

УДК 533.6.01+519.6

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ СОВРЕМЕННЫХ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПАДЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА В РАМКАХ МЕТОДА РАСЩЕПЛЕНИЯ ПО ФИЗИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ ДЛЯ РАСЧЕТА ГИПЕРЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Железнякова А.Л.

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,
Москва, 119526, проспект Вернадского 101-1
a.zheleznyakova@mail.ru*

Аннотация

Проведено исследование современных методов решения автомодельной задачи о распаде разрыва с целью совершенствования трехмерных компьютерных моделей гиперзвуковой аэротермодинамики интегральных компоновок перспективных летательных аппаратов произвольной геометрии, создаваемых в ИПМех РАН, повышения вычислительной эффективности компьютерных кодов и увеличения порядка точности расчетных схем. Для сквозного счета пространственного гиперзвукового течения, характеризующегося наличием сложной системы сильных, взаимодействующих между собой ударных волн, без предварительного выделения поверхностей разрывов, применяется модифицированный метод расщепления по физическим процессам. Для повышения порядка точности рассматриваемой численной схемы расщепления с сохранением ее устойчивости, применялись: схемы расщепления вектора потока Стегера – Уорминга, ван Лира, Лио и Стефана (метод AUSM); методы типа Годунова с приближенным решением задачи Римана по схемам Хартена – Лакса – ван Лира (HLL и HLLC), Русанова, Роу, Ошера. Реализованные алгоритмы приближенного решения задачи о распаде произвольного разрыва апробированы на ряде тестовых задач. Проведено сравнение полученных результатов с точным решением задачи Римана по классической схеме Годунова.

Ключевые слова: распад газодинамического разрыва, пространственные неструктурированные сетки, математическое моделирование, вычислительная аэродинамика.

AN EFFICIENCY ANALYSIS OF MODERN NUMERICAL SCHEMES FOR SOLVING THE PROBLEM OF THE DECAY OF AN ARBITRARY DISCONTINUITY WITHIN THE FRAMEWORK OF THE METHOD OF SPLITTING BY PHYSICAL PROCESSES FOR THE COMPUTATIONS OF HYPERSONIC FLOWS

Zheleznyakova A.L.

*Ishlinskyi Institute for Problems in Mechanics Russian Academy of Sciences (IPMech RAS),
Russia, Moscow, 119526*

For the purposes of improving overall quality of the three-dimensional computer models developed in Institute for Problems in Mechanics Russian Academy of Sciences (IPMech RAS), the modern numerical schemes for solving the problem of the decay of an arbitrary discontinuity are studied. The hypersonic flows are calculated by method of splitting by physical processes using the unsteady shock-capturing scheme without preliminary distinguishing of the discontinuity surfaces.

Several high resolution schemes are considered to increase the accuracy of the numerical scheme under consideration: Steger and Warming, van Leer, Liou and Steffen (AUSM) flux splitting schemes, the approximate HLL, HLLC, Rusanov, Roe and Osher Riemann solvers. Some Riemann problems are considered to test the capabilities of the realized Riemann solvers within the framework of the method of splitting by physical processes. The computed results

using the approximate Riemann solvers are compared with the exact solution by original Godunov method.

Keywords: unstructured grids, mathematical modeling, computational fluid dynamics.

1. Введение

Для решения задач совершенствования трехмерных компьютерных моделей гиперзвуковой аэротермодинамики интегральных компоновок перспективных летательных аппаратов произвольной геометрии, создаваемых в ИПМех РАН [1–3], повышения вычислительной эффективности компьютерных кодов и увеличения порядка точности расчетных схем, проведено исследование современных методов решения автомодельной задачи о распаде разрыва. Для сквозного счета пространственного гиперзвукового течения, характеризующегося наличием сложной системы сильных, взаимодействующих между собой ударных волн, без предварительного выделения поверхностей разрывов, применяется модифицированный метод расщепления по физическим процессам. Рассматриваемая схема имеет большой запас устойчивости и позволяет получить общие характеристики гиперзвукового потока и картину течения в целом. Устойчивость обеспечивается наличием значительной аппроксимационной вязкости, которая приводит к сильной диффузии ударных волн. Повышение порядка точности в рамках данного подхода без потери устойчивости возможно при использовании интерполяции вверх по потоку.

При применении противопоточных схем, дискретизация уравнений газовой динамики на расчетной сетке проводится в соответствии с учетом направления распространения малых возмущений, что позволяет учесть физические свойства течения. Группа противопоточных схем объединяет в себе методы расщепления разности вектора потока (методы типа Годунова) и методы расщепления вектора потока (например, схемы Стегера – Уорминга, ван Лиры, Лио и Стефана). Указанные методы используют точное или приближенное решение задачи о распаде произвольного разрыва для определения потоков и параметров течения на границах расчетных элементов [4].

Для повышения порядка точности численной схемы с сохранением ее устойчивости, в рамках метода расщепления по физическим процессам применялись: схемы расщепления вектора потока Стегера – Уорминга [5], ван Лиры [6, 7], Лио и Стефана (метод AUSM) [8, 9]; методы типа Годунова с приближенным решением задачи Римана по схемам Хартена – Лакса – ван Лиры (HLL [10] и HLLC [11,12]), Русанова [13], Роу [14], Ошера [15–17].

Особенностью реализации указанных численных схем на неструктурированных расчетных сетках является то, что предложенный метод интегрирования полной системы трехмерных нестационарных уравнений газовой динамики основан на решении одномерной задачи Римана в направлении внешней нормали к грани. Касательные скорости переносятся непосредственно на грань со стороны, откуда течет поток.

Реализованные алгоритмы приближенного решения задачи о распаде произвольного разрыва апробированы на ряде тестовых задач. Проведено сравнение полученных результатов с точным решением задачи Римана по классической схеме Годунова [18, 19].

2. Постановка задачи трехмерного течения сжимаемого газа и краткое описание метода расщепления по физическим процессам

Рассматривается трехмерная задача течения совершенного вязкого сжимаемого газа. Для столбца консервативных переменных $\mathbf{w} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T$ система уравнений Навье – Стокса может быть записана в векторном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^x(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^y(\mathbf{w})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}^z(\mathbf{w})}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{G}^x(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^y(\mathbf{w})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}^z(\mathbf{w})}{\partial z}, \quad (1)$$

где $\mathbf{F}^x = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uw, \rho uw, \rho uE + pu)^T$; $\mathbf{F}^y = (\rho v, \rho vw, \rho v^2 + p, \rho vw, \rho vE + pv)^T$;
 $\mathbf{F}^z = (\rho w, \rho iw, \rho iw, \rho w^2 + p, \rho wE + pw)^T$ – проекции вектора конвективного потока;
 $\mathbf{G}^x = (0, \tau_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, u\tau_{xx} + v\tau_{yx} + w\tau_{zx} - q_x)^T$; $\mathbf{G}^y = (0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{zy}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{zy} - q_y)^T$;
 $\mathbf{G}^z = (0, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z)^T$ – проекции вектора вязкого потока;

ρ – плотность; p – давление; u, v, w – компоненты вектора скорости; E – удельная полная энергия газа; q_x, q_y, q_z – компоненты вектора теплового потока; $\tau_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора вязких напряжений ($\alpha = x, y, z$; $\beta = x, y, z$), которые записываются в виде:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \tau_{yy} &= \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \tau_{zz} &= \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right), & \tau_{yx} = \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где μ – коэффициент вязкости.

Для описания модели совершенного сжимаемого невязкого газа вектор вязкого потока полагался равным нулю. Таким образом, при $\mathbf{G} = 0$, система (1) переходит в систему уравнений Эйлера.

Полная система уравнений Навье–Стокса используется совместно с уравнением состояния совершенного газа:

$$p = (\gamma - 1) \rho U = (\gamma - 1) \rho [E - 0.5(u^2 + v^2 + w^2)] \quad (3)$$

Здесь $\gamma = c_p / c_v$; c_p, c_v – удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме соответственно; $U = c_v T$, E – удельные внутренняя и полная энергии газа, T – температура. В данной работе температурная зависимость термодинамических величин не учитывалась.

Для решения трехмерных уравнений газовой динамики на тетраэдральных расчетных сетках применялся подход, основанный на расщеплении по физическим процессам.

Основная идея метода состоит в расщеплении по физическим процессам исходной нестационарной системы уравнений Навье–Стокса (1). Стационарное решение задачи, если оно существует, получается в результате установления. Расчет каждого временного шага разбивается на несколько этапов. На первом этапе определяются промежуточные значения параметров потока без учета эффектов переноса. На втором этапе вычисляются эффекты переноса, учитывающие обмен между элементами – рассчитываются потоки массы через границы расчетных ячеек. На третьем этапе определяются в новый момент времени окончательные значения газодинамических параметров потока на основе законов сохранения массы, импульса и энергии для каждого элемента и всей системы в целом.

Для аппроксимации уравнений на каждом этапе применяются элементы метода конечных объемов. В рамках данного подхода определяются усредненные значения производных по контрольному объему (тетраэдральному элементу).

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right\rangle_{V_i} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dV = \frac{1}{V_i} \int_{S_i} f \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} \approx \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^4 S_i^j n_{i,j}^\alpha f_i^j,$$

$$f = (u, v, w, p, q_\alpha, \tau_{\alpha\beta}); \quad i = 1 \dots N; \quad j = 1 \dots 4; \quad \alpha = x, y, z; \quad \beta = x, y, z. \quad (4)$$

Здесь V_i – объем i -го тетраэдра; S_i^j – площадь поверхности j -й грани i -го элемента; $n_{i,j}^\alpha$ – x , y или z -я составляющая единичной нормали j -й грани i -го элемента.

Реализация изложенного выше метода расщепления по физическим процессам подразумевает решение большого количества однотипных подзадач по вычислению потоков через грани контрольных объемов. Для нахождения потоков на границах расчетных ячеек используется приближенное решение задачи о распаде произвольного разрыва. При этом особенностью реализации указанных численных алгоритмов на неструктурированных расчетных сетках является то, что для каждой грани достаточно находить решение одномерной задачи Римана. Пространственные уравнения газовой динамики записываются в системе координат рассматриваемой грани, которая задается внешней нормалью и двумя взаимно перпендикулярными векторами, лежащими в плоскости грани. Решение одномерной задачи распада произвольного разрыва проводится в направлении внешней нормали с использованием нормальной к данной грани скорости. Касательные составляющие скорости просто переносятся на грань с той или другой стороны, в зависимости от направления потока.

В рамках данного подхода реализованы численные схемы расщепления вектора потока Стегера – Уорминга [5], ван Лиры [6,7], Лио и Стефана (метод AUSM) [8,9]; методы типа Годунова с приближенным решением задачи Римана по схемам Хартена – Лакса – ван Лиры (HLL [10] и HLLC [11,12]), Русанова [13], Роу [14], Ошера [15–17].

3. Точное решение задачи Римана по классической схеме Годунова

Метод Годунова [18, 19] использует консервативные численные схемы и основан на аппроксимации потоков на границах ячеек разностной сетки с помощью решения задачи Римана распада газодинамического разрыва с любой наперед заданной точностью.

Разработанный подход к интегрированию трехмерных нестационарных уравнений газовой динамики [1–3] использует решение одномерной задачи Римана с входными данными, соответствующими параметрам газа в смежных элементах. Задача о распаде разрыва с начальными условиями (рис. 1) в рамках рассматриваемого подхода, в системе координат связанной с гранью формулируется в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\partial n} = 0; \quad \mathbf{w} = (\rho, \rho V, \rho E)^T, \quad \mathbf{F} = (\rho V, \rho V^2 + p, \rho V E + p V)^T, \quad (5)$$

$$\mathbf{w}(n, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_{L(I)}, & n < 0; \\ \mathbf{w}_{R(II)}, & n > 0. \end{cases} \quad (6)$$

В соотношениях (5),(6) \mathbf{w} – столбец консервативных переменных; \mathbf{F} – вектор конвективного потока в системе координат связанной с гранью; n – координата вдоль внешней нормали; здесь и далее $V = (un^x + vn^y + wn^z)$ – нормальная к грани составляющая вектора скорости.

Начальный разрыв, который характеризуется различными состояниями в левом и правом полупространстве (рис. 1) распадается на три волны: на левую волну, контактный разрыв и правую волну. Средняя волна – всегда контактный разрыв. Правая и левая волны могут быть как ударной волной, так и волной разрежения. На рис. 1 представлено четыре возможных типа волновых конфигураций. Волны делят пространство параметров на четыре области: I – область параметров “левой” ячейки сетки, II – область параметров “правой” ячейки, III – область между левой волной и контактным разрывом, IV – область между контактным разрывом и правой волной. Вследствие произвольной ориентации внешней нормали к границе элемента неструктурированной сетки, ячейкой “слева” будем считать текущую ячейку i , а ячейкой “справа” – соседний через данную грань расчетный элемент i_{neighb} . Свойством рассматриваемой системы уравнений газовой динамики является, то, что при переходе

через контактный разрыв для давления и скорости выполняются соотношения: $p_{III} = p_{IV}$, $V_{III} = V_{IV}$. Плотность принимает значения ρ_{III} и ρ_{IV} по разные стороны разрыва.

В рассмотренной выше постановке, задача (5) совместно с уравнением состояния для совершенного газа сводится к вычислению значений давления $p_{III} = p_{IV}$ и скорости $V_{III} = V_{IV}$ на контактом разрыве. Метод использует как консервативные \mathbf{w} , так и “простые” переменные $\mathbf{U} = (\rho, V, p)^T$.

Для каждой из возможных конфигураций (рис. 1) решается своя система нелинейных уравнений, подробный вывод которых приведен, например, в [4].

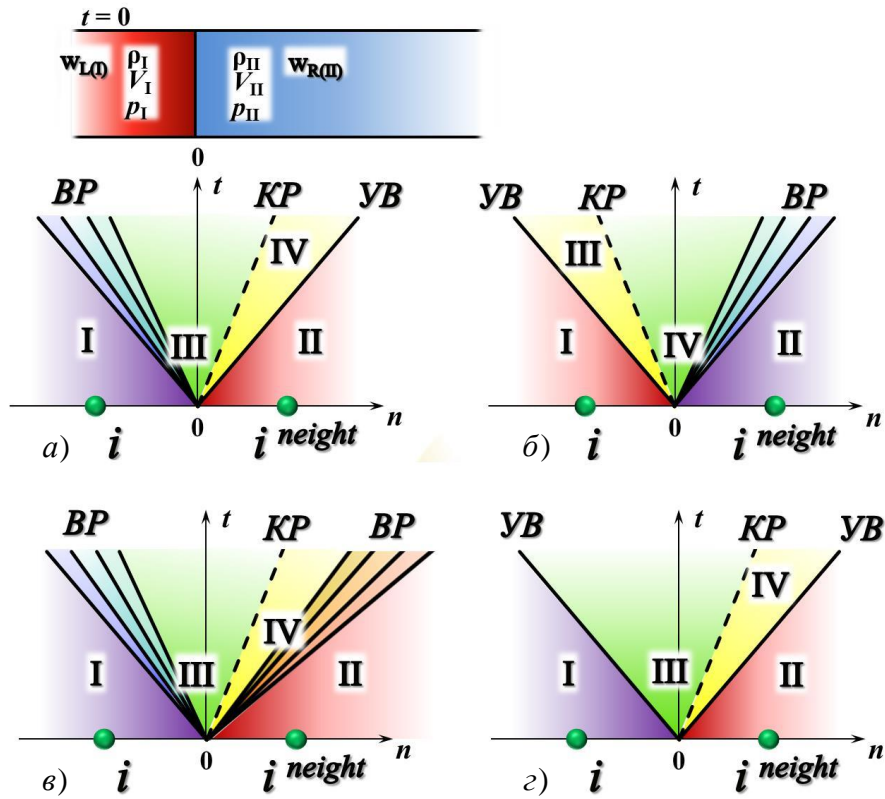


Рис. 1. Постановка одномерной задачи Римана и набор возможных решений: а) левая волна разрежения, контактный разрыв, правая ударная волна; б) левая ударная волна, контактный разрыв, правая волна разрежения; в) левая волна разрежения, контактный разрыв, правая волна разрежения; г) левая ударная волна, контактный разрыв, правая ударная волна

Далее рассмотрим один из возможных вариантов решения в виде левой волны разрежения, контактного разрыва и правой ударной волны (рис. 2). В данной поставке задачу Римана можно считать некоторым обобщением задачи об ударной трубе, решение которой имеет такую же структуру. Различие в том, что в задаче распада произвольного разрыва начальные скорости слева и справа в общем случае отличны от нуля.

В случае, представленном на рис. 2 давление на контактом разрыве для задачи Римана определяется итерационным методом как корень алгебраического уравнения:

$$f(p, \mathbf{w}_I, \mathbf{w}_{II}) \equiv f_I(p, \mathbf{w}_I) + f_{II}(p, \mathbf{w}_{II}) + \Delta V = 0, \quad \Delta V = V_{II} - V_I, \tag{7}$$

где функции f_I и f_{II} определяются как

$$f_I(p_{III}, w_I) = \frac{2c_I}{(\gamma-1)} \left[\left(\frac{p_{III}}{p_I} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] \text{ для } p_{III} \leq p_I \text{ (левая волна разрежения),} \quad (8)$$

$$f_{II}(p_{IV}, w_{II}) = (p_{IV} - p_{II}) \sqrt{\frac{A_{II}}{p_{IV} + B_{II}}} \text{ для } p_{IV} > p_{II} \text{ (правая ударная волна).} \quad (9)$$

В зависимости (8) c_I – скорость звука в области I.

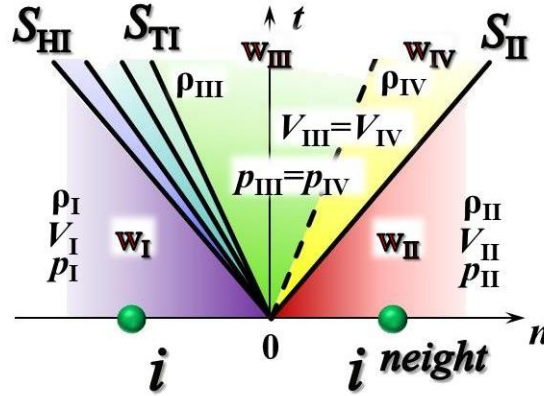


Рис. 2. Частное решение задачи Римана в виде левой волны разрежения, контактного разрыва и правой ударной волны

Константы в выражениях (8), (9) вычисляются следующим образом:

$$A_I = \frac{2}{(\gamma-1)\rho_I}, \quad B_I = \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)} p_I, \quad A_{II} = \frac{2}{(\gamma-1)\rho_{II}}, \quad B_{II} = \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)} p_{II}. \quad (10)$$

Для скоростей справедливы следующие соотношения:

$$V_{III} = V_{II} - f_I(p_{III}, w_I), \quad V_{IV} = V_{II} + f_{II}(p_{IV}, w_{II}). \quad (11)$$

На завершающем этапе находят ρ_{III} и ρ_{IV} . В случае ударной волны справа:

$$\rho_{IV} = \rho_{II} \left[\frac{\left(\frac{p_{IV}}{p_{II}} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)}{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{p_{IV}}{p_{II}} + 1 \right)} \right] \quad (12)$$

Скорость распространения правой ударной волны S_{II} (рис. 2):

$$S_{II} = V_{II} + c_{II} \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p_{IV}}{p_{II}} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Скорость распространения “головы” S_{III} и “хвоста” S_{TI} левой волны разрежения:

$$S_{III} = V_I - c_I, \quad S_{TI} = V_{III} - c_{III}. \quad (14)$$

Значения параметров для веера волн разрежения, расположенного слева определяется из следующих соотношений:

$$\mathbf{U}_{\text{fan}} = \begin{cases} \rho = \rho_1 \left[\frac{2}{(\gamma+1)} + \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)c_1} \left(V_1 - \frac{n}{t} \right) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}; \\ V = \frac{2}{(\gamma+1)} \left[c_1 + \frac{(\gamma-1)}{2} c_1 + \frac{n}{t} \right]; \\ p = p_1 \left[\frac{2}{(\gamma+1)} + \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)c_1} \left(V_1 - \frac{n}{t} \right) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \end{cases}, \quad (15)$$

Здесь и далее $\mathbf{U} = (\rho, V, p)^T$ – столбец “простых” переменных

Зависимости аналогичные (8)–(15) используются для описания остальных возможных конфигураций (рис. 1).

Реализация изложенного подхода требует решения нелинейных алгебраических уравнений для каждой грани расчетной сетки трудоемким методом итераций, что сопряжено с большими вычислительными затратами. В связи с этим получили широкое распространение методы приближенного решения задачи Римана, такие как методы Хартена–Лакса–ван Лира (HLL [10] и HLLC [11, 12]), Русанова [13], Роу [14], Ошера [15–17].

4. Приближенное решение задачи Римана двухволновым методом HLL

Во всех методах типа Годунова поток через границы расчетных ячеек вычисляется из решения задачи о распаде разрыва. Для расчета потоков Хартен, Лакс и ван–Лир [10] предложили новую методику приближенного решения задачи Римана, которая известна как HLL. Главная идея метода состоит в рассмотрении упрощенной конфигурации решения задачи Римана в виде левой и правой ударных волн, разделяющих пространство параметров на три области, без рассмотрения контактного разрыва. Скорости движения этих волн определяются по максимальным наклонам характеристик в соседних ячейках расчетной сетки. При этом волна разрежения также заменяется скачком, но со скоростью распространения соответствующей максимальному наклону характеристик в этой волне разрежения.

Для задачи Римана в постановке (5), (6) решение ищется в виде:

$$\hat{\mathbf{w}} = \begin{cases} \mathbf{w}_I & \text{при } n/t \leq S_I; \\ \mathbf{w}_{\text{HLL}} & \text{при } S_I \leq n/t \leq S_{II}; \\ \mathbf{w}_{II} & \text{при } n/t \geq S_{II}. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь S_I, S_{II} – скорости распространения ударных волн. Структура решения представлена на рис. 3.

Поток метода HLL определяется из соотношения:

$$\mathbf{F}_{\text{HLL}} = \begin{cases} \mathbf{F}_I & \text{при } 0 \leq S_I; \\ \frac{S_{II}\mathbf{F}_I - S_I\mathbf{F}_{II} + S_I S_{II} (\mathbf{w}_{II} - \mathbf{w}_I)}{S_{II} - S_I} & \text{при } S_I \leq 0 \leq S_{II}; \\ \mathbf{F}_{II} & \text{при } 0 \geq S_{II}. \end{cases} \quad (17)$$

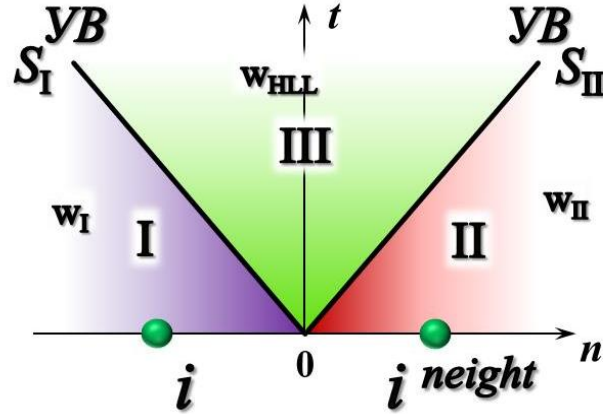


Рис. 3. Решение задачи Римана по методу HLL

Для оценки скорости распространения ударных волн S_I, S_{II} могут использоваться различные подходы, основанные на свойствах точного решения задачи Римана [4]. К числу прямых методов вычисления относятся простые оценки скорости распространения ударных волн, исходящие из минимальной и максимальной скорости распространения возмущений:

$$S_I = V_I - c_I, \quad S_{II} = V_{II} + c_{II}. \quad (18)$$

$$S_I = \min \{V_I - c_I, V_{II} - c_{II}\}, \quad S_{II} = \max \{V_I + c_I, V_{II} + c_{II}\}. \quad (19)$$

$$S_I = \bar{V} - \bar{c}, \quad S_{II} = \bar{V} + \bar{c};$$

$$\bar{V} = \frac{\sqrt{\rho_I} V_I + \sqrt{\rho_{II}} V_{II}}{\sqrt{\rho_I} + \sqrt{\rho_{II}}}, \quad \bar{c} = \left[(\gamma - 1) \left(\bar{H} - \frac{1}{2} \bar{V}^2 \right) \right]^{1/2}, \quad \bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_I} H_I + \sqrt{\rho_{II}} H_{II}}{\sqrt{\rho_I} + \sqrt{\rho_{II}}}. \quad (20)$$

В соотношениях (20) $H = E + p/\rho$ – энтальпия.

В [11] предложены косвенные оценки скорости распространения ударных волн, строящиеся на основе давления p_{III} в промежуточной области III:

$$S_I = V_I - c_I q_{I,II}, \quad S_{II} = V_{II} + c_{II} q_{I,II};$$

$$q_{I,II} = \begin{cases} 1 & \text{для } p_{III} \leq p_{I,II}; \\ \left[1 + \frac{\lambda + 1}{2\lambda} \left(\frac{p_{III}}{p_{I,II}} - 1 \right) \right]^{1/2} & \text{для } p_{III} > p_{I,II}. \end{cases} \quad (21)$$

Давление p_{III} может быть вычислено следующим образом [4]:

$$p_{III} = 0.5(p_I + p_{II}) - 0.5(V_I - V_{II}) \bar{\rho} \bar{c};$$

$$\bar{\rho} = 0.5(\rho_I + \rho_{II}), \quad \bar{c} = 0.5(c_I + c_{II}). \quad (22)$$

5. Определение потока из решения задачи распада разрыва по схеме HLLC

Метод HLLC (C-contact) является развитием подхода HLL и учитывает контактный разрыв в структуре решения задачи Римана. В данной схеме двухволновая конфигурация ударных волн S_I и S_{II} дополняется промежуточной ударной волной со скоростью распространения S_{HLLC} (рис. 4)

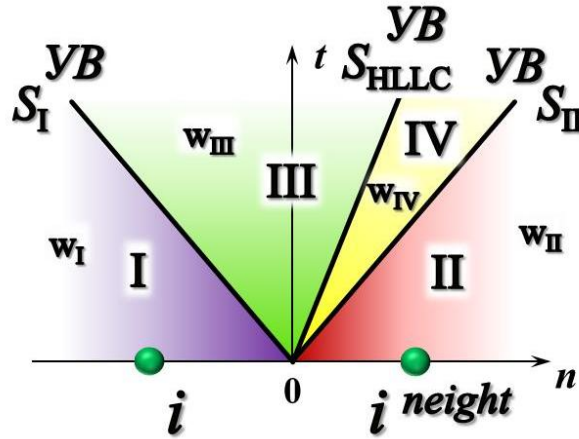


Рис.4. Решение задачи Римана по схеме HLLC

Приближенное решение задачи Римана по методу HLLC (рис. 4) имеет вид:

$$\mathbf{w}(n,t) = \begin{cases} \mathbf{w}_I & \text{при } n/t \leq S_I; \\ \mathbf{w}_{III} & \text{при } S_I \leq n/t \leq S_{HLLC}; \\ \mathbf{w}_{IV} & \text{при } S_{HLLC} \leq n/t \leq S_{II}; \\ \mathbf{w}_{II} & \text{при } n/t \geq S_{II}. \end{cases} \quad (23)$$

Значения соответствующих параметров области решений $\mathbf{w}_{III,IV}$ и поток HLLC-подхода F_{HLLC} определяются из соотношений

$$F_{HLLC} = \begin{cases} F_I & \text{при } 0 \leq S_I; \\ F_{III} = F_I + S_I(\mathbf{w}_{III} - \mathbf{w}_I) & \text{при } S_I \leq 0 \leq S_{HLLC}; \\ F_{IV} = F_{II} + S_{II}(\mathbf{w}_{IV} - \mathbf{w}_{II}) & \text{при } S_{HLLC} \leq 0 \leq S_{II}; \\ F_{II} & \text{при } 0 \geq S_{II}. \end{cases} \quad (24)$$

$$\mathbf{w}_{III,IV} = \rho_{I,II} \left(\frac{S_{I,II} - V_{I,II}}{S_{I,II} - S_{HLLC}} \right) \left[\begin{matrix} 1 \\ S_{HLLC} \\ \frac{E_{I,II}}{\rho_{I,II}} + (S_{HLLC} - V_{I,II}) \left(S_{HLLC} + \frac{p_{I,II}}{\rho_{I,II}(S_{I,II} - V_I)} \right) \end{matrix} \right]. \quad (25)$$

Для вычисления (24) и (25), по аналогии с рассмотренным методом HLL, необходимо определить скорости распространения ударных волн. Скорости $S_{I,II}$ могут быть определены с использованием любого соотношения из (18) – (22). Оценка скорости промежуточной волны S_{HLLC} проводилась с использованием формул (26), вывод которых, представлен в [4]:

$$\begin{aligned} S_{HLLC} &= 0.5(V_I + V_{II}) - 0.5 \frac{p_{II} - p_I}{\bar{\rho} \bar{c}}; \\ \bar{\rho} &= 0.5(\rho_I + \rho_{II}), \quad \bar{c} = 0.5(c_I + c_{II}). \end{aligned} \quad (26)$$

6. Расчет потока по методу Русанова

Метод Русанова, так же, как HLL подход, основан на использовании двухволнового приближения, учитывающего левую и правую ударные волны, без рассмотрения контактного разрыва.

Поток по схеме Русанова [13] определяется из следующего соотношения:

$$\mathbf{F}_{\text{RUS}} = 0.5(\mathbf{F}_I + \mathbf{F}_{II}) - 0.5S^+ (\mathbf{w}_I + \mathbf{w}_{II});$$

$$S^+ = \max \{S_I, S_{II}\}. \quad (27)$$

Скорости $S_{I,II}$ вычисляются по соотношениям (18) – (22).

7. Вычисление потока на границе смежных ячеек методом Роу

Метод Роу [14] основан на решении приближенной задачи Римана для специальным образом линеаризованной исходной системы уравнений. В (5) вектор потока $\mathbf{F}(\mathbf{w})$ представляет собой однородную функцию первой степени от компонентов вектора консервативных переменных \mathbf{w} , следовательно:

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{w}} \mathbf{w} = \mathbf{J}(\mathbf{w}) \mathbf{w}, \quad (28)$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{w})$ – матрица Якоби вектора конвективного потока.

В рамках подхода Роу вместо $\mathbf{J}(\mathbf{w})$ используется постоянная матрица Якоби $\tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{w}_{L(I)}, \mathbf{w}_{R(II)})$, которая является функцией начальных состояний по обе стороны разрыва $\mathbf{w}_I, \mathbf{w}_{II}$. Таким образом, исходная система нелинейных дифференциальных уравнений заменяется линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а вместо исходной задачи Римана (5) решается приближенная задача, которая может быть решена точно:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{J}} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial n} = 0. \quad (29)$$

$$\mathbf{w}(n, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_{L(I)}, n < 0; \\ \mathbf{w}_{R(II)}, n > 0. \end{cases} \quad (30)$$

Матрица $\tilde{\mathbf{J}}$ должна удовлетворять следующим условиям:

1. Иметь действительные собственные значения $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_i(\mathbf{w}_I, \mathbf{w}_{II})$ и полный набор линейно независимых собственных векторов $\tilde{\mathbf{K}} = [\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{K}}^{(2)}, \dots, \tilde{\mathbf{K}}^{(m)}]$. $\tilde{\mathbf{K}}$ – матрица, в которой каждый столбец $\tilde{\mathbf{K}}^{(i)}$ представляет собой правый собственный вектор $\tilde{\mathbf{J}}$ соответствующий $\tilde{\lambda}_i$.
2. Матрица $\tilde{\mathbf{J}}$ должна быть согласована с исходной матрицей Якоби (28) $\mathbf{J}(\mathbf{w})$, т.е. при $\mathbf{w}_I = \mathbf{w}_{II} = \mathbf{w}$ должно выполняться соотношение: $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{w}_I, \mathbf{w}_{II}) = \mathbf{J}(\mathbf{w})$.
3. Для любых $\mathbf{w}_{I,II}$ не должно нарушаться свойство консервативности: $\mathbf{F}(\mathbf{w}_{II}) - \mathbf{F}(\mathbf{w}_I) = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{w}_{II} - \mathbf{w}_I)$.

Указанные требования выполняются, если компоненты постоянного Якобиана $\tilde{\mathbf{J}}$, вычислять с использованием специальной процедуры осреднения, предложенной Роу [14], т.е. $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{w}_I, \mathbf{w}_{II}) = \tilde{\mathbf{J}}(\tilde{\mathbf{w}})$:

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_I} \sqrt{\rho_{II}}; \quad \tilde{V} = \frac{\sqrt{\rho_I} V_I + \sqrt{\rho_{II}} V_{II}}{\sqrt{\rho_I} + \sqrt{\rho_{II}}}; \quad \tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_I} H_I + \sqrt{\rho_{II}} H_{II}}{\sqrt{\rho_I} + \sqrt{\rho_{II}}}. \quad (31)$$

В формулах (31) $H = E + p/\rho = \frac{1}{2} V^2 + \frac{c^2}{(\gamma-1)}$ – энтальпия.

Таким образом, в подходе Роу используется интерполяция газодинамических параметров на границу смежных ячеек с помощью осреднения (31).

Собственные значения и правые собственные векторы вычисляются по известным соотношениям [4] с использованием усредненных параметров. Собственные значения для

матрицы Якоби $\tilde{\mathbf{J}}$ определяются из решения характеристического уравнения $\det(\tilde{\mathbf{J}} - \tilde{\lambda}\mathbf{E}) = 0$ где \mathbf{E} – единичная матрица. Правые собственные векторы $\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{K}}^{(2)}, \tilde{\mathbf{K}}^{(3)}$, соответствующие собственным значениям $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ вычисляются из матричных уравнений вида $\tilde{\mathbf{J}}\tilde{\mathbf{K}}^{(i)} = \tilde{\lambda}_i\tilde{\mathbf{K}}^{(i)}$ $i=1, 2, 3$. Следовательно:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= \tilde{V} - \tilde{c}, \quad \tilde{\lambda}_2 = \tilde{V}, \quad \tilde{\lambda}_3 = \tilde{V} + \tilde{c}; \\ \tilde{\mathbf{K}}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{V} - \tilde{c} \\ \tilde{H} - \tilde{V}\tilde{c} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{V} \\ 0.5\tilde{V}^2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{V} + \tilde{c} \\ \tilde{H} + \tilde{V}\tilde{c} \end{bmatrix}; \\ \tilde{c} &= \left[(\gamma - 1) \left(\tilde{H} - \frac{1}{2}\tilde{V}^2 \right) \right]^{0.5}. \end{aligned} \quad (32)$$

Поток через границу соседних ячеек по схеме Роу вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{F}_{\text{ROE}} = \mathbf{F}_I + \sum_{\tilde{\lambda}_i \leq 0} \tilde{\alpha}_i \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}; \quad \mathbf{F}_{\text{ROE}} = \mathbf{F}_{II} - \sum_{\tilde{\lambda}_i \geq 0} \tilde{\alpha}_i \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}. \quad (33)$$

В выражениях (33) приращение вектора потока представляется в виде разложения по собственным волнам. Складывая два соотношения (33) получаем:

$$\mathbf{F}_{\text{ROE}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_I + \mathbf{F}_{II}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \tilde{\alpha}_i |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}. \quad (34)$$

В (34) интенсивности собственных волн $\tilde{\alpha}_i$ определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{w} &= \mathbf{w}_{II} - \mathbf{w}_I = \sum_{i=1}^3 \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{K}}^{(i)}. \quad (35) \\ \tilde{\alpha}_1 &= \frac{\Delta p - \tilde{\rho}\tilde{c}\Delta V}{2\tilde{c}^2}, \quad \tilde{\alpha}_2 = \Delta \rho - \frac{\Delta p}{\tilde{c}^2}, \quad \tilde{\alpha}_3 = \frac{\Delta p + \tilde{\rho}\tilde{c}\Delta V}{2\tilde{c}^2}; \quad (36) \\ \Delta p &= p_{II} - p_I, \quad \Delta \rho = \rho_{II} - \rho_I, \quad \Delta V = V_{II} - V_I. \end{aligned}$$

Решение линеаризованной задачи Римана содержит только разрывы. В рамках такого подхода может быть получена хорошая аппроксимация для ударных волн и контактных разрывов. Волны разрежения характеризуются непрерывным изменением параметров, поэтому замена волны разрежения ударными волнами разрежения противоречит условию убывания энтропии, что является совершенно недопустимым. Это может привести к возникновению нефизичных ударных волн разрежения при решении глобальной задачи [20].

Энтропийная проблема может быть решена с использованием специальной процедуры энтропийной коррекции. Численные ударные волны разрежения могут возникнуть в области, где одно из собственных значений λ гиперболической системы уравнений меняет знак. Причины возникновения нефизических решений связаны с отсутствием численной диссипации (вязкости) в областях с нулевыми значениями собственных чисел. В линейном приближении схемная вязкость пропорциональна величине $|\lambda|$ [20].

Для частного решения задачи Римана в виде левой звуковой или трансзвуковой волны разрежения, контактного разрыва и правой ударной волны (см. рис. 2), собственное значение $\lambda_1 = V - c$ изменяет знак. На рис. 5 показан такой случай, в котором для веера волн разрежения $\lambda_1(\mathbf{w}_I) = S_{\text{HI}} < 0$, $\lambda_1(\mathbf{w}_{III}) = S_{\text{TI}} > 0$, где $S_{\text{HI}}, S_{\text{TI}}$ соответственно скорости распространения “головы” и “хвоста” левой волны разрежения.

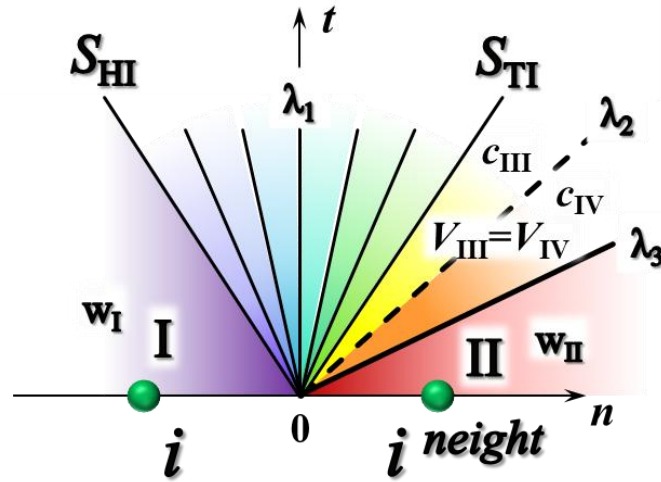


Рис. 5. Случай трансзвуковой волны разрежения, в котором собственное значение λ_1 изменяет свой знак

Энтропийная коррекция обычно добавляет в указанных областях численную диссипацию путем корректировки способа вычисления λ .

Одним из наиболее известных подходов к модификации схемы Роу, является метод Хартена и Хаймана [21]. Энтропийная коррекция для $\tilde{\lambda}_1$ по методу [21] в случае левой трансзвуковой волны разрежения (см. рис. 5) проводится следующим образом:

$$\bar{\lambda}_1 = \lambda_1^L \left(\frac{\lambda_1^R - \tilde{\lambda}_1}{\lambda_1^R - \lambda_1^L} \right); \quad \lambda_1^L = V_I - c_I; \quad \lambda_1^R = V_{III} - c_{III}. \quad (37)$$

Смысл подхода в том, что левый скачок $\mathbf{w}_{III} - \mathbf{w}_I = \tilde{\alpha}_1 \tilde{\mathbf{K}}^{(1)}$, распространяющийся со скоростью $\tilde{\lambda}_1$, заменяется двумя скачками меньшей интенсивности, движущимися со скоростями λ_1^L и λ_1^R . Скорректированное значение скорости $\bar{\lambda}_1$ используется для вычисления потока в (34) вместо $\tilde{\lambda}_1$.

8. Определение потока из решения задачи распада разрыва по схеме Ошера

В подходе Ошера [15–17] приближенное решение задачи Римана строится с использованием только простых волн.

Исходя из свойств исходной системы уравнений (5) матрица Якоби вектора конвективного потока $\mathbf{J}(\mathbf{w})$ имеет действительные собственные значения и правые собственные векторы в виде:

$$\lambda_1 = V - c, \quad \lambda_2 = V, \quad \lambda_3 = V + c;$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ V - c \\ H - Vc \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ V \\ 0.5V^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ V + c \\ H + Vc \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Матрица $\mathbf{J}(\mathbf{w})$ имеет действительные собственные значения, диагонализируема, и может быть представлена как:

$$\mathbf{J} = \mathbf{K} \mathbf{\Lambda} \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K} (\mathbf{\Lambda}^+ + \mathbf{\Lambda}^-) \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{J}^+ + \mathbf{J}^-; \quad \mathbf{J}^+ = \mathbf{K} \mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{K}^{-1}, \quad \mathbf{J}^- = \mathbf{K} \mathbf{\Lambda}^- \mathbf{K}^{-1}. \quad (39)$$

Здесь $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица с собственными значениями матрицы \mathbf{J} .

Соотношение (39) позволяет представить вектор потоков \mathbf{F} в виде суммы составляющих \mathbf{F}^+ и \mathbf{F}^- , которые отвечают положительным и отрицательным собственным числам матрицы \mathbf{J} :

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}) = \mathbf{F}^+(\mathbf{w}) + \mathbf{F}^-(\mathbf{w}); \quad \frac{\partial \mathbf{F}^+}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{J}^+(\mathbf{w}), \quad \frac{\partial \mathbf{F}^-}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{J}^-(\mathbf{w}). \quad (40)$$

Поток через границу соседних ячеек по Ошеру может быть вычислен с использованием интегральных соотношений:

$$\mathbf{F}_{\text{OSHER}} = \mathbf{F}(\mathbf{w}_I) + \int_{\mathbf{w}_I}^{\mathbf{w}_{II}} \mathbf{J}^-(\mathbf{w}) d\mathbf{w}, \quad \mathbf{F}_{\text{OSHER}} = \mathbf{F}(\mathbf{w}_{II}) - \int_{\mathbf{w}_I}^{\mathbf{w}_{II}} \mathbf{J}^+(\mathbf{w}) d\mathbf{w}. \quad (41)$$

Из (41) следует:

$$\mathbf{F}_{\text{OSHER}} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{w}_I) + \mathbf{F}(\mathbf{w}_{II})] - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{w}_I}^{\mathbf{w}_{II}} |\mathbf{J}(\mathbf{w})| d\mathbf{w}. \quad (42)$$

На рис. 6 показана структура решения задачи Римана с исходными данными $\mathbf{w}_I, \mathbf{w}_{II}$ по обе стороны разрыва и путь интегрирования, состоящий из трех сегментов I_1, I_2, I_3 .

Если разбить путь интегрирования на три части, как показано на рисунке, то поток может быть вычислен следующим образом:

$$\mathbf{F}_{\text{OSHER}} = \mathbf{F}(\mathbf{w}_I) + \int_{\mathbf{w}_I}^{\mathbf{w}_{1/3}} \mathbf{J}^-(\mathbf{w}) d\mathbf{w} + \int_{\mathbf{w}_{1/3}}^{\mathbf{w}_{2/3}} \mathbf{J}^-(\mathbf{w}) d\mathbf{w} + \int_{\mathbf{w}_{2/3}}^{\mathbf{w}_{II}} \mathbf{J}^-(\mathbf{w}) d\mathbf{w}. \quad (43)$$

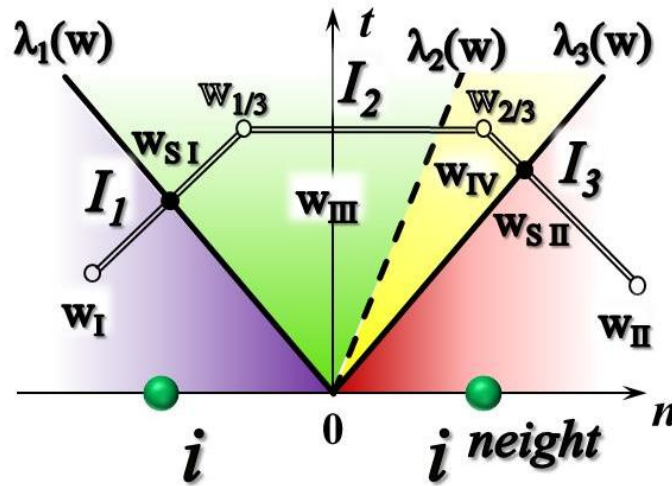


Рис. 6. Решение задачи Римана и возможный путь интегрирования

Как видно из рис. 6 путь интегрирования, соединяющий точки $\mathbf{w}_I, \mathbf{w}_{1/3}$ задается параллельно правому вектору собственных значений $\mathbf{K}^{(1)}$. Аналогичным образом определяются пути интегрирования между точками $\mathbf{w}_{1/3}, \mathbf{w}_{2/3}$ и $\mathbf{w}_{2/3}, \mathbf{w}_{II}$. Для определения точек пересечения $\mathbf{w}_{1/3}, \mathbf{w}_{2/3}$, которые в области параметров соответствуют состояниям $\mathbf{w}_{III}, \mathbf{w}_{IV}$, и звуковых точек $\mathbf{w}_{S1}, \mathbf{w}_{S2}$ используются обобщенные инварианты Римана. Для точек $\mathbf{w}_I, \mathbf{w}_{1/3}$ и $\mathbf{w}_{2/3}, \mathbf{w}_{II}$ будут соответственно справедливы соотношения:

$$I_1 = V + \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{const}, \quad (44)$$

$$I_{II} = V - \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{const}. \quad (45)$$

Если левая и правая волны являются волнами разрежения, то соотношения (44), (45) выполняются точно. Исходя из того, что эти волны могут быть как волнами разрежения, так и ударными волнами, $\mathbf{w}_{1/3} \equiv \mathbf{w}_{III}$, $\mathbf{w}_{2/3} \equiv \mathbf{w}_{IV}$, в общем случае, определяются лишь приближенно. Метод Ошера использует в решении только волны сжатия или разрежения и контактный разрыв.

Используя (44) вдоль левой волны, (45) – вдоль правой, с учетом того, что $p_{III} = p_{IV}$ и $V_{III} = V_{IV}$, в рамках изоэнтропического приближения

$$c_{III} = c_I \left(p_{III,IV} / p_I \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}, \quad c_{IV} = c_{II} \left(p_{III,IV} / p_{II} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$$

можно получить:

$$p_{III,IV} = \left[\frac{c_I + c_{II} - (V_I - V_{II})(\gamma - 1)/2}{c_I / p_I^z + c_{II} / p_{II}^z} \right]^z; \quad V_{III,IV} = \frac{H V_I / c_I + V_{II} / c_{II} + 2(H - 1) / (\gamma - 1)}{H / c_I + 1 / c_{II}};$$

$$\rho_{III} = \rho_I \left(\frac{p_{III,IV}}{p_I} \right)^{1/\gamma}, \quad \rho_{IV} = \rho_{II} \left(\frac{p_{III,IV}}{p_{II}} \right)^{1/\gamma}; \quad z = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}, \quad H = (p_I / p_{II})^z. \quad (46)$$

Параметры звуковых точек $\mathbf{w}_{SI}, \mathbf{w}_{SII}$ вычисляются из условий $\lambda_1 = V - c = 0$, $\lambda_3 = V + c = 0$ с учетом (44), (45) по следующим формулам:

$$V_{SI} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_I + \frac{2c_I}{\gamma + 1}, \quad c_{SI} = V_{SI},$$

$$\rho_{SI} = \rho_I \left(\frac{c_{SI}}{c_I} \right)^{2/(\gamma-1)}, \quad p_{SI} = p_I \left(\frac{\rho_{SI}}{\rho_I} \right)^\gamma. \quad (47)$$

Аналогичные соотношения справедливы для правой звуковой точки:

$$V_{SII} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_{II} - \frac{2c_{II}}{\gamma + 1}, \quad c_{SII} = -V_{SII},$$

$$\rho_{SII} = \rho_{II} \left(\frac{c_{SII}}{c_{II}} \right)^{2/(\gamma-1)}, \quad p_{SII} = p_{II} \left(\frac{\rho_{SII}}{\rho_{II}} \right)^\gamma. \quad (48)$$

Интеграл (43) вычисляется с использованием соотношений (46) – (48). Математические выкладки, необходимые для вычисления (43) здесь опущены. Различные реализуемые результаты интегрирования в зависимости от начальных данных представлены в табл. 1.

Таблица 1

Формулы для вычисления потоков по методу Ошера

$$\mathbf{F}_{OSHER} = \mathbf{F}(\mathbf{w}_k), \quad k = I, II, III, IV, SI, SII$$

	$V_I - c_I \geq 0$ $V_{II} + c_{II} \geq 0$	$V_I - c_I \geq 0$ $V_{II} + c_{II} \leq 0$	$V_I - c_I \leq 0$ $V_{II} + c_{II} \geq 0$	$V_I - c_I \leq 0$ $V_{II} + c_{II} \leq 0$
$V_{III,IV} \geq 0$ $V_{III,IV} - c_{III} \geq 0$	\mathbf{F}_I	$\mathbf{F}_I + \mathbf{F}_{II} - \mathbf{F}_{SII}$	\mathbf{F}_{SI}	$\mathbf{F}_{SI} - \mathbf{F}_{SII} + \mathbf{F}_{II}$

$V_{III,IV} \geq 0$ $V_{III,IV} - c_{III} \leq 0$	$F_I - F_{S I} + F_{III}$	$F_I - F_{S I} + F_{III} - F_{S II} + F_{II}$	F_{III}	$F_{II} + F_{III} - F_{S II}$
$V_{III,IV} \leq 0$ $V_{III,IV} + c_{IV} \geq 0$	$F_I - F_{S I} + F_{IV}$	$F_I - F_{S I} + F_{IV} - F_{S II} + F_{II}$	F_{IV}	$F_{IV} - F_{S II} + F_{II}$
$V_{III,IV} \leq 0$ $V_{III,IV} + c_{IV} \leq 0$	$F_I - F_{S I} + F_{S II}$	$F_I - F_{S I} + F_{II}$	$F_{S II}$	F_{II}

9. Расчет потоков по схеме Стегера – Уорминга

В рамках метода расщепления по физическим процессам, рассмотрен алгоритм вычисления потоков на границах расчетных элементов по схеме Стегера – Уорминга [5], которая относится к классу подходов, основанных на расщеплении вектора потока. Методы расщепления вектора потока проще в реализации, что делает их более эффективными и менее затратными с вычислительной точки зрения по сравнению с методами типа Годунова, рассмотренными выше. Кроме этого они хорошо применимы для неявных схем, которые при решении задач аэротермодинамики являются предпочтительнее явных методов.

Подход Стегера – Уорминга основан на свойствах уравнений газовой динамики и, в частности, на свойстве однородности вектора конвективного потока $F(w)$. Как отмечалось выше, $F(w)$ – однородная функция первой степени от компонентов вектора консервативных переменных w (28), а матрица Якоби вектора конвективного потока $J(w) = \partial F / \partial w$ имеет действительные собственные значения, диагонализируема, и может быть представлена в виде (39)

$$J = K \Lambda K^{-1} = K (\Lambda^+ + \Lambda^-) K^{-1} = J^+ + J^-; \quad J^+ = K \Lambda^+ K^{-1}, \quad J^- = K \Lambda^- K^{-1}. \quad (49)$$

Здесь Λ – диагональная матрица с собственными значениями матрицы J .

Соотношение (49) позволяет представить вектор потоков F в виде суммы составляющих F^+ и F^- , которые отвечают положительным и отрицательным собственным числам матрицы J :

$$F(w) = F^+(w) + F^-(w); \quad \frac{\partial F^+}{\partial w} = J^+(w), \quad \frac{\partial F^-}{\partial w} = J^-(w). \quad (50)$$

Класс методов расщепления вектора потока основан на представлении вектора F в виде суммы двух компонент F^+ и F^- .

Из соотношения (49) следует, что расщепление матрицы Якоби J достигается расщеплением диагональной матрицы собственных значений Λ . Расщепление Λ , в свою очередь, может быть получено соответствующим расщеплением по собственным значениям $\lambda_i, i=1, \dots, m$. Предположим, что собственные значения λ_i могут быть представлены в виде $\lambda_i = \lambda_i^+ + \lambda_i^-$ причем

$$\lambda_i^+ \geq 0, \lambda_i^- \leq 0, \quad (51)$$

тогда

$$\Lambda^+ = \begin{bmatrix} \lambda_1^+ & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^+ \end{bmatrix}, \quad \Lambda^- = \begin{bmatrix} \lambda_1^- & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^- \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Из условия (51), лежащего в основе рассматриваемого класса схем, следует, что для сверхзвукового течения в положительном направлении ($V - c > 0$) все собственные числа матрицы положительны, а для сверхзвукового течения в противоположном направлении ($V + c < 0$) – отрицательны:

$$\begin{cases} \mathbf{F}^+ = \mathbf{F}, & \mathbf{F}^- = 0 & \text{при } \lambda_i \geq 0 & i = 1, 2, 3; \\ \mathbf{F}^+ = 0, & \mathbf{F}^- = \mathbf{F} & \text{при } \lambda_i \leq 0 & i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (53)$$

Другими словами, и в том и в другом случае возмущения будут передаваться по расчетной сетке исключительно вниз по потоку, что позволяет учитывать физические свойства течения.

Стегер и Уорминг [5] предложили следующий способ определения собственных значений:

$$\lambda_i^+ = 0.5(\lambda_i + |\lambda_i|), \quad \lambda_i^- = 0.5(\lambda_i - |\lambda_i|). \quad (54)$$

Если учесть, что $|\lambda_i| = \lambda_i$ при $\lambda_i \geq 0$ и $|\lambda_i| = -\lambda_i$ при $\lambda_i \leq 0$, то становится очевидным, что для рассмотренного определения условие (51) будет выполнено.

Соотношения для компонентов в расщеплении вектора потока методом Стегера – Уорминга выводятся из (49) после предварительного вычисления компонентов матрицы \mathbf{K}^{-1} , обратной $\mathbf{K} = [\mathbf{K}^{(1)}, \mathbf{K}^{(2)}, \mathbf{K}^{(3)}]$:

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{(\gamma-1)}{2c^2} \begin{bmatrix} 0.5V^2 + \frac{Vc}{(\gamma-1)} & -V - \frac{c}{(\gamma-1)} & 1 \\ \frac{2c^2}{(\gamma-1)} - V^2 & 2V & -2 \\ 0.5V^2 - \frac{Vc}{(\gamma-1)} & \frac{c}{(\gamma-1)} - V & 1 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\mathbf{F}^\pm = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} \lambda_1^\pm + 2(\gamma-1)\lambda_2^\pm + \lambda_3^\pm \\ (V-c)\lambda_1^\pm + 2(\gamma-1)V\lambda_2^\pm + (V+c)\lambda_3^\pm \\ \left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{c^2}{(\gamma-1)} - Vc\right)\lambda_1^\pm + (\gamma-1)V^2\lambda_2^\pm + \left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{c^2}{(\gamma-1)} + Vc\right)\lambda_3^\pm \end{bmatrix} \quad (56)$$

Особенностью реализации рассматриваемой схемы на неструктурированных сетках является произвольная ориентация внешней нормали к границе элемента, поэтому “положительным” будем считать поток по направлению внешней нормали (поток со стороны текущей ячейки i на рассматриваемую грань). В ходе выполнения алгоритма изложенного метода необходимо рассматривать три варианта (рис. 7):

1. Сверхзвуковой поток в положительном направлении ($V - c > 0$). Вектор потока на грани $\mathbf{F}_{\text{STEWAR}}$ вычисляются с использованием параметров течения, определенных в текущей ячейке i . Информация о параметрах из соседней ячейки на грань не передается: $\mathbf{F}_i^+ = \mathbf{F}(\mathbf{w}_I)$, $\mathbf{F}_i^- = 0$, $\mathbf{F}_{\text{STEWAR}} = \mathbf{F}_i^+ = \mathbf{F}(\mathbf{w}_I)$.

2. Сверхзвуковой поток в обратном направлении ($V + c < 0$). Вектор потока на грани $\mathbf{F}_{\text{STEWAR}}$ вычисляется с использованием параметров течения, определенных в соседнем через рассматриваемую грань элементе i_{neight} : $\mathbf{F}_i^+ = 0$, $\mathbf{F}_{\text{STEWAR}} = \mathbf{F}_{i_{\text{neight}}}^+ = \mathbf{F}(\mathbf{w}_{II})$.

3. В случае дозвукового потока информация распространяется и в том и в другом направлении. Вычисление вектора потока должно выполняться по соотношениям (56) с использованием определения (54) для расчета собственных значений. При этом $\mathbf{F}_{\text{STEWAR}} = \mathbf{F}_i^+ + \mathbf{F}_{i_{\text{neight}}}^+$.

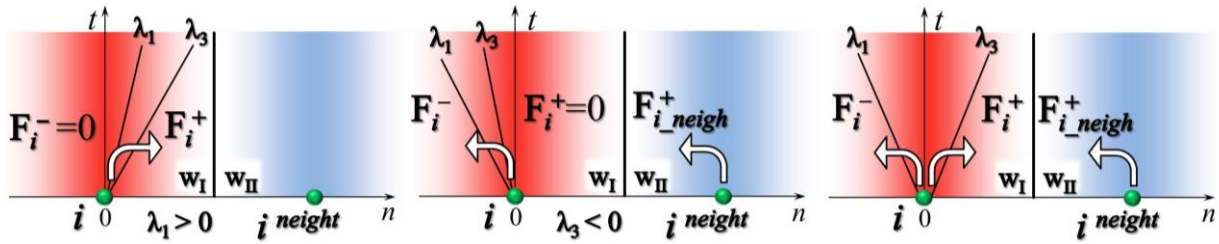


Рис.7. Возможные конфигурации течения для рассматриваемой ячейки (слева направо): сверхзвуковое течение по направлению к данной грани; сверхзвуковое течение в обратном направлении; дозвуковое течение

10. Вычисление потока на границе смежных ячеек по схеме ван Лира

Метод ван Лира [6,7] использует свойства уравнений газовой динамики (49)–(53), рассмотренные выше, и требует выполнения дополнительных условий. Расщепленные матрицы Якоби и расщепленные вектора потока должны быть непрерывными функциями плотности, числа Маха и скорости звука; собственные значения \mathbf{J}^+ должны быть неотрицательными, а собственные значения \mathbf{J}^- неположительными; для случая дозвукового течения расщепленные матрицы Якоби должны иметь нулевое собственное значение. Метод ван-Лира основан на представлении вектора потока \mathbf{F} функцией плотности, скорости звука и числа Маха:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\rho, c, M) = \begin{bmatrix} \rho c M \\ \rho c^2 \left(M^2 + \frac{1}{\gamma} \right) \\ \rho c^3 M \left(\frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{mas} \\ f_{mom} \\ f_{ene} \end{bmatrix}. \tag{57}$$

Здесь M – число Маха (проекция вектора скорости на внешнюю нормаль рассматриваемой грани деленная на скорость звука).

Расщепление потоков в методе ван Лира строится следующим образом:

$$\begin{aligned} f_{mas}^+ &= \frac{1}{4} \rho c (1+M)^2, & f_{mas}^- &= -\frac{1}{4} \rho c (1-M)^2; \\ f_{mom}^+ &= f_{mas}^+ \frac{2c}{\gamma} \left[\frac{\gamma-1}{2} M + 1 \right], & f_{mom}^- &= f_{mas}^- \frac{2c}{\gamma} \left[\frac{\gamma-1}{2} M - 1 \right]; \\ f_{ene}^+ &= f_{mas}^+ \frac{\gamma^2}{2(\gamma^2-1)} \frac{(f_{mom}^+)^2}{f_{mas}^+}, & f_{ene}^- &= f_{mas}^- \frac{\gamma^2}{2(\gamma^2-1)} \frac{(f_{mom}^-)^2}{f_{mas}^-}. \end{aligned} \tag{58}$$

В векторной форме:

$$\mathbf{F}^\pm = \pm \frac{1}{4} \rho c (1 \pm M)^2 \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{2c}{\gamma} \left[\frac{\gamma-1}{2} M \pm 1 \right] \\ \frac{2c^2}{\gamma^2-1} \left[\frac{\gamma-1}{2} M \pm 1 \right]^2 \end{array} \right\} \tag{59}$$

11. Применение схемы Лио – Стефана (AUSM) для вычисления потоков на границах расчетных элементов

Классическая схема AUSM, предложенная Лио и Стефаном [8, 9], основывается на расщеплении вектора потока на акустическую \mathbf{F}^p и конвективную \mathbf{F}^c компоненты:

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho V^2 + p \\ \rho V E + pV \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho V^2 \\ \rho V E + pV \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}^c + \mathbf{F}^p \quad (60)$$

С использованием числа Маха M и энтальпии $H = E + p/\rho$ конвективная компонента потока представляются в виде:

$$\mathbf{F}^c = M \begin{bmatrix} \rho c \\ \rho c V \\ \rho c H \end{bmatrix} = M \hat{\mathbf{F}}^c. \quad (61)$$

При определении потока на грани используется соотношение:

$$\mathbf{F}_{\text{AUSM}} = (M_i^+ + M_{i_neight}^-) \begin{bmatrix} \hat{\rho}\hat{c} \\ \hat{\rho}\hat{c}\hat{V} \\ \hat{\rho}\hat{c}\hat{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_i^+ + p_{i_neight}^- \\ 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$M^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} (M \pm 1)^2 & \text{при } |M| \leq 1; \\ \frac{1}{2} \cdot (M \pm |M|) & \text{при } |M| > 1. \end{cases} \quad (63)$$

$$p^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2} p (1 \pm M) & \text{при } |M| \leq 1; \\ \frac{1}{2} p \frac{M \pm |M|}{M} & \text{при } |M| > 1. \end{cases} \quad (64)$$

Компоненты вектора $\hat{\mathbf{F}}^c$ определяются из следующих соотношений:

$$\begin{bmatrix} \hat{\rho}\hat{c} \\ \hat{\rho}\hat{c}\hat{V} \\ \hat{\rho}\hat{c}\hat{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\rho c)_i \\ (\rho c V)_i \\ (\rho c H)_i \end{bmatrix} \text{ при } (M_i^+ + M_{i_neight}^-) \geq 0; \quad (65)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\rho}\hat{c} \\ \hat{\rho}\hat{c}\hat{V} \\ \hat{\rho}\hat{c}\hat{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\rho c)_{i_neight} \\ (\rho c V)_{i_neight} \\ (\rho c H)_{i_neight} \end{bmatrix} \text{ при } (M_i^+ + M_{i_neight}^-) \leq 0.$$

12. Анализ эффективности численных схем

С целью оценки эффективности рассмотренных численных схем проводилась апробация алгоритмов на широко известных одномерных задачах Римана о распаде разрыва для различных исходных данных. При этом особое внимание уделялось исследованию важных для расчета высокоскоростных течений свойств схем: способность сохранять монотонность при воспроизведении разрывных решений; качество разрешения слабых и интенсивных волн; диссипативные свойства в областях, где искомые решения имеют небольшие перепа-

ды значений; свойство консервативности, от которого зависит точность определения скоростей распространения ударных волн и контактных разрывов.

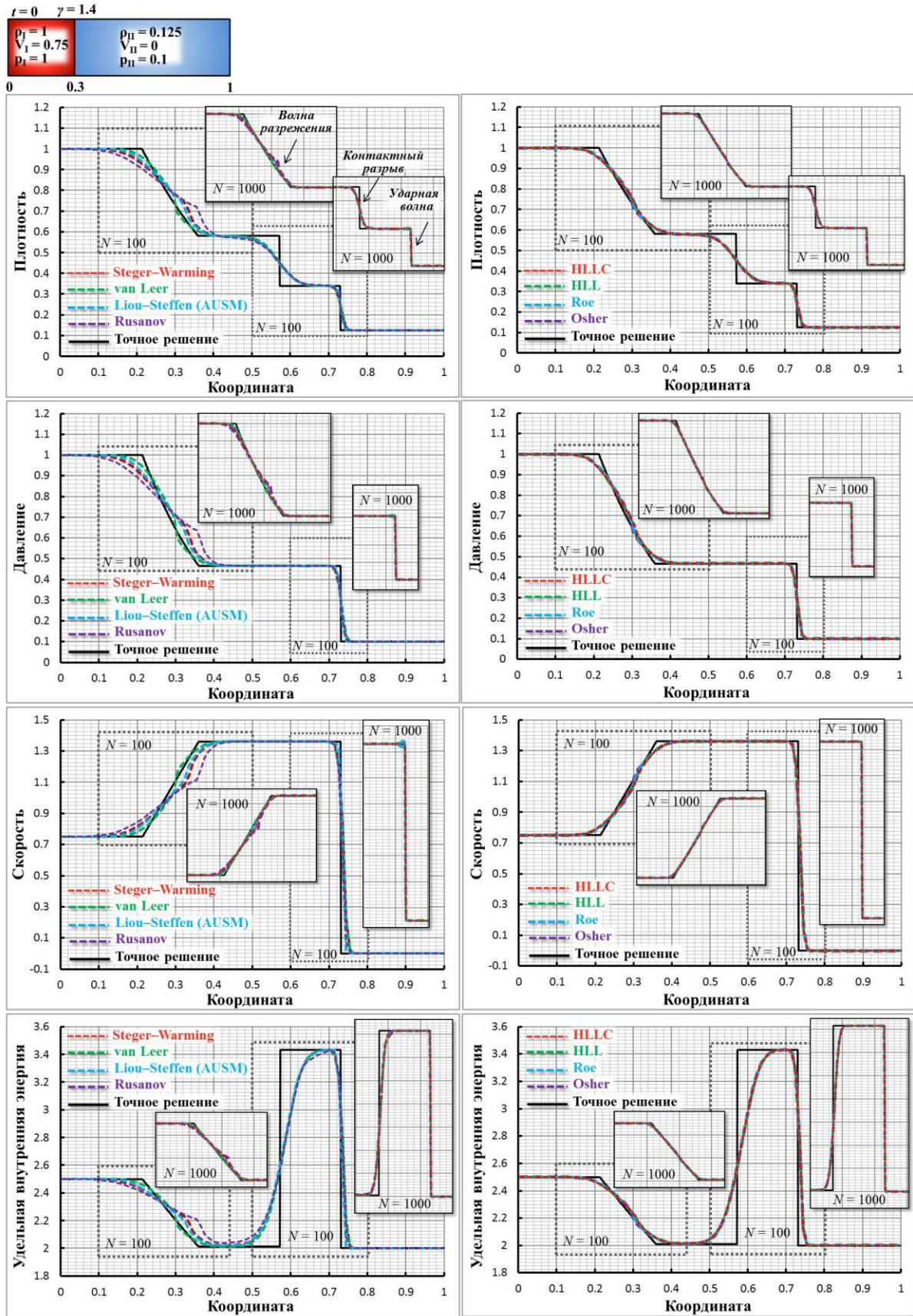
Ниже приведены некоторые результаты, иллюстрирующие типичную волновую конфигурацию, которая реализуется в ходе решения модифицированной задачи Сода. Начальные величины слева и справа от разрыва в простых переменных задавались как:

$$\mathbf{U}_I = (\rho_I, V_I, p_I)^T = (1, 0.75, 1)^T, \quad \mathbf{U}_{II} = (\rho_{II}, V_{II}, p_{II})^T = (0.125, 0, 0.1)^T. \quad (66)$$

От классической задачи об ударной трубе, модифицированный тест Сода отличается наличием ненулевой начальной скорости слева от разрыва. Задача полезна для проверки энтропийных свойств схем. Решение ищется в расчетной области $0 < n < 1$. Исходное положение разрыва $n = 0.3$. Показатель адиабаты γ равен 1.4.

Разрыв, заданный начальными данными, распадается на ударную волну и контактный разрыв, бегущие вправо, а также, волну разрежения, распространяющуюся влево от начального положения разрыва (рис. 8). На рисунке приведены графики плотности, давления, скорости и удельной внутренней энергии для различного числа расчетных ячеек $N = 100, 1000$ в момент времени $t = 0.2$, полученные с применением рассмотренных численных схем. Выбор шага по времени осуществлялся из условия устойчивости численных схем Куранта – Фридрихса – Леви (CFL-условия) [22,23].

Результаты сравнения решений, полученных с использованием рассмотренных алгоритмов, приведены на рис. 8. На рисунке справа видно, что газодинамическая конфигурация, полученная с применением метода Стегера – Уорминга (красная пунктирная линия), хорошо согласуется с точным решением задачи методом Годунова (черная сплошная линия) при разрешении бегущих ударной волны и контактного разрыва.



При этом левая волна разрежения описывается неудовлетворительно – наблюдается значительный эффект “размазывания” границ левого веера волн разрежения. Кроме этого в области волны разрежения наблюдается неустойчивость решения и плохая сходимость при прохождении звуковой точки, где собственные значения матрицы Якоби меняют знак.

Метод ван Лиры лучше описывает волну разрежения и также неплохо согласуется с точным решением в областях ударной волны и контактного разрыва. Поведение параметров вблизи звуковой точки больше соответствует точному решению.

Применение схемы Лио–Стефана (AUSM) позволяет более точно описать правую ударную волну. В решениях, полученных двумя другими методами расщепления вектора потока (Стегера–Уорминга и ван Лиры), фронт ударной волны более пологий. По качеству разрешения волны разрежения AUSM-подход занимает промежуточное положение. Поведение решения в области контактного разрыва почти одинаковое для всех трех схем.

Как отмечалось выше, методы расщепления вектора потока проще в реализации, что делает их более эффективными и менее затратными с вычислительной точки зрения по сравнению с методами типа Годунова. Кроме этого, они хорошо применимы для неявных методов, которые при решении задач аэротермодинамики являются предпочтительнее явных схем.

С другой стороны уменьшение вычислительной сложности алгоритмов приводит к снижению качества разрешения контактных разрывов и ударных волн, кроме этого схемы расщепления вектора потока значительно уступают в точности методам типа Годунова с приближенным римановским решателем.

Учет физических свойств течения в схемах типа Годунова носит более глубокий характер, поскольку дискретизация производится с привлечением частных аналитических решений уравнений Эйлера.

Методы типа Годунова HLL и HLLC, использующие приближенное решение задачи о распаде произвольного разрыва, очень хорошо описывают левую волну разрежения. Однако степень размывания контактного разрыва у данного типа схем, такая же, как у методов расщепления вектора потока Стегера–Уорминга и ван Лиры.

Схема Русанова заметно уступает всем рассмотренным выше схемам по точности описания волны разрежения в рамках рассматриваемой задачи. При этом область решения соответствующая ударной волне и контактному разрыву воспроизводится достаточно точно.

Метод Роу основан на решении линеаризованной задачи Римана и, следовательно, использует при построении решения только разрывы. Таким образом, волны разрежения в решении задачи распада разрыва заменяются ударными волнами разрежения, что противоречит условию неубывания энтропии. Это может привести к возникновению нефизичных ударных волн разрежения при решении глобальной задачи [20].

Без использования специальной процедуры энтропийной коррекции численное решение в области волны разрежения получается совершенно некорректным. Применение схемы Роу, модифицированной по методу Хартена и Хаймана [21], дает результаты достаточно близкие к точному решению задачи методом Годунова. Скорректированный подход Роу описывает волну разрежения лучше методов расщепления вектора потока, но уступает в точности HLL и HLLC схемам.

Схема Ошера для области волны разрежения дает практически неразличимые с точным решением результаты. При этом данный подход, основанный на использовании простых волн (волн сжатия, разрежения и контактных волн), приводит к несколько большему усреднению (размазыванию) сильных скачков.

Заключение

Проведен анализ эффективности современных численных схем решения задачи о распаде разрыва – подходов Стегера–Уорминга, ван Лиры, Лио и Стефана (AUSM), Хартена–Лакса–ван Лиры (HLL и HLLC), Русанова, Роу, Ошера в рамках метода расщепления по

физическим процессам. Исследование методов решения задачи Римана проведено с целью совершенствования трехмерных компьютерных моделей гиперзвуковой аэротермодинамики интегральных компоновок перспективных летательных аппаратов произвольной геометрии, создаваемых в ИПМех РАН, повышения вычислительной эффективности компьютерных кодов и увеличения порядка точности расчетных схем. Проведена апробация алгоритмов на широко известных одномерных задачах Римана о распаде разрыва для различных исходных данных.

Приведены результаты решения модифицированной задачи Сода, отражающие важные для расчета высокоскоростных течений свойства схем: способность сохранять монотонность при воспроизведении разрывных решений; качество разрешения слабых и интенсивных волн; диссипативные свойства в областях, где искомые решения имеют небольшие перепады значений. Проведено сравнение полученных данных с точным решением задачи Римана по классической схеме Годунова.

Типичная волновая конфигурация, полученная с использованием метода Стегера–Уорминга, хорошо согласуется с точным решением задачи методом Годунова при разрешении бегущих ударной волны и контактного разрыва. Однако при описании левой волны разрежения наблюдается сильное “размазывание” границ веера волн разрежения. Кроме этого в области волны разрежения наблюдается неустойчивость решения и плохая сходимость.

Метод ван Лиры лучше описывает волну разрежения и также неплохо согласуется с точным решением в областях ударной волны и контактного разрыва.

Применение схемы Лио–Стефана (AUSM) позволяет более точно описать правую ударную волны. В решениях, полученных двумя другими методами расщепления вектора потока (Стегера–Уорминга и ван Лиры), фронт ударной волны более пологий. По качеству разрешения волны разрежения AUSM-подход занимает промежуточное положение. Поведение решения в области контактного разрыва почти одинаковое для всех трех схем расщепления вектора потока.

Методы HLL и HLLC очень хорошо описывают левую волну разрежения. Однако степень размывания контактного разрыва у данного типа схем, такая же, как у методов расщепления вектора потока Стегера–Уорминга и ван Лиры. Схема Русанова заметно уступает всем рассмотренным выше схемам по точности описания волны разрежения в рамках рассматриваемой задачи. При этом область решения соответствующая ударной волне и контактному разрыву воспроизводится достаточно точно.

Применение классического метода Роу дает некорректный результат в области волны разрежения. Скорректированный подход Роу описывает волну разрежения лучше методов расщепления вектора потока, но уступает в точности HLL и HLLC схемам.

Схема Ошера для области волны разрежения дает практически неразличимые с точным решением результаты. При этом данный подход, приводит к несколько большему усреднению сильных скачков.

Работа выполнена в Лаборатории радиационной газовой динамики ИПМех РАН в рамках Программы фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления (ОЭММПУ) РАН «Аэротермомеханика и навигация гиперзвуковых летательных аппаратов» (руководитель проекта академик Д.М.Климов), а также в рамках грантов РФФИ №№ 07-01-0133, 10-01-00544, 13-01-00537, 13-08-12033-ОФИМ, 11-08-12072-ОФИМ, гранта Президента РФ № МК-5324.2014.1 для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук и программы сотрудничества ИПМех РАН и ВНИИА им. Н.Л.Духова.

Литература

1. Железнякова А.Л., Суржиков С.Т. На пути к созданию модели виртуального ГЛА. I. – М.: ИПМех РАН, 2013. – 160 с.

- Железнякова А.Л. Метод расщепления по физическим процессам для решения задач гиперзвуковой аэродинамики на неструктурированных сетках // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2013. Том 14, вып. 2, <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2013-04-29-010.pdf>
2. Железнякова А.Л., Суржиков С.Т. Численное моделирование гиперзвукового обтекания модели летательного аппарата X-43 // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2011. Том 11. <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2011-02-01-030.pdf>
 3. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. — Springer; 3rd edition, April 2009. — 724 p.
 4. Steger J.L., Warming R.F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods // J. Comput. Phys. Vol. 40, 1981. P. 263–293.
 5. van Leer. B. Flux–Vector Splitting for the Euler Equations // ICASE Report 82–30, NASA Langley Research Center, USA, 1982.
 6. van Leer. B. Flux Vector Splitting for the Euler Equations // Proc. 8th International Conference on Numerical Methods in Fluids Dynamics, Springer–Verlag, Berlin, 1982. Pp. 507–512.
 7. Liou M.S., Steffen C.J. A new flux splitting scheme // Journal of Computational physics. Vol. 107, №1, 1993. P. 23–39.
 8. Liou M.S. Recent progress and applications of AUSM+ // Sixteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, Springer–Verlag, Vol. 515, 1998. Pp.302–307
 9. Harten A., Lax P., van Leer B. On upstream differencing and Godunov type methods for hyperbolic conservation laws // SIAM review. Vol. 25, 1983. P.35–61.
 10. Toro E.F., Spruce M., Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL Riemann solver // J. Shock Waves. Vol. 4, 1994. Pp. 25–34.
 11. Toro B.F., Chakraborty A. Development of an approximate Riemann solver for the steady supersonic Euler equations // The Aeronautical Journal. Vol. 98, 1994. Pp. 325–339.
 12. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // ЖВМ и МФ. Vol. 1, № 2, 1961. Pp. 267–279.
 13. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes // J. Comput. Phys. Vol. 43. 1981. Pp. 357–372.
 14. Engquist B., Osher S. One-sided difference approximations for nonlinear conservation laws // Math. Comp. Vol. 36, № 154, 1981. Pp. 321–351.
 15. Osher S., Solomon F. Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws // Math. Comp. Vol. 38, № 158, 1982. Pp. 339–374.
 16. Osher S., Chakravarthy S.R. Upwind schemes and boundary conditions with applications to Euler equations in general geometries // J. Comput. Phys. Vol. 50, 1983. Pp. 447–481.
 17. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. Т. 47, № 3, 1959. С. 271–306.
 18. Годунов С.К. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. — 400 с.
 19. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 608 с.
 20. Harten A., Hyman J.M. Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. Vol. 50, №2, 1983. Pp. 235–269.
 21. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. Т. I. — М.: Мир, 1990. — 384 с.
 22. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. Т. II. — М.: Мир, 1990. — 392 с.

Статья поступила в редакцию 16 ноября 2014 г.