрочастиц и расчета электростатических полей для определения параметров бесстолновительной плазмы.

### 3. Численные эксперименты

В данной части работы верифицируются многосеточный метод решения уравнения Пуассона и реализация метода частиц-в-ячейках, основанная на подходах, описанных выше.

#### 3.1. Тестирование многосеточного метода решения уравнения Пуассона

Продемонстрируем эффективность многосеточного метода на примере следующей задачи. Рассчитаем распределение потенциала между двумя плоскими круговыми пластинами, одна из которых находится под напряжением 0, а другая под напряжением 1000 В. Радиус пластин 8 см. Расчетная область, результат расчета потенциала  $\varphi$  [В] и проекции поля  $E_z$  [В/см] представлена на рис. 1.

Расчетная сетка состоит из 69706 элементов. Считается, что решение сошлось, когда норма вектора невязки меньше или равна  $10^{-7}$ . Эта задача решалась многосеточным методом и методом Якоби. Зависимость нормы вектора невязки от номера итерации для двух методов приведена на рис. 2.

Из распределения видно, что многосеточный метод в данном случае потребовал приблизительно в 3000 раз меньше итераций, чем многосеточный метод. При этом отметим, что время расчета по методу Якоби составило ~6 часов, время расчета по многосеточному методу составило ~2 минуты.

#### 3.2. Тестирование электростатического варианта метода частиц-в-ячейках

Рассмотрим задачу о плоскопараллельном диоде, работающем в режиме пространственного заряда. Рассмотрим две плоскопараллельные круглые пластины радиусом 8 см, находящихся на расстоянии 1 см друг от друга (см. рис. 1). Разность потенциалов между электродами 1000 В.

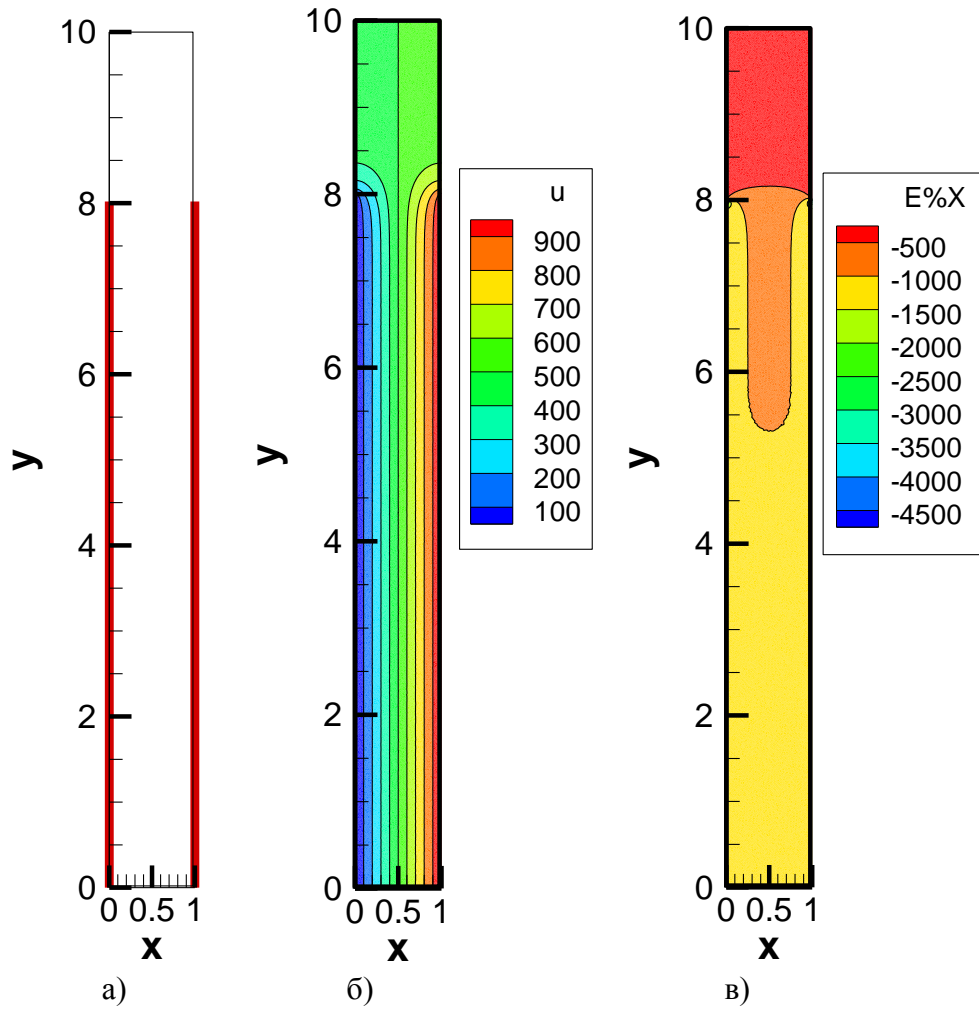


Рис. 1. а) Расчетная область, электроды отмечены красным цветом, размеры в [см]; б) Распределение потенциала  $\varphi$  [В]; в) Распределение проекции поля  $E_z$ , [В/см]

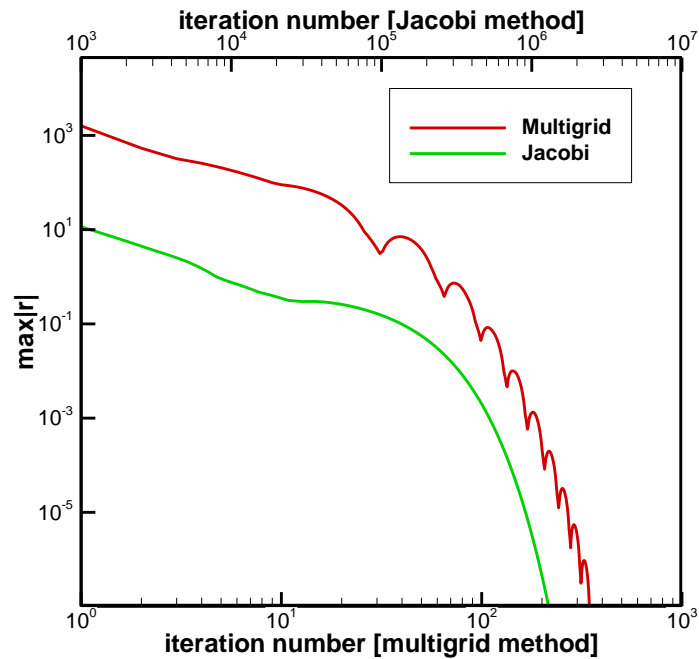


Рис. 2. Зависимость нормы вектора невязки от числа итераций для двух методов

Будем рассматривать ток электронов, эмитируемых с катода. Во внешнем электрическом поле эти электроны будут ускоряться, достигая анода. При этом оказывается (закон степени трех вторых), что такая система не способна пропускать ток больше определенного значения независимо от величины эмитируемого тока. Этот закон так же известен как закон Чайлда – Ленгмюра. Для определения величины тока в одномерном случае существует известное выражение [13] (в амперах)

$$I_{CL1D} = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{V_0^{3/2}}{d^2} S, \quad (10)$$

где  $d$  – расстояние между электродами;  $e$ ,  $m$  – заряд и масса частиц, эмитируемых с одного из электродов;  $V_0$  – разность потенциалов между электродами;  $S$  – площадь эмитирующей поверхности.

Формула (10) выведена в предположении, что частицы, эмитируемые с электрода, обладают нулевой начальной энергией. В работе [14] аналитически получена поправка, учитывающая начальную энергию эмитируемых частиц

$$I_{CL1D}(E) = I_{CL1D} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{E}{V} \right)^{1/2} + \left( \frac{E}{V} \right)^{1/2} \right]^3 \quad (11)$$

В недавнее время появились работы, в которых рассматривалась соответствующая двухмерная задача [15–17]. Численно было найдено, что в двумерном случае предельный ток через вакуумный диод больше, чем в одномерном случае. Была установлена форма зависимости. Впоследствии были получены аналитические поправки к величине одномерного тока для учета указанного эффекта [18], которые хорошо согласовывались с численными данными. Указанная поправка имеет следующий вид:

$$I_{CL2D} = I_{CL1D} \left( 1 + \frac{d}{4r} \right) \quad (12)$$

Здесь  $r$  – радиус эмитирующего пятна (в цилиндрическом случае). Схожее выражение существует для плоского случая [18].

Для выполнения тестирования разработанной программы, выполним серию расчетов по следующей методологии [17]. Расчеты выполним для различных параметров: размеров эмитирующего пятна и начальных энергий эмитируемых частиц. Будем задавать инжектируемый ток выше предельнодопустимого в несколько раз. Указанный ток можно рассчитать по формулам (10)–(12), задавшись приведенными выше параметрами. При таких условиях диод будет ограничивать проходящий через него ток до величин, осциллирующих около величины предельно допустимого тока. Чтобы подавить эти осцилляции, можно эмитировать частицы с некоторой начальной тепловой энергией. Установившийся в расчетах ток можно сравнить с данными, полученными по формулам (10)–(12). Начальные данные для численного моделирования приведем в табл. 1.

Таблица 1

**Исходные данные для численных экспериментов**

Тип частиц	электроны
Напряжение на электродах	1000 В
Расстояние между электродами	1 см
Радиус эмитирующего пятна	0.5, 1, 1.5, 2 см
Начальная дрейфовая энергия частиц	0, 5, 10 эВ
Начальная тепловая энергия частиц	0.25 эВ



Приведем на рис. 3 характерные пространственное распределение плотности тока и зависимость тока от времени на катоде и аноде для случая начальной дрейфовой энергии электронов  $E_d = 0$  эВ и размера эмитирующего пятна  $R = 1.5$  см. Видно, что при движении изначально равномерный поток электронов расширяется при приближении к аноду. При этом токи на электродах испытывают осцилляции, которые затухают во времени, приближаясь к предельно допустимой для данных параметров величине тока.

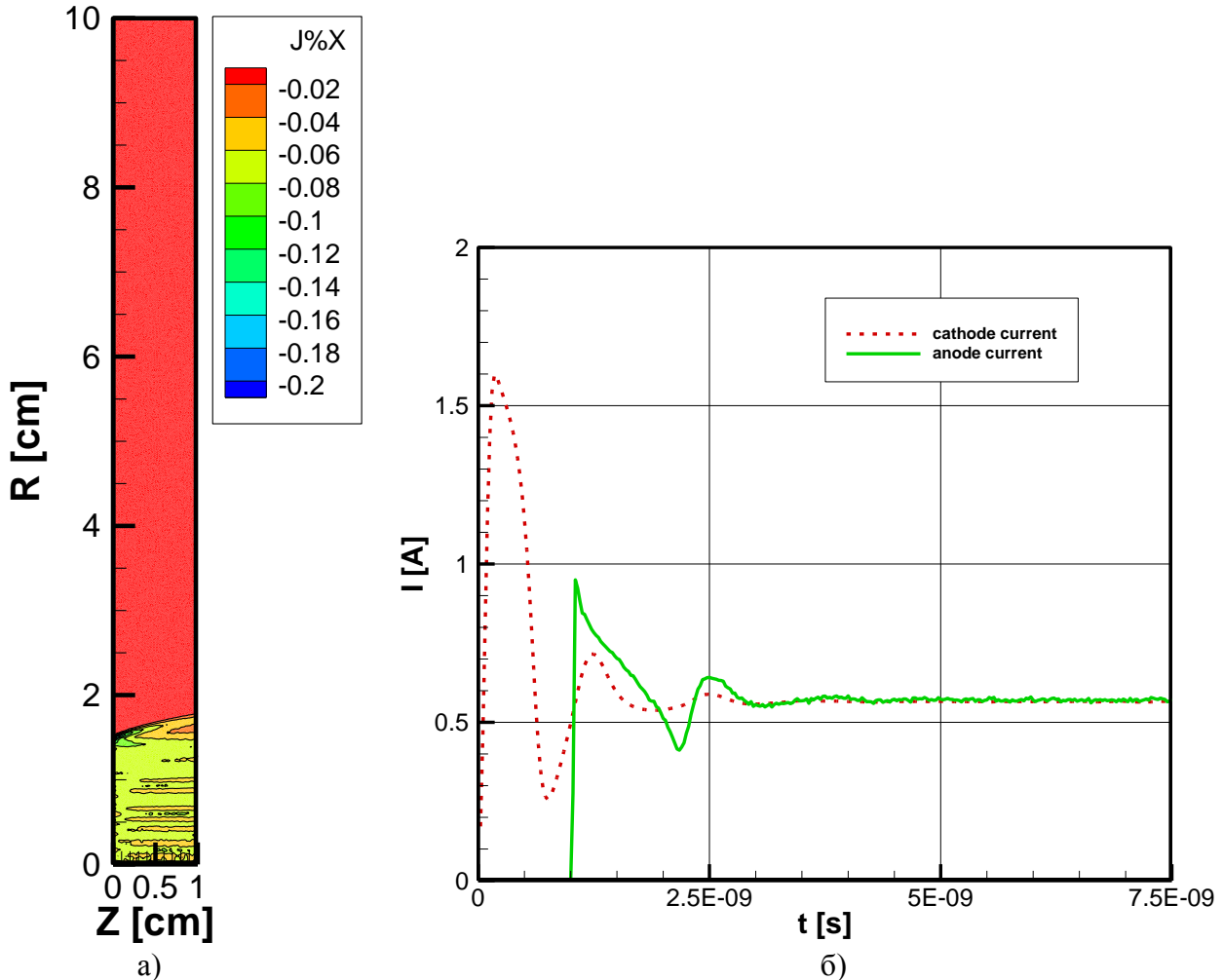


Рис. 3. а) Распределение плотности тока электронов в  $[A/cm^2]$ ; б) Эволюция тока  $[A]$  на аноде (сплошная кривая) и катоде (штриховая кривая)

На рис. 4 приведем распределение плотности тока вдоль поверхности катода. Появление характерного максимума [17] на границе эмитирующего пятна является важным качественным атрибутом решаемой двумерной задачи, который так же говорит об адекватности разработанной методики и компьютерной программы, ее реализующей.

На рис. 5 приведем результаты систематического численного моделирования. Видно, что разница между токами, рассчитанными по формулам (10)–(12) и полученными из численного моделирования составляет  $\sim 10\%$ . При этом отметим, что численная модель верно описывает тенденции изменения результирующего значения предельного тока в зависимости от размера эмитирующего пятна и начальной энергии частиц.

#### 4. Заключение

В данной работе дано подробное описание многосеточного метода решения уравнения Пуассона, а так же остальных составляющих метода частиц-в-ячейках. Продемонстрирована эффективность представленного многосеточного метода. Метод частиц-в-ячейках вери-

фицирован на примере задачи о плоском диоде, работающем в режиме пространственного заряда. Продемонстрировано хорошее согласие полученных в работе расчетных данных с известными аналитическими моделями.

С некоторыми доработками разработанный метод может быть использован для моделирования процессов в разряде Пеннинга, описание которого имеется в работах [20–23].

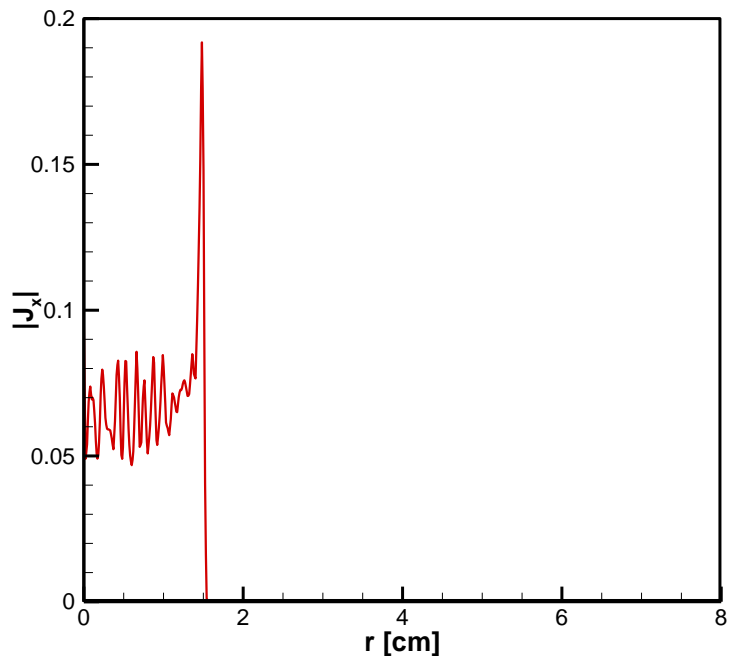


Рис. 4. Распределение модуля плотности тока вдоль поверхности катода

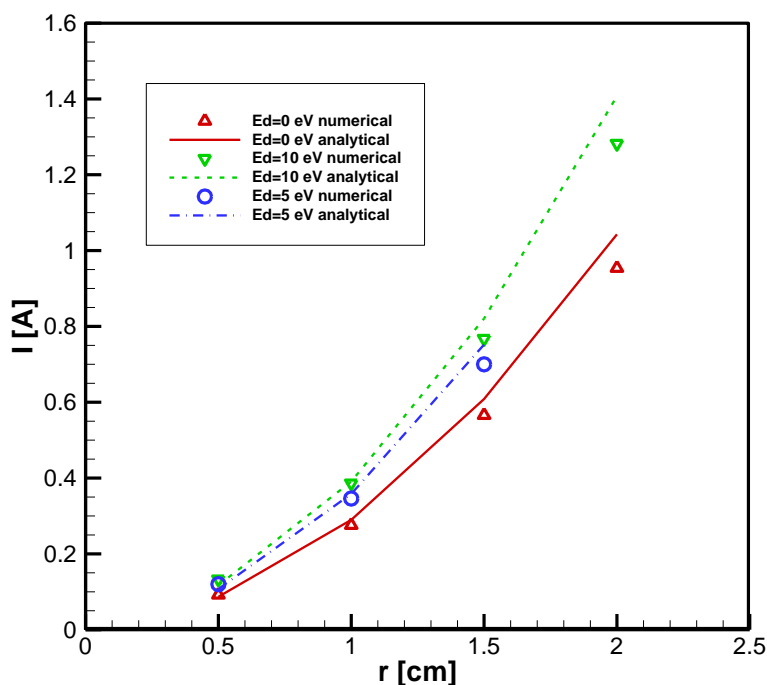


Рис. 5. Зависимость предельного тока от радиуса эмитирующего пятна при различных начальных энергиях дрейфового движения заряженных частиц

## Благодарности и ссылки на гранты

Автор благодарит Суржикова С.Т., а так же весь коллектив лаборатории радиационной газовой динамики за обсуждение данной работы и ценные замечания. Автор выражает благодарность Куратову С.Е.

## Литература

1. Григорьев Ю.Н., Вшивков В.А., Федорук М.П. Численное моделирование методами частиц в ячейках. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2004. 360 с.
2. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1989. 452 с.
3. Березин Ю.А., Вшивков В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука, 1980.
4. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 640 с.
5. Versteeg Н.К., Malalasekera W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics, 2<sup>nd</sup> ed. – Harlow: Pearson Education Limited, 2007.
6. Котов Д.В. Вычислительные модели физико-химической кинетики при гиперзвуковом обтекании реальных тел // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2010 г.
7. Mavriplis D.J. Multigrid Techniques for Unstructured Meshes // NASA-CR-195070, ICASE report No. 95-27433.
8. Tai С.Н. and Zhao Y. A finite volume unstructured multigrid method for efficient computation of unsteady incompressible viscous flows // Int. J. Numer. Meth. Fluids. Vol. 46. 2004. Pp. 59–84.
9. Uygun M. and Kirkkopru K. Numerical solution of 2D Euler equations with multigrid // Journal of Aeronautics and Space Technologies. Vol. 3. No. 1. 2007. Pp. 1–9.
10. Березин Ю.А., Вшивков В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука, 1980.
11. Delzanno G.L., Camporeale E. On particle movers in cylindrical geometry for Particle-In-Cell simulations // Journal Comput. Phys. Vol. 253. 2013. Pp. 259–277.
12. Spirkin A.M. A three-dimensional particle-in-cell methodology on unstructured Voronoi grids with applications to plasma microdevices // PhD Thesis in Mech. Eng. Worcester Polytechnic Institute, 2006.
13. Reiser M. Theory and Design of Charged Particle Beams. – Weinheim: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co.KGaA, 2008. – 677 p.
14. Jaffe G. On the Currents Carried by Electrons of Uniform Velocity // Phys. Rev. Vol. 65. No. 3, 4. 1944. Pp. 91–98.
15. Luginsland J.W., Lay Y.Y., Gilgenbach R.M. Two-Dimensional Child-Lengmuir Law // Phys. Rev. Lett. Vol. 77. No. 2. 1996. Pp. 4668–4670.
16. Li Y., Wang H., Liu C., Sun J. Two-dimensional Child-Lengmuir law of planar diode with finite-radius emitter // Applied Surface Science. Vol. 251. 2005. Pp. 19–23.
17. Ragan-Kelley B. Explorations of Space-Charge Limits in Parallel-Plate Diodes and Associated Techniques for Automation // Ph.D. Thesis, Applied Science & Technology, UC Berkeley, 2013.
18. Lau Y.Y. Simple Theory of the Two-Dimensional Child-Lengmuir Law // Phys.Rev.Lett. Vol. 87. No. 27. 2001. Pp. 278301-1–278301-3.
19. Дикалюк А.С. Верификация компьютерной модели для расчета ускорителей заряженных частиц // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2014. Том 15, вып. 5. 8с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-5/articles/254/>
20. Сторожев Д.А., Суржиков С.Т., Куратов С.Е. Анализ кинетических процессов в тлеющем разряде в молекулярном водороде // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2014. Том 15, вып. 6. 21с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-6/articles/267/>
21. Суржиков С.Т., Куратов С.Е. Модифицированная диффузионно-дрейфовая модель разряда Пеннинга // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2014. Том 15, вып. 6. 25с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-6/articles/257/>

22. Суржиков С.Т., Куратов С.Е. Диффузионно-дрейфовая модель Пеннинговского разряда при давлениях порядка 1 Торр // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2014. Том 15, вып. 5. 24с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-5/articles/252/>
23. Сторожев Д.А. Численное моделирование кинетики ионизации и диссоциации водорода в плазме разряда Пеннинга в приближении ЛТР // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2014. Том 15, вып. 3. 6с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-3/articles/229/>

Статья поступила в редакцию 20 ноября 2015 г.