

Improving the Accuracy of Approximate Riemann Solvers in the Framework of TVD Approach for the Computations of Hypersonic Flows

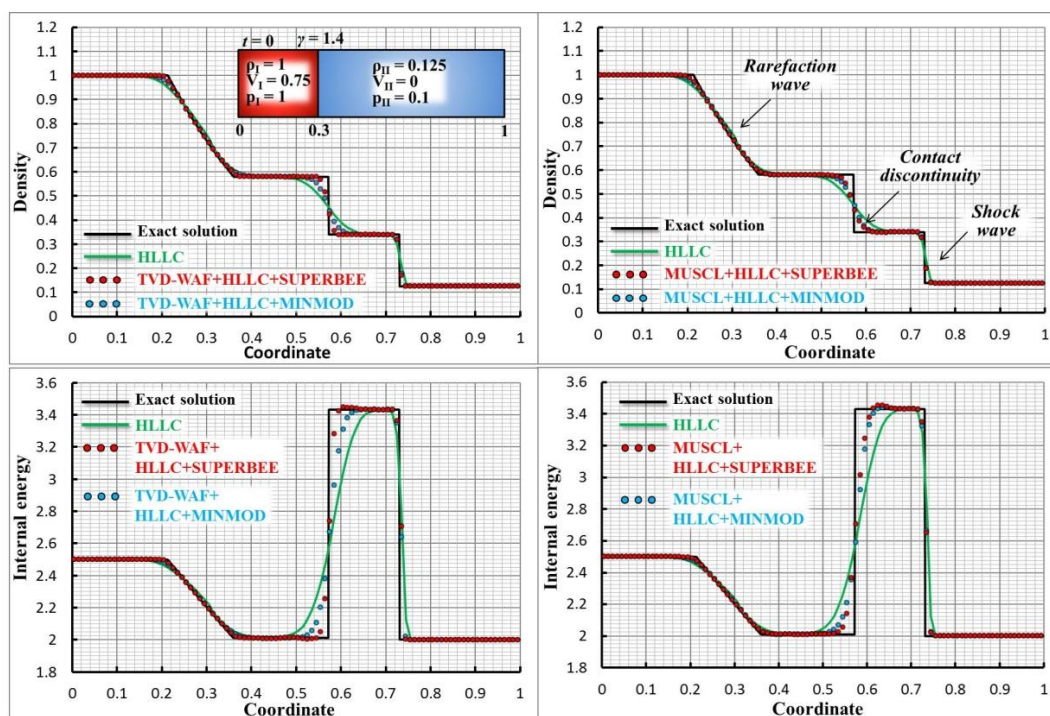
A.L. Zheleznyakova

Institute for Problems in Mechanics Russian Academy of Sciences, Russia, Moscow, 119526
a.zheleznyakova@mail.ru

Abstract

For the purposes of improving overall quality of the three-dimensional computer models developed in Institute for Problems in Mechanics Russian Academy of Sciences (IPMech RAS), the modern numerical schemes for solving the problem of the decay of an arbitrary discontinuity in the framework of TVD approach are studied. The hypersonic flows are calculated by method of splitting by physical processes using the unsteady shock-capturing scheme without preliminary distinguishing of the discontinuity surfaces. The effectiveness of two upwind hybrid numerical schemes based on the TVD –WAF and TVD –MUSCL concepts are considered. Several widely used flux limiter and slope limiter functions (such as SUPERBEE, MINMOD, van Leer and van Albada) are applied. The methods are based on solving Riemann problems and can be used with any of the Riemann solvers. The schemes under consideration provide high order of accuracy (second or higher) and have the ability to suppress spurious oscillations in regions of large gradient and near discontinuities. The algorithms are adapted for use on unstructured meshes. The discussed high order TVD-based upwind schemes are applied on a set of benchmark problems.

Keywords: TVD schemes, TVD limiters, the problem of the decay of an arbitrary discontinuity, Riemann problem, unstructured mesh, computational aerodynamics



Numerical results for the Sod shock tube test for the considered schemes. The upper row displays the density, the bottom row shows specific internal energy at time $t = 0.2$

УДК 533.6.01+519.6

Повышение порядка точности численных схем приближенного решения задачи о распаде произвольного разрыва в рамках TVD концепции для моделирования гиперзвуковых течений

А.Л. Железнякова

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, a.zheleznyakova@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются современные численные схемы приближенного решения задачи о распаде разрыва (методы расщепления вектора потока и методы типа Годунова) в рамках TVD концепции с целью совершенствования трехмерных компьютерных моделей гиперзвуковой аэротермодинамики интегральных компоновок перспективных летательных аппаратов произвольной геометрии, создаваемых в ИПМех РАН. Сквозной счет ведется без предварительного выделения поверхностей разрывов с помощью модифицированного метода расщепления по физическим процессам. В работе исследуется эффективность двух противоточных TVD схем: TVD версии метода взвешенного усредненного потока TVD-WAF (WeightedAverageFlux) и MUSCL метода (MonotonicUpstream-CenteredSchemeForConservationLaws). При этом используются различные функции-ограничители потоков и наклонов, такие как SUPERBEE, MINBEE (MINMOD), ограничители ван-Лира и ван-Альбады. Рассмотренные подходы используют решение задачи распада разрыва, могут эффективно применяться с любым приближенным римановским решателем, обеспечивают повышенный порядок точности (второй и выше), не порождают нефизические осцилляции решения вблизи газодинамических разрывов и зон больших градиентов параметров. Рассмотренные численные методы адаптированы к использованию на нерегулярных сетках. Реализованные численные TVD-схемы повышенного порядка аппроксимации апробированы на ряде тестовых задач.

Ключевые слова: TVD схемы, TVD ограничители, распад газодинамического разрыва, задача Римана, неструктурированная сетка, вычислительная аэродинамика

1. Введение

Создание вычислительных методов аэротермодинамики гиперзвуковых течений является важнейшим направлением развития авиационной и ракетно-космической промышленности. С целью совершенствования трехмерных компьютерных моделей гиперзвуковой аэротермодинамики интегральных компоновок перспективных летательных аппаратов произвольной геометрии, создаваемых в ИПМех РАН [1–3], повышения вычислительной эффективности компьютерных кодов и увеличения порядка точности расчетных схем, проведено исследование современных методов решения автомодельной задачи о распаде разрыва в рамках TVD концепции [4]. В качестве базового подхода для сквозного счета пространственного гиперзвукового обтекания без предварительного выделения поверхностей разрывов используется модифицированный метод расщепления по физическим процессам. Моделирование гиперзвукового течения, характеризующегося наличием сложной системы сильных, взаимодействующих между собой ударных волн – нетривиальная математическая за-

дача, требующая расчета разрывных решений. Разработанная схема имеет большой запас устойчивости и позволяет получить общие характеристики гиперзвукового потока. Однако устойчивость обеспечивается наличием значительной аппроксимационной вязкости, приводящей к сильной диффузии ударных волн, поэтому метод дает лишь приближенное представление о картине ударно-волновых структур. Указанный недостаток становится существенным при моделировании вязкообтекания аэродинамических объектов сложной конфигурации. Поэтому при высоких скоростях полета точность определения аэродинамических и тепловые характеристик поверхности летательного аппарата произвольной формы будет зависеть от качества разрешения пространственной структуры течения с взаимодействующими между собой и пограничным слоем ударными волнами. Одними из наиболее популярных подходов к решению подобных задач являются TVD (Total Variation Diminishing) методы [5].

Для повышения точности разработанных алгоритмов с сохранением их устойчивости, в рамках метода расщепления по физическим процессам исследована возможность реализации двух противопоточных TVD схем: TVD версии метода взвешенного усредненного потока TVD – WAF (Weighted Average Flux) [6, 7] и MUSCL метода (Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) [8, 9]. При этом использовались различные функции-ограничители потоков и наклонов, такие как SUPERBEE [10], MINBEE (MINMOD) [10], ограничители ван – Лира [9] и ван – Альбады [11]. Рассмотренные подходы используют решение задачи распада разрыва, могут эффективно применяться с любым приближенным римановским решателем [12], обеспечивают повышенный порядок точности (второй и выше), не порождают нефизические осцилляции решения вблизи газодинамических разрывов и зон больших градиентов параметров.

Для оценки возможностей алгоритмов, реализующих различные комбинированные и классические схемы определения потоков на границах расчетных элементов в рамках модифицированного метода расщепления по физическим процессам, проведена серия методических расчетов. Разработанные численные TVD – схемы повышенного порядка аппроксимации апробированы на ряде тестовых задач.

Особенностью реализации указанных численных схем на неструктурированных расчетных сетках является то, что для интегрирования полной системы трехмерных нестационарных уравнений газовой динамики используется решение одномерной задачи Римана в направлении внешней нормали к грани. Касательные скорости переносятся непосредственно на грань со стороны, откуда течет поток.

2. Постановка задачи трехмерного течения сжимаемого газа и краткое описание метода расщепления по физическим процессам

Рассматривается трехмерная задача течения совершенного вязкого сжимаемого газа. Для столбца консервативных переменных $\mathbf{w} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T$ система уравнений Навье – Стокса может быть записана в векторном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^x(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^y(\mathbf{w})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}^z(\mathbf{w})}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{G}^x(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^y(\mathbf{w})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}^z(\mathbf{w})}{\partial z}, \quad (1)$$

где $\mathbf{F}^x = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, \rho uE + pu)^T$, $\mathbf{F}^y = (\rho v, \rho v^2 + p, \rho vw, \rho vE + pv)^T$,

$\mathbf{F}^z = (\rho w, \rho w^2 + p, \rho wE + pw)^T$ – проекции вектора конвективного потока;

$\mathbf{G}^x = (0, \tau_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, u\tau_{xx} + v\tau_{yx} + w\tau_{zx} - q_x)^T$, $\mathbf{G}^y = (0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{zy}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{zy} - q_y)^T$,

$\mathbf{G}^z = (0, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z)^T$ – проекции вектора вязкого потока; ρ – плотность;

p – давление; u, v, w – компоненты вектора скорости; E – удельная полная энергия газа;

q_x, q_y, q_z – компоненты вектора теплового потока; $\tau_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора вязких напряжений ($\alpha = x, y, z$; $\beta = x, y, z$), которые записываются в виде:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \tau_{yy} &= \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \tau_{zz} &= \mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right), & \tau_{yx} &= \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где μ – коэффициент вязкости.

Для описания модели совершенного сжимаемого невязкого газа вектор вязкого потока полагался равным нулю. Таким образом, при $\mathbf{G} = 0$, система (1) переходит в систему уравнений Эйлера.

Полная система уравнений Навье – Стокса используется совместно с уравнением состояния совершенного газа:

$$p = (\gamma - 1)\rho U = (\gamma - 1)\rho \left[E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \right]. \quad (3)$$

Здесь $\gamma = c_p/c_v$; c_p, c_v – удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме соответственно; $U = c_v T$, E – удельные внутренняя и полная энергии газа, T – температура. В данной работе температурная зависимость термодинамических величин не учитывалась.

Для решения трехмерных уравнений газовой динамики на тетраэдральных расчетных сетках применялся подход, основанный на расщеплении по физическим процессам.

Основная идея метода состоит в расщеплении по физическим процессам исходной нестационарной системы уравнений Навье – Стокса (1). Стационарное решение задачи, если оно существует, получается в результате установления. Расчет каждого временного шага разбивается на несколько этапов. На первом этапе определяются промежуточные значения параметров потока без учета эффектов переноса. На втором этапе вычисляются эффекты переноса, учитывающие обмен между элементами – рассчитываются потоки массы через границы расчетных ячеек. На третьем этапе определяются в новый момент времени окончательные значения газодинамических параметров потока на основе законов сохранения массы, импульса и энергии для каждого элемента и всей системы в целом.

Для аппроксимации уравнений на каждом этапе применяются элементы метода конечных объемов. В рамках данного подхода определяются усредненные значения производных по контрольному объему (тетраэдральному элементу).

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right\rangle_{V_i} &= \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dV = \frac{1}{V_i} \int_{S_i} f \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} \approx \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^4 S_i^j n_{i,j}^\alpha f_i^j, \\ f &= (u, v, w, p, q_\alpha, \tau_{\alpha\beta}), \quad i = 1 \dots N, \quad j = 1 \dots 4, \quad \alpha = x, y, z; \beta = x, y, z. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь V_i – объем i -го тетраэдра; S_i^j – площадь поверхности j -й грани i -го элемента; $n_{i,j}^\alpha$ – x , y или z -я составляющая единичной нормали j -й грани i -го элемента.

Реализация изложенного выше метода расщепления по физическим процессам подразумевает решение большого количества однотипных подзадач по вычислению потоков через грани контрольных объемов. Для нахождения потоков на границах расчетных ячеек используется приближенное решение задачи о распаде произвольного разрыва. При этом особенностью реализации указанных численных алгоритмов на неструктурированных расчетных сетках является то, что для каждой грани достаточно находить решение одномерной

задачи Римана. Пространственные уравнения газовой динамики записываются в системе координат рассматриваемой грани, которая задается внешней нормалью и двумя взаимно перпендикулярными векторами, лежащими в плоскости грани. Решение одномерной задачи распада произвольного разрыва проводится в направлении внешней нормали с использованием нормальной к данной грани скорости. Касательные составляющие скорости просто переносятся на грань с той или другой стороны, в зависимости от направления потока.

3. Формулировка задачи о распаде разрыва

Разработанный подход к интегрированию трехмерных нестационарных уравнений газовой динамики [1–3] использует решение одномерной задачи Римана с входными данными, соответствующими параметрам газа в смежных элементах. Задача о распаде разрыва с начальными условиями (рис. 1) в рамках рассматриваемого подхода, в системе координат связанной с гранью формулируется в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\partial n} = 0; \quad (5)$$

$$\mathbf{w} = (\rho, \rho V, \rho E)^T, \quad \mathbf{F} = (\rho V, \rho V^2 + p, \rho VE + pV)^T,$$

$$\mathbf{w}(n, 0) = \begin{cases} \mathbf{w}_{L(I)}, n < 0; \\ \mathbf{w}_{R(II)}, n > 0. \end{cases} \quad (6)$$

В соотношениях (5), (6) \mathbf{w} – столбец консервативных переменных; \mathbf{F} – вектор конвективного потока в системе координат связанной с гранью; n – координата вдоль внешней нормали; здесь и далее $V = (un^x + vn^y + wn^z)$ – нормальная к грани составляющая вектора скорости.

Начальный разрыв, который характеризуется различными состояниями в левом и правом полупространстве (рис. 1) распадается на три волны: на левую волну, контактный разрыв и правую волну. Средняя волна – всегда контактный разрыв. Правая и левая волны могут быть как ударной волной, так и волной разрежения. На рис. 1 представлено четыре возможных типа волновых конфигураций. Волны делят пространство параметров на четыре области: I – область параметров “левой” ячейки сетки, II – область параметров “правой” ячейки, III – область между левой волной и контактным разрывом, IV – область между контактным разрывом и правой волной. Вследствие произвольной ориентации внешней нормали к границе элемента неструктурированной сетки, ячейкой “слева” будем считать текущую ячейку i , а ячейкой “справа” – соседний через данную грань расчетный элемент i_{neight} . Свойством рассматриваемой системы уравнений газовой динамики является, то, что при переходе через контактную поверхность только плотность претерпевает разрыв, а скорость и давление непрерывны. Следовательно, для давления и скорости выполняются соотношения: $p_{III} = p_{IV}$, $V_{III} = V_{IV}$. Плотность принимает значения ρ_{III} и ρ_{IV} по разные стороны разрыва.

В рассмотренной выше постановке, задача (5) совместно с уравнением состояния для совершенного газа сводится к вычислению значений давления $p_{III} = p_{IV}$ и скорости $V_{III} = V_{IV}$ на контактном разрыве.

Ниже изложены основные принципы построения эффективных TVD – схем повышенного порядка аппроксимации с использованием решения задачи о распаде разрыва.

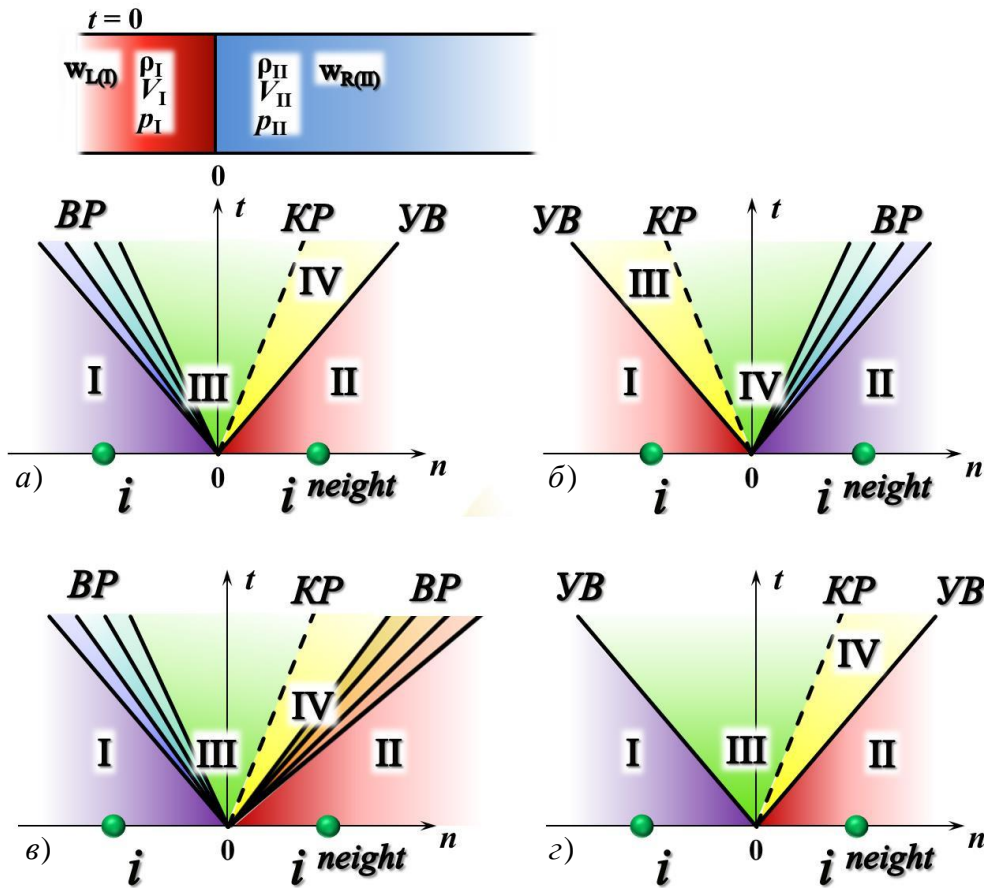


Рис.1. Постановка одномерной задачи Римана и набор возможных решений: а) левая волна разрежения, контактный разрыв, правая ударная волна; б) левая ударная волна, контактный разрыв, правая волна разрежения; в) левая волна разрежения, контактный разрыв, правая волна разрежения; г) левая ударная волна, контактный разрыв, правая ударная волна

4. Метод взвешенного усредненного потока

Метод взвешенного усредненного потока (WeightedAverageFlux, WAF) это модификация противопоточнойсхемы С.К. Годунова первого порядка точности [6, 7], с целью получения второго порядка аппроксимации. Подход WAF является детерминистическим и предполагает вычисление потока на границе расчетных ячеек через среднее интегральное значение потоков для полной структурырешения задачи распада произвольного разрыва из соотношения:

$$F_{WAF} = \frac{1}{\Delta n_i + \Delta n_{i_neigh}} \int_{-\Delta n_i}^{\Delta n_{i_neigh}} \mathbf{F} \left[\hat{\mathbf{w}} \left(n, \frac{\Delta t}{2} \right) \right] dn. \quad (7)$$

Здесь $\hat{\mathbf{w}}(n, t)$ – решение задачи Римана с кусочно-постоянным распределением параметров; $\Delta n_i, \Delta n_{i_neigh}$ – расстояния от центров смежных ячеек до рассматриваемой грани. Для более компактной записи выражений введем следующее обозначение: $\Delta \tilde{n} = \Delta n_i + \Delta n_{i_neigh}$.

Рис. 2, 3 иллюстрируют процесс вычисления интеграла (7) для двух конфигураций, реализующихся при распаде разрыва (рис. 1, случаи г и а соответственно).

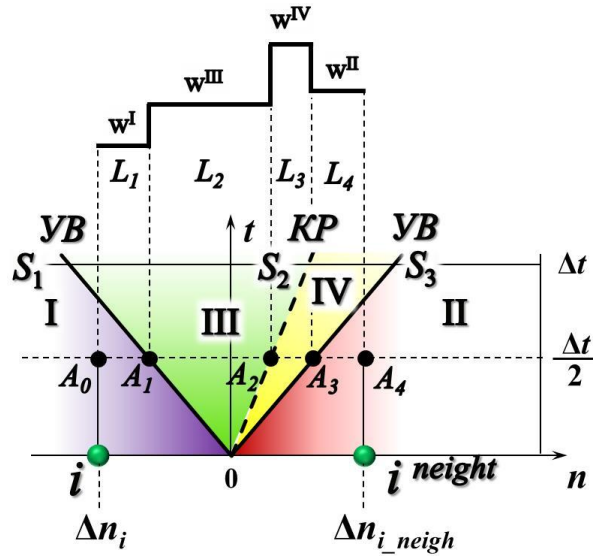


Рис.2. Схема решения задачи Римана в случае реализации волновой структуры в виде левой ударной волны, контактного разрыва и правой ударной волны

Для структуры, которая не содержит волну разрежения, (рис. 2) с учетом (7), можно записать выражение для взвешенного усредненного потока:

$$\mathbf{F}_{\text{WAF}} = \sum_{k=1}^4 \alpha_k \mathbf{F}(\mathbf{w}^k), \quad k = 1, \dots, 4 \quad (8)$$

где $\alpha_k = |L_k|/\Delta\tilde{n}$ – весовые коэффициенты, представляющие собой нормализованные длины сегментов $L_1 \dots L_4$. Следует особо отметить, что в этой формуле и далее $\mathbf{w}^1 = \mathbf{w}^I$, $\mathbf{w}^2 = \mathbf{w}^III$, $\mathbf{w}^3 = \mathbf{w}^IV$, $\mathbf{w}^4 = \mathbf{w}^II$ (см. рис. 2).

Коэффициенты α_k в соотношении (8) вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 0.5(C_k - C_{k-1}), \quad k = 1 \dots 4; \\ C_k &= \frac{\Delta t \cdot S_k}{\Delta\tilde{n}}, \quad C_0 = -1, \quad C_4 = 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь S_1, S_3, S_2 – скорости распространения ударных волн и контактного разрыва соответственно; C_k – число Куранта для k -й волны, распространяющейся со скоростью S_k . Подставляя соотношения для C_k в первое выражение (9) получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.5(C_1 + 1) = 0.5 \left(\frac{\Delta t \cdot S_1}{\Delta\tilde{n}} + 1 \right); \\ \alpha_2 &= 0.5(C_2 - C_1) = 0.5 \cdot \frac{\Delta t \cdot (S_2 - S_1)}{\Delta\tilde{n}}; \\ \alpha_3 &= 0.5(C_3 - C_2) = 0.5 \cdot \frac{\Delta t \cdot (S_3 - S_2)}{\Delta\tilde{n}}; \\ \alpha_4 &= 0.5(1 - C_3) = 0.5 \left(1 - \frac{\Delta t \cdot S_3}{\Delta\tilde{n}} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя α_k из (10) в (8) можно получить альтернативную формулу для вычисления взвешенного усредненного потока \mathbf{F}_{WAF} :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{WAF} &= \alpha_1 \mathbf{F}(\mathbf{w}^1) + \alpha_2 \mathbf{F}(\mathbf{w}^2) + \alpha_3 \mathbf{F}(\mathbf{w}^3) + \alpha_4 \mathbf{F}(\mathbf{w}^4) = \\
 &= 0.5 \left[(C_1 + 1) \mathbf{F}^1 + (C_2 - C_1) \mathbf{F}^2 + (C_3 - C_2) \mathbf{F}^3 + (1 - C_3) \mathbf{F}^4 \right] = \\
 &= 0.5 (\mathbf{F}^1 + \mathbf{F}^4) - 0.5 \sum_{k=1}^3 C_k \Delta \mathbf{F}^k
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

В этом соотношении $\Delta \mathbf{F}^k = \mathbf{F}^{k+1} - \mathbf{F}^k$. Для более краткой записи в (11) используются следующие обозначения $\mathbf{F}(\mathbf{w}^k) = \mathbf{F}^k$, причем $\mathbf{F}^1 = \mathbf{F}^I, \mathbf{F}^2 = \mathbf{F}^{III}, \mathbf{F}^3 = \mathbf{F}^{IV}, \mathbf{F}^4 = \mathbf{F}^{II}$ (в соответствии с порядком нумерации областей, принятым на рис. 2).

Далее рассмотрим еще один возможный вариант решения в виде левой волны разрежения, контактного разрыва и правой ударной волны (рис. 3).

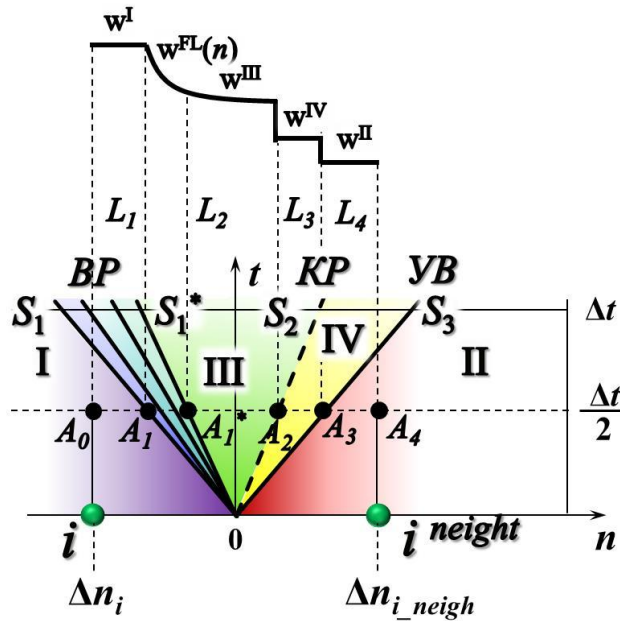


Рис.3. Решение задачи распада произвольного разрыва для конфигурации левая волна разрежения, контактный разрыв, правая ударная волна

Для представленной конфигурации вычисление выражения (7) включает расчет интеграла вдоль волны разрежения:

$$\frac{1}{\Delta \tilde{n}} \int_{A_1}^{A_1^*} \mathbf{F} \left[\hat{\mathbf{w}} \left(n, \frac{\Delta t}{2} \right) \right] dn
 \tag{12}$$

Этот интеграл может быть найден точно, тогда в выражение для взвешенного усредненного потока необходимо включить еще одно дополнительное состояние $\mathbf{w}^{FL}(n)$, учесть скорость распространения хвоста левой волны разрежения S_1^* и добавить соответствующий весовой коэффициент. Скорости распространения “головы” S_1 и “хвоста” S_1^* левой волны разрежения вычисляются по формулам:

$$S_1 = V_I - c_I, \quad S_1^* = V_{III} - c_{III},
 \tag{13}$$

где c_I, c_{III} – скорости звука в областях I и III.

Точное решение задачи Римана по классической схеме Годунова подробно обсуждалось в предшествующей статье [12]. Для снижения трудоемкости вычислений можно вос-

пользоваться приближенной оценкой. Если рассматривать область волны разрежения вместе с ближайшим состоянием с постоянными параметрами.

$$\frac{1}{\Delta \tilde{n}} \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \left[\hat{\mathbf{w}} \left(n, \frac{\Delta t}{2} \right) \right] dn \approx \frac{1}{2} (C_2 - C_1) \mathbf{F}^2. \quad (14)$$

Здесь C_1 вычисляется с использованием S_1 – скорости распространения “головы” левой волны разрежения по соотношению (9) с учетом (13). Значение \mathbf{F}^2 определяется из следующих соображений:

$$\mathbf{F}^2 = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{w}^2) & \text{для дозвуковой волны разрежения} \\ \mathbf{F}(\mathbf{w}^{FL}(0)) & \text{для трансзвуковой волны разрежения} \end{cases} \quad (15)$$

Рис. 4 иллюстрирует случай трансзвуковой волны разрежения. Состояние, характеризующееся набором параметров $\mathbf{w}^{FL}(0)$, лежит внутри веера волн разрежения. Решение в области волны разрежения для идеального газа может быть найдено с использованием известных соотношений [5]:

$$\mathbf{U}^{FL} = \begin{cases} \rho = \rho_1 \left[\frac{2}{(\gamma+1)} + \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)c_1} (V_1 - \frac{n}{t}) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}; \\ V = \frac{2}{(\gamma+1)} \left[c_1 + \frac{(\gamma-1)}{2} c_1 + \frac{n}{t} \right]; \\ p = p_1 \left[\frac{2}{(\gamma+1)} + \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)c_1} (V_1 - \frac{n}{t}) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \end{cases} \quad (16)$$

Здесь и далее $\mathbf{U} = (\rho, V, p)^T$ – столбец “простых” переменных.

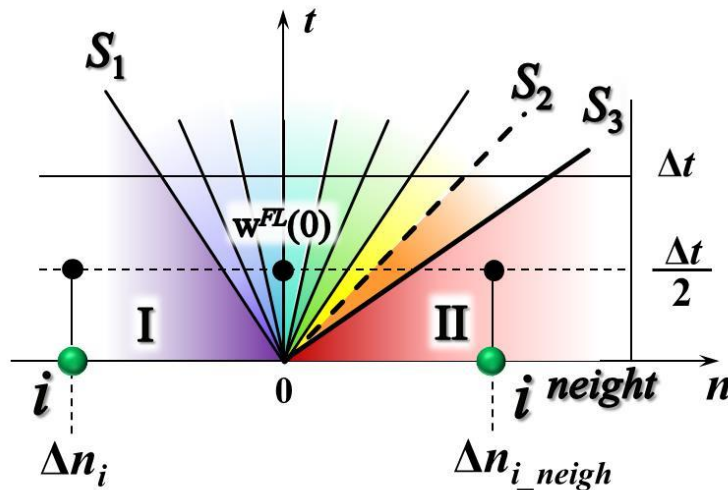


Рис.4. Оценка взвешенного усредненного потока для решения, содержащего левую трансзвуковую волну разрежения

Для правой волны разрежения соответствующие соотношения будут иметь вид аналогичный (14) – (16):

$$\frac{1}{\Delta \tilde{n}} \int_{A_2}^{A_3} \mathbf{F} \left[\hat{\mathbf{w}} \left(n, \frac{\Delta t}{2} \right) \right] dn \approx \frac{1}{2} (C_3 - C_2) \mathbf{F}^3. \quad (17)$$

$$\mathbf{F}^3 = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{w}^3) & \text{для дозвуковой волны разрежения} \\ \mathbf{F}(\mathbf{w}^{FR}(0)) & \text{для трансзвуковой волны разрежения} \end{cases} \quad (18)$$

$$\mathbf{U}^{FR} = \begin{cases} \rho = \rho_{II} \left[\frac{2}{(\gamma+1)} - \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)c_{II}} \left(V_{II} - \frac{n}{t} \right) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}; \\ V = \frac{2}{(\gamma+1)} \left[-c_{II} + \frac{(\gamma-1)}{2} c_{II} + \frac{n}{t} \right]; \\ p = p_{II} \left[\frac{2}{(\gamma+1)} - \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)c_{II}} \left(V_{II} - \frac{n}{t} \right) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}, \end{cases}, \quad (19)$$

Порядок вычисления остальных частей интеграла (7) не отличается от случая левой ударной волны, контактного разрыва и правой ударной волны, рассмотренного выше.

Другие конфигурации, реализующиеся в результате распада произвольного разрыва, не требуют специального рассмотрения. Для них решение может быть построено с использованием соотношений, полученных для всех возможных типов волн: правая ударная волна, левая ударная волна, контактный разрыв, правая волна разрежения, левая волна разрежения. Таким образом, компоненты $\mathbf{F}(\mathbf{w}^1)$ и $\mathbf{F}(\mathbf{w}^4)$ для всех конфигураций определяются одинаковым образом, а значения $\mathbf{F}(\mathbf{w}^2)$ и $\mathbf{F}(\mathbf{w}^3)$ зависят от структуры решения. В результате получаем для структуры решения левая ударная волна, контактный разрыв, правая ударная волна (рис. 1, *г*; рис. 2):

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}^1) = \mathbf{F}(\mathbf{w}^I); \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}^2) = \mathbf{F}(\mathbf{w}^{III}); \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}^3) = \mathbf{F}(\mathbf{w}^{IV}); \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}^4) = \mathbf{F}(\mathbf{w}^{II}). \quad (20)$$

Для конфигурации левая волна разрежения, контактный разрыв, правая ударная волна (рис. 1, *а*; рис. 3):

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}^1) = \mathbf{F}(\mathbf{w}^I); \quad \mathbf{F}^2 = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{w}^2) & \text{для дозвуковой волны разрежения} \\ \mathbf{F}(\mathbf{w}^{FL}(0)) & \text{для трансзвуковой волны разрежения} \end{cases} \quad (21)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}^3) = \mathbf{F}(\mathbf{w}^{IV}); \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}^4) = \mathbf{F}(\mathbf{w}^{II}).$$

Для левой ударной волны, контактного разрыва и правого веера волн разрежения (рис. 1, *б*) справедливо:

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}^1) = \mathbf{F}(\mathbf{w}^I); \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}^2) = \mathbf{F}(\mathbf{w}^{III});$$

$$\mathbf{F}^3 = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{w}^3) & \text{для дозвуковой волны разрежения} \\ \mathbf{F}(\mathbf{w}^{FR}(0)) & \text{для трансзвуковой волны разрежения} \end{cases}; \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}^4) = \mathbf{F}(\mathbf{w}^{II}). \quad (22)$$

И, наконец, в случае левой волны разрежения, контактного разрыва, правой волны разрежения имеем (рис. 1, *в*):

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}^1) = \mathbf{F}(\mathbf{w}^I); \quad \mathbf{F}^2 = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{w}^2) & \text{для дозвуковой волны разрежения} \\ \mathbf{F}(\mathbf{w}^{FL}(0)) & \text{для трансзвуковой волны разрежения} \end{cases} \quad (23)$$

$$\mathbf{F}^3 = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{w}^3) & \text{для дозвуковой волны разрежения} \\ \mathbf{F}(\mathbf{w}^{FR}(0)) & \text{для трансзвуковой волны разрежения} \end{cases}; \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}^4) = \mathbf{F}(\mathbf{w}^II).$$

Коэффициенты α_k для рассмотренных вариантов определяются из соотношений (9), (10), с учетом того, что вычисление скоростей S_1, S_2, S_3 , для каждой конфигурации, имеет свои особенности, рассмотренные выше.

Для решения задачи распада произвольного разрыва (аппроксимации потоков), в рамках реализации технологии взвешенного усредненного потока, могут использоваться любые методы точного или приближенного решения задачи Римана. В предшествующей работе [12] проведено подробное исследование таких подходов к решению автомодельной задачи распада разрыва как: классическая схема Годунова [13], основанная на точном решении задачи о распаде произвольного разрыва; схемы расщепления вектора потока Стегера–Уорминга [14], ван – Лира [15, 16], Лио и Стефана (метод AUSM) [17, 18]; методы типа Годунова с приближенным решением задачи Римана по схемам Хартена–Лакса–ван-Лира (HLL [19] и HLLC [20,21]), Русанова [22], Роу [23], Ошера [24–26].

Например, использование HLL или HLLC подходов [12], не рассматривающих волны разрежения в структуре решения, значительно упрощает задачу интегрирования этих римановских решателей в WAF схему.

5. TVD версия метода взвешенного усредненного потока

Рассмотренная выше WAF схема имеет второй порядок точности по времени и пространству. Следовательно, этот метод, в соответствии с теоремой Годунова [27], может проявлять неустойчивость вблизи газодинамических разрывов и зон больших градиентов параметров. Для подавления нефизических осцилляций численного решения разработаны эффективные методы, основанные на использовании полиномиальной реконструкции параметров к границам расчетных элементов специальных функций-ограничителей. Так называемые лимитеры ограничивают наклоны расчетных параметров внутри дискретных ячеек сетки, обеспечивая выполнение TVD условия невозрастания полной вариации численного решения (Total Variation Diminishing) при переходе от одного временного слоя к другому [4]. Для нелинейной системы уравнений газовой динамики TVD свойство разностной схемы не может быть строго обосновано и применение TVD концепции носит эмпирический характер [5]. Для трехволновой конфигурации, образующейся при распаде разрыва необходимо вычислять три ограничивающих функции ϕ^k на границе расчетных ячеек. В ходе реализации подхода контролируется изменение трех независимых параметров. TVD модификация WAF метода вычисления потока (11) заключается в следующем:

$$\mathbf{F}_{\text{TVD_WAF}} = 0.5(\mathbf{F}^1 + \mathbf{F}^4) - 0.5 \sum_{k=1}^3 \text{sign}(C_k) \phi^k \Delta \mathbf{F}^k. \quad (24)$$

Здесь $\phi^k = \phi^k(r^k)$ – функция-ограничитель, область значений которой принадлежит TVD области [5]. Параметр r^k определяет k -ю волну, образующуюся в ходе распада разрыва, и представляет собой относительное изменение решения для одного слоя (или нескольких слоев в зависимости от требуемого порядка аппроксимации) прилегающих ячеек, в соответствии с принятым шаблоном. Обычно вариация решения оценивается по изменению плотности или удельной внутренней энергии – величины, которая изменяются при переходе через любой тип волн, образующихся в ходе распада произвольного разрыва.

При решении практических задач часто используются такие ограничители потоков как:

ограничитель SUPERBEE [10]:

$$\varphi_{sb}^k(r^k, |C_k|) = \begin{cases} 1, & r^k \leq 0 \\ 1 - 2(1 - |C_k|) \cdot r^k, & 0 \leq r^k \leq 0.5 \\ |C_k|, & 0.5 \leq r^k \leq 1 \\ 1 - (1 - |C_k|) \cdot r^k, & 1 \leq r^k \leq 2 \\ 2|C_k| - 1, & r^k \geq 2 \end{cases} \quad (25)$$

ограничитель MINBEE (MINMOD) [10]:

$$\varphi_{mb}^k(r^k, |C_k|) = \begin{cases} 1, & r^k \leq 0 \\ 1 - (1 - |C_k|) \cdot r^k, & 0 \leq r^k \leq 1 \\ |C_k|, & r^k \geq 1 \end{cases} \quad (26)$$

ограничитель ван-Лиры [9]:

$$\varphi_{vl}^k(r^k, |C_k|) = \begin{cases} 1, & r^k \leq 0 \\ 1 - \frac{(1 - |C_k|) \cdot 2r^k}{1 + r^k}, & r^k \geq 0 \end{cases} \quad (27)$$

ограничитель ван-Альбады [11]:

$$\varphi_{va}^k(r^k, |C_k|) = \begin{cases} 1, & r^k \leq 0 \\ 1 - \frac{(1 - |C_k|) \cdot r^k \cdot (1 + r^k)}{1 + (r^k)^2}, & r^k \geq 0 \end{cases} \quad (28)$$

В соотношениях (25) – (28) C_k – число Куранта (9) для k -й волны, распространяющейся со скоростью S_k .

6. Схема MUSCL

Среди современных методов сквозного счета широкое распространение получили так называемые MUSCL (MonotonicUpstreamCenteredScheme for Conservation Laws) схемы [8,9]. MUSCL подход применяется для аппроксимации потоков на границах расчетных ячеек с высоким порядком точности и является развитием противопоточного метода С.К. Годунова первого порядка точности [6,7]. Технология использует специальную процедуру реконструкции газодинамических переменных на гранях, разделяющих ячейки. Реконструкция проводится на основе значений соответствующих величин в центрах нескольких соседних ячеек с требуемой точностью, которая определяется используемым шаблоном. Численные потоки находятся из точного или приближенного решения задачи Римана [12] на основе значений параметров, реконструированных на двух сторонах грани. При этом заданный порядок точности сохраняется. Процедура реконструкции может применяться как к консервативным $\mathbf{w} = (\rho, \rho V, \rho E)^T$, так и к примитивным (физическим) $\mathbf{U} = (\rho, V, p)^T$ переменным.

Кусочно-постоянная реконструкция переменных, при которой величины в каждой расчетной ячейке считаются постоянными, приводит к схеме первого порядка точности.

Для реализации MUSCL схемы с порядком точности не меньше второго восстановление вектора примитивных или консервативных переменных на гранях по значениям из соседних ячеек проводится с использованием других распределений – кусочно-линейного, кусочно-параболического и т.п. [28]. В этом случае осредненные по ячейке значения параметров w_i заменяются соответствующими кусочными функциями. Процедура реконструкции переменных на одной из граней треугольной сетки, для линейного распределения параметров внутри ячейки, подробно изложена в [28]. Рис. 5 иллюстрирует ее основные этапы на примере треугольной неструктурированной сетки. Сначала вычисляется градиент распределения соответствующего параметра в i -й ячейке с использованием значений в центрах текущей и соседних ячеек Q_i, Q_j, Q_k в соответствии с принятым шаблоном реконструкции (рис. 5).

$$\nabla Q = (Q_x, Q_y)^T$$

$$Q_x = \frac{\begin{vmatrix} Q_j - Q_i & y_j - y_i \\ Q_k - Q_i & y_k - y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_j - x_i & y_j - y_i \\ x_k - x_i & y_k - y_i \end{vmatrix}}, \quad Q_y = \frac{\begin{vmatrix} x_j - x_i & Q_j - Q_i \\ x_k - x_i & Q_k - Q_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_j - x_i & y_j - y_i \\ x_k - x_i & y_k - y_i \end{vmatrix}} \quad (29)$$

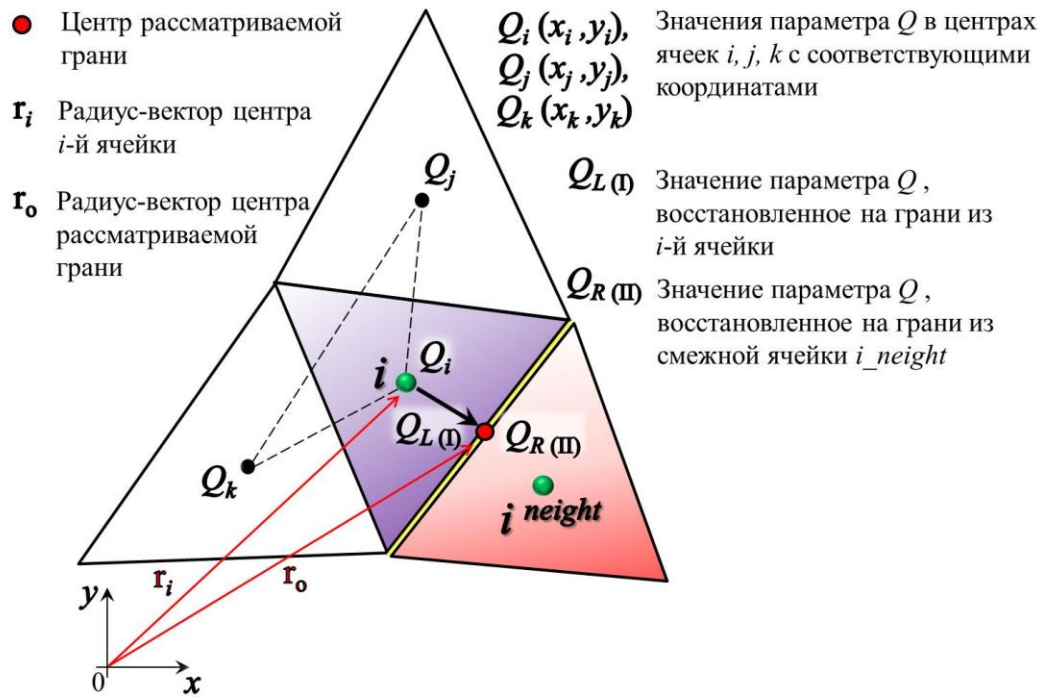


Рис.5. Восстановление значения параметра Q на грани элемента неструктурированной расчетной сетки

Общая формула реконструкции значения параметра Q в произвольной точке $A(x_A, y_A)$ i -й ячейки может быть записана как

$$Q_A(x_A, y_A) = Q_i + \nabla Q \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_i). \quad (30)$$

Здесь Q_i – значение параметра Q в центре i -й ячейки, \mathbf{r}_A – радиус-вектор точки A , \mathbf{r}_i – радиус-вектор центра i -й ячейки. Из (30) следует, что значение параметра Q , реконструированное из i -й ячейки, вычисляется из соотношения

$$Q_{L(I)} = Q_i + \nabla Q \cdot (\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_i), \quad (31)$$

где \mathbf{r}_0 – радиус-вектор центра рассматриваемой грани.

Восстановление $Q_{R(\text{II})}$ – значения параметра Q в центре грани из смежной ячейки i_neight проводится аналогичным образом. Исследованная методика экстраполяции параметров на границу смежных элементов легко обобщается на трехмерный случай.

Для дальнейшей реализации алгоритма MUSCL используем реконструкцию вектора консервативных переменных на рассматриваемую границу “слева” (со стороны текущей ячейки i) и “справа” (со стороны смежной ячейки i_neight) \mathbf{w}_L^I и \mathbf{w}_R^{II} соответственно. Вычисленные значения применяются как исходные данные для решения задачи распада разрыва.

Следует особо отметить, что при использовании кусочно-линейной аппроксимации параметров в ячейках необходимо решать так называемую обобщенную задачу Римана, структура решения которой отличается от классической (рис. 1).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{w})}{\partial n} &= 0; \\ \mathbf{w}(n, 0) &= \begin{cases} \mathbf{w}_L(n), & n < 0; \\ \mathbf{w}_R(n), & n > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

В противоположность традиционной постановке (6), где распределения величин в смежных ячейках считались кусочно-постоянными, волны не будут распространяться по прямым линиям в пространстве (n, t) – их траектории в ячейках с переменными параметрами будут искривлены.

Впервые метод, основанный на решении обобщенной задачи Римана, был развит в работе [29]. Строгое решение задачи распада разрыва для системы нелинейных законов сохранения в обобщенной постановке является исключительно сложным процессом, поэтому целесообразно использовать приближенные методы оценки потоков. Во многих подходах решение обобщенной задачи заменяется классическим решением с кусочно-постоянным представлением параметров, при этом в качестве исходных данных используются значения \mathbf{w}_L^I и \mathbf{w}_R^{II} , полученные экстраполяцией на границу.

6. Применение MUSCL подхода в рамках TVD концепции

Метод дает второй порядок точности на гладких решениях, однако, рассмотренная схема не является монотонной, и порождает нефизические осцилляции в окрестности зон больших градиентов и вблизи газодинамических разрывов. Для того, чтобы избежать появления осцилляций численного решения, применяются ограничители наклонов, уменьшающие величину градиентов $\nabla w(j)_L$ и $\nabla w(j)_R$. TVD версия метода строится следующим образом:

$$\begin{aligned} w(j)_{L(\text{I})} &= w(j)_i + \psi_i \nabla w(j)_L \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i), \\ w(j)_{R(\text{II})} &= w(j)_{i_neigh} + \psi_i \nabla w(j)_R \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{i_neigh}), \quad j = 1 \dots 3 \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь $w(j) - j$ -я компонента вектора консервативных переменных $\mathbf{w} = (w(1), w(2), w(3))^T = (\rho, \rho V, \rho E)^T$; $w(j)_{L(\text{I})}$, $w(j)_{R(\text{II})}$ – значения параметров $w(j)$, реконструированные на грани со стороны i -й и смежной (i_neight) ячеек соответственно; $\nabla w(j)_L$, $\nabla w(j)_R$ – градиенты распределения каждой из консервативных переменных $w(j)$ в i -й и смежной (i_neight) ячейках; $w(j)_i$, $w(j)_{i_neigh}$ – значения параметров в центре i -й и смежной ячеек; ψ_i – ограничитель наклона; \mathbf{r}_i , \mathbf{r}_{i_neigh} , \mathbf{r}_0 – радиус-векторы центров ячеек i и i_neight , а также центра грани.

В качестве ограничителей наклонов используются функции подобные (но не аналогичные) ограничителям потоков (25) – (28) [5]:

Ограничитель наклона типа SUPERBEE:

$$\Psi_{sb}(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0 \\ 2r, & 0 \leq r \leq 0.5 \\ 1, & 0.5 \leq r \leq 1 \\ \min[r, \varepsilon(r), 2], & r \geq 1 \end{cases} \quad (34)$$

ограничитель наклона подобный MINBEE (MINMOD):

$$\Psi_{mb}(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0 \\ r, & 0 \leq r \leq 1 \\ \min[1, \varepsilon(r)], & r \geq 1 \end{cases} \quad (35)$$

ограничитель наклона типа ван-Лиры:

$$\Psi_{vl}(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0 \\ \min\left[\frac{2r}{1+r}, \varepsilon(r)\right], & r \geq 0 \end{cases} \quad (36)$$

ограничитель наклона подобный функцииван-Альбады:

$$\Psi_{va}(r) = \begin{cases} 0, & r \leq 0 \\ \min\left[\frac{r(1+r)}{1+r^2}, \varepsilon(r)\right], & r \geq 0 \end{cases} \quad (37)$$

В формулах (34) – (37) параметр $r = r(\nabla w(j)_L, \nabla w(j)_R)$ характеризует соотношение между градиентами в соседних ячейках, а функция $\varepsilon(r)$ определяет область значений параметра r , при которых схема будет удовлетворять условию TVD[5].

7. Исследование эффективности численных схем

С целью оценки эффективности построенных алгоритмов проводилась их апробация на широко известных одномерных задачах Римана о распаде разрыва для различных исходных данных. Сравнительный анализ проводился на основе сопоставления результатов применения следующих рассмотренных подходов: классического метода взвешенного усредненного потока (WAF), его TVD версии с ограничением потоков лимитерами MINMOD, SUPERBEE, ван-Лиры и ван-Альбады; MUSCL схемы, реализованной в рамках традиционного и TVD подходов. Для ограничения реконструированных значений при выполнении алгоритмов TVD модификации MUSCL метода использовались ограничители наклонов, подобные функциям MINMOD, SUPERBEE, ван-Лиры и ван-Альбады. Для вычисления потоков в ходе реализации рассмотренных схем использовался точный римановский решатель [13] и различные приближенные подходы к решению задачи распада разрыва, подробно рассмотренные в [12]. При этом особое внимание уделялось исследованию важных для расчета высокоскоростных течений свойств схем: способность сохранять монотонность при воспроизведении разрывных решений; качество разрешения слабых и интенсивных волн; диссипативные свойства в областях, где искомые решения имеют небольшие перепады значений; свойство консервативности, от которого зависит точность определения скоростей распространения ударных волн и контактных разрывов.

На рис. 6 – 9 приведены некоторые результаты применения реализованных TVD-схем повышенного порядка аппроксимации с интегрированным римановским решателем HLLC для решения модифицированной задачи Сода. Рисунки иллюстрируют типичную волновую конфигурацию: разрыв, заданный начальными данными, распадается на ударную волну и

контактный разрыв, бегущие вправо, а также, волну разрежения, распространяющуюся влево от начального положения разрыва.

Начальные величины слева и справа от разрыва в простых переменных задавались как:

$$\mathbf{U}_I = (\rho_I, V_I, p_I)^T = (1, 0.75, 1)^T, \quad \mathbf{U}_{II} = (\rho_{II}, V_{II}, p_{II})^T = (0.125, 0, 0.1)^T. \quad (38)$$

От классической задачи об ударной трубе, модифицированный тест Сода отличает наличие ненулевой начальной скорости слева от разрыва. Задача полезна для проверки энтропийных свойств схем. Решение ищется в расчетной области $0 < n < 1$. Исходное положение разрыва $n = 0.3$. Показатель адиабаты γ равен 1.4. Выбор шага по времени осуществлялся из условия устойчивости численных схем Куранта – Фридрихса – Леви (CFL-условия) [30,31].

Рис. 6 – 9 демонстрируют несколько графиков плотности, давления, скорости и удельной внутренней энергии для числа расчетных ячеек $N = 100$ в момент времени $t = 0.2$, полученные с применением рассмотренных численных подходов. На соответствующие графические области также помещены: точное решение задачи Римана, полученное с использованием классической схемы Годунова, результаты расчета традиционным HLLC методом [12].

Как отмечалось выше, применение немонотонного WAF метода второго порядка точности приводит к возникновению осцилляций решения в областях значительных градиентов параметров, что подтверждается результатами моделирования (рис. 6 – 9). Аналогичная картина, хотя и с меньшими осцилляциями, наблюдается при использовании MUSCL схемы второго порядка аппроксимации без применения ограничителей наклонов. Использование функций-ограничителей потоков и наклонов в рамках TVD концепции позволяет эффективно подавить неустойчивости и получить хорошее качество разрешения разрывов. Лимитер SUPERBEE дает возможность максимально приблизиться к точному решению, однако на соответствующих зависимостях видны чуть заметные осцилляции. На графиках, полученных с использованием функции MINMOD (MINBEE), напротив, нет даже малейших признаков неустойчивости решения, однако, наблюдается размывание моделируемых разрывов, особенно контактного разрыва (см., например, рис. 9). Ограничители ван-Лиры и ван-Альбады занимают промежуточное положение по точности результатов и показателям устойчивости.

На основе проведенного анализа можно сделать вывод, что, несмотря на трудность реализации и высокую вычислительную сложность рассмотренных комбинированных подходов, удастся существенно повысить точность описания волновых структур, например, по сравнению с классическим HLLC методом (рис. 6 – 9). Следует отметить, что по результатам исследования эффективности наиболее известных римановских решателей, представленным в предыдущей работе [12], традиционная схема HLLC обладает одними из самых лучших показателей качества воспроизведения разрывных решений.

8. Заключение

На базе модифицированного метода расщепления по физическим процессам реализованы противопоточные TVD – WAF и TVD – MUSCL схемы повышенного порядка аппроксимации. Выполнена оценка эффективности построенных алгоритмов по результатам аппроксимации на известных одномерных задачах Римана о распаде разрыва для различных исходных данных. Проведен сравнительный анализ следующих подходов: классического метода взвешенного усредненного потока (WAF), его TVD версии с ограничением потоков лимитерами MINMOD, SUPERBEE, ван-Лиры и ван-Альбады; MUSCL схемы, реализованной в рамках традиционного и TVD подходов. Для ограничения реконструированных значений при выполнении алгоритмов TVD модификации MUSCL метода использовались ограничители наклонов, подобные функциям MINMOD, SUPERBEE, ван-Лиры и ван-Альбады.

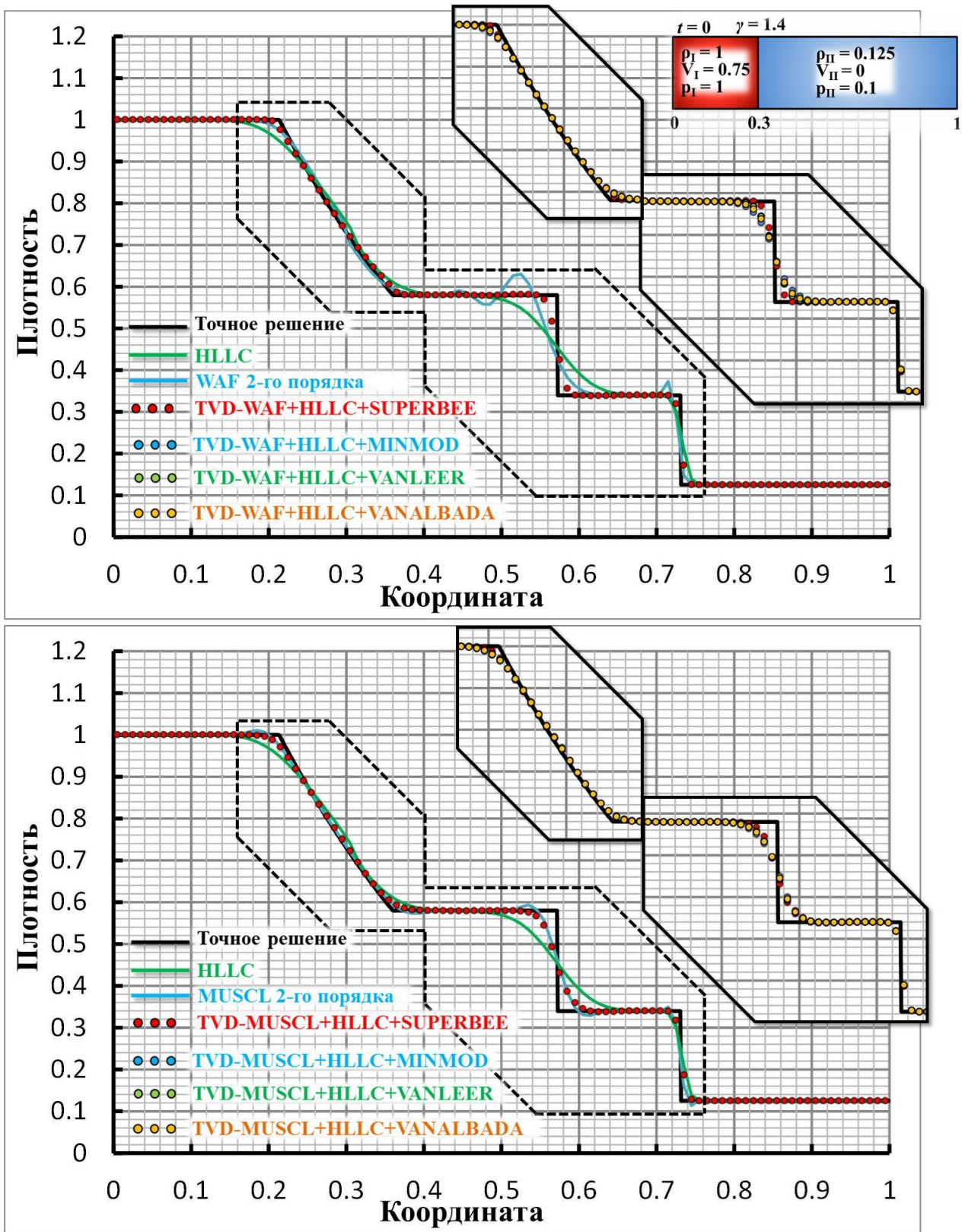


Рис.6. Результаты тестирования реализованных алгоритмов на решении одномерной модифицированной задачи Сода. Графики плотности для числа расчетных ячеек $N = 100$ в момент времени $t = 0.2$

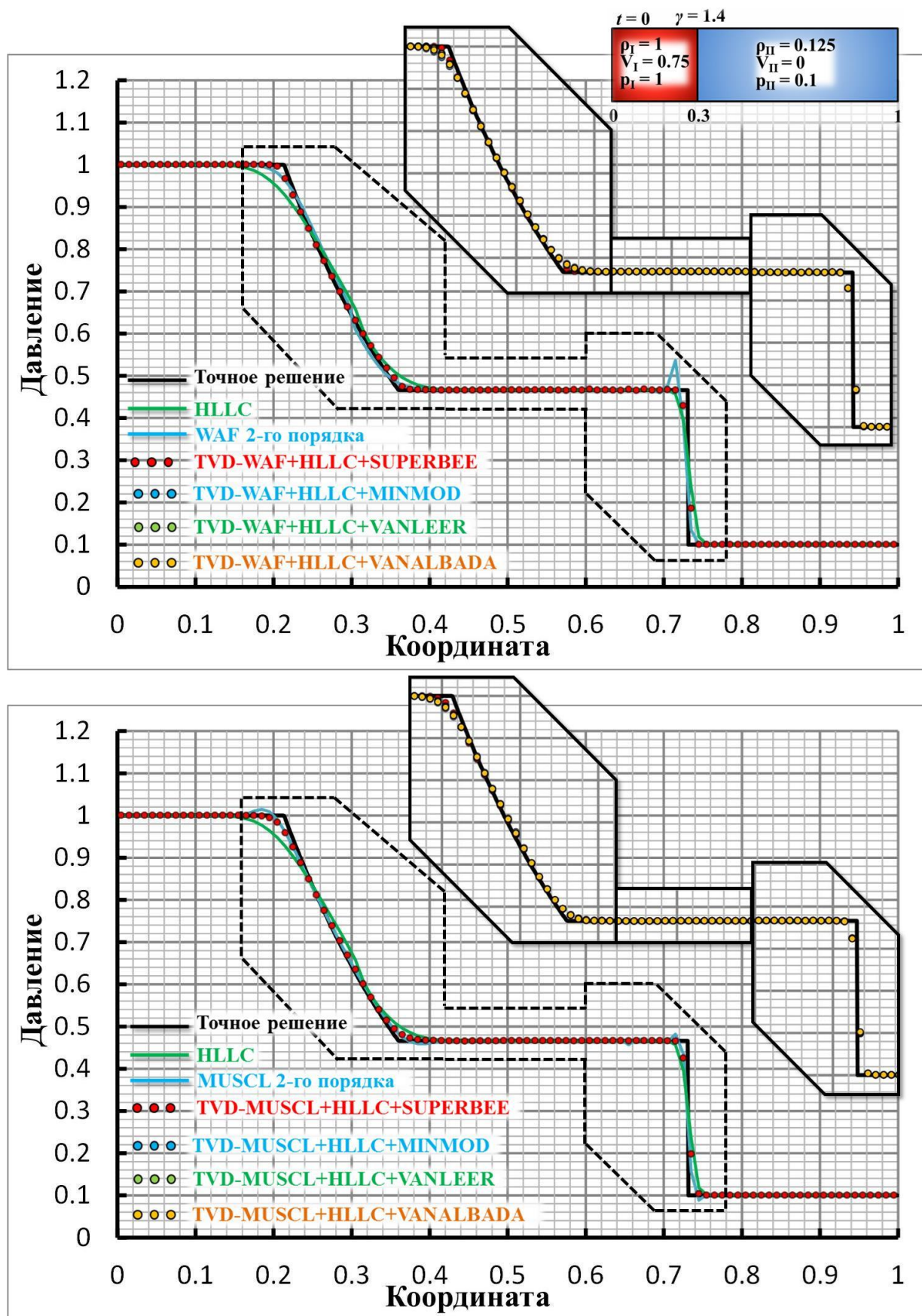


Рис.7. Результаты тестирования реализованных алгоритмов на решении одномерной модифицированной задачи Сода. Графики давления для числа расчетных ячеек $N = 100$ в момент времени $t = 0.2$

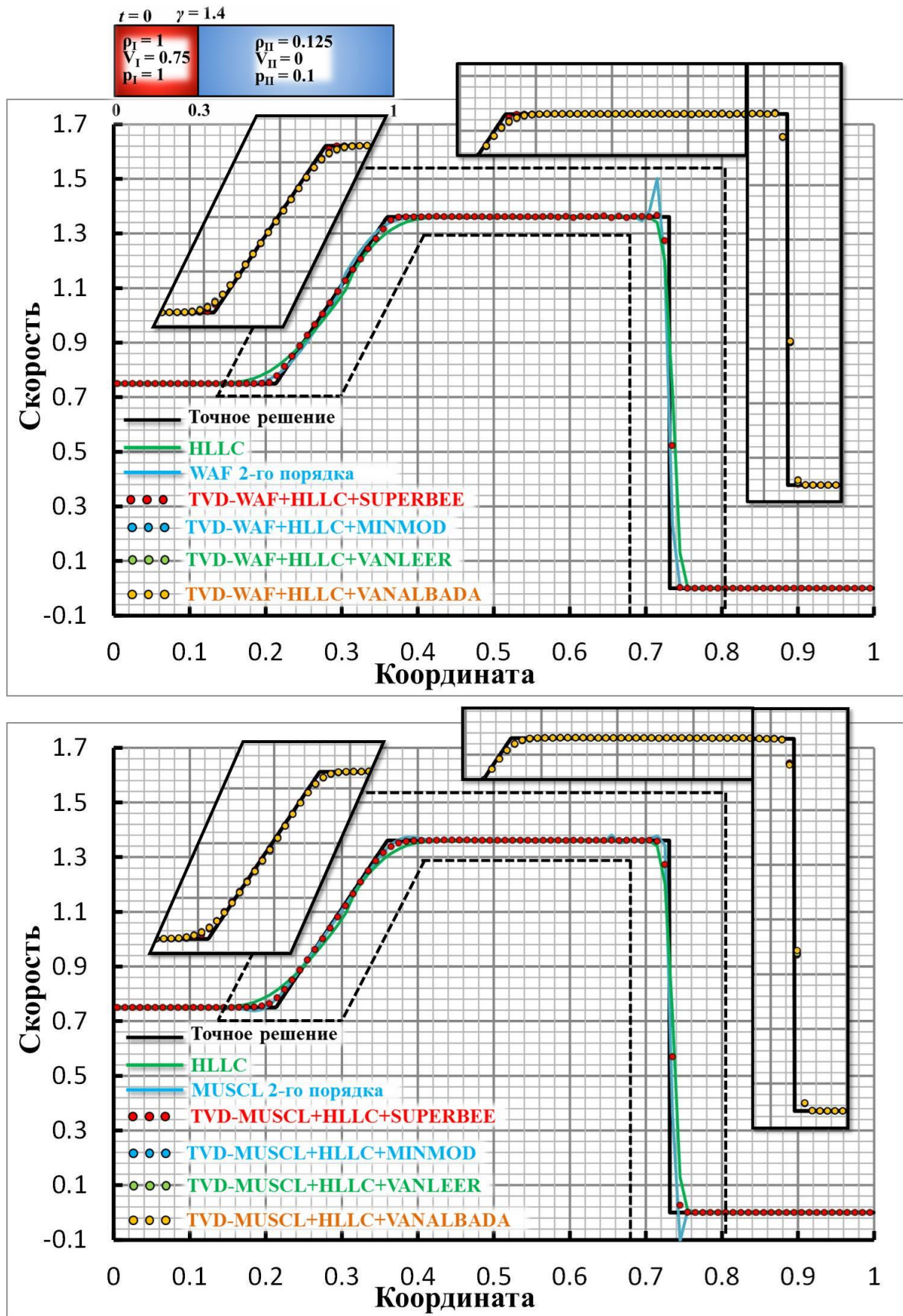


Рис.8. Результаты тестирования реализованных алгоритмов на решении одномерной модифицированной задачи Сода. Графики скорости для числа расчетных ячеек $N = 100$ в момент времени $t = 0.2$

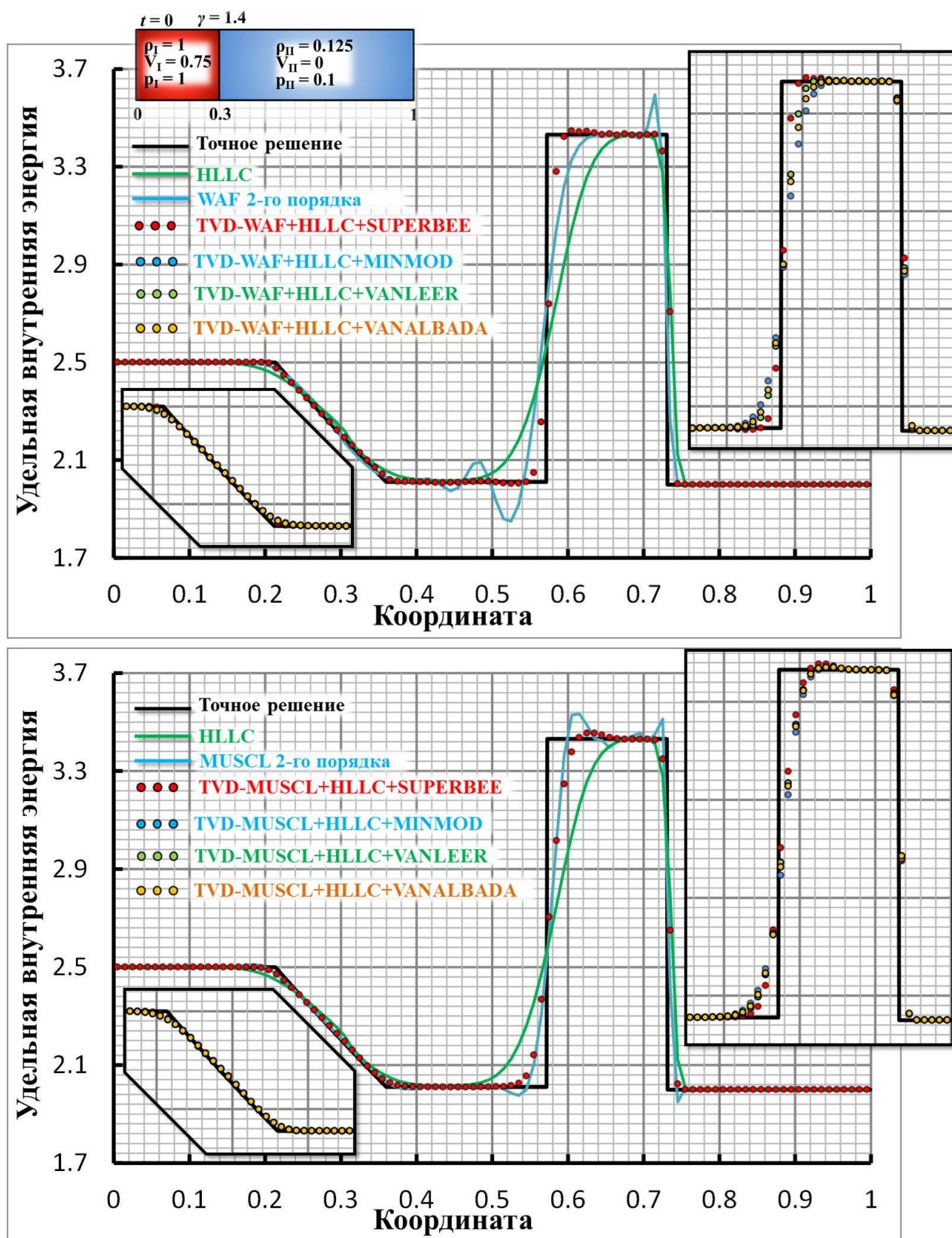


Рис.9. Результаты тестирования реализованных алгоритмов на решении одномерной модифицированной задачи Сода. Графики удельной внутренней энергии для числа расчетных ячеек $N = 100$ в момент времени $t = 0.2$

Для вычисления потоков в ходе реализации рассмотренных схем использовался точный римановский решатель и различные приближенные подходы к решению задачи распада разрыва. При этом особое внимание уделялось исследованию важных для расчета высокоскоростных течений свойств схем: способность сохранять монотонность при воспроизведении разрывных решений; качество разрешения слабых и интенсивных волн; диссипативные свойства в областях, где искомые решения имеют небольшие перепады значений; свойство консервативности, от которого зависит точность определения скоростей распространения ударных волн и контактных разрывов.

Приведены некоторые результаты применения реализованных TVD-схем повышенного порядка аппроксимации с интегрированным римановским решателем HLLC для решения модифицированной задачи Сода.

Проведено сравнение с точным решением задачи Римана, полученным с использованием классической схемы Годунова, и результатами расчетов традиционным HLLC методом.

Применение немонотонных WAF и MUSCL методов второго порядка точности приводит к возникновению осцилляций решения в областях значительных градиентов параметров. Использование функций-ограничителей потоков и наклонов в рамках TVD концепции позволяет эффективно подавить неустойчивости и получить хорошее качество разрешения разрывов. Лимитер SUPERBEE дает возможность максимально приблизиться к точному решению, однако порождает слабые осцилляции. Использование функции MINMOD дает устойчивое решение с несколько размытой волновой структурой. Ограничители ван-Лиры и ван-Альбады занимают промежуточное положение по точности результатов и показателям устойчивости.

Рассмотренные комбинированные подходы существенно превосходят по эффективности многие классические римановские решатели, в частности, традиционный HLLC метод.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, чл.- корр. РАН, проф. С.Т. Суржикову.

Работа выполнена в Лаборатории радиационной газовой динамики ИПМех РАН в рамках гранта РФФИ 13-01-00537, гранта Президента РФ № МК-5324.2014.1 для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук и программы сотрудничества ИПМех РАН и ВНИИА им. Н.Л.Духова.

Литература

1. Железнякова А.Л., Суржиков С.Т. На пути к созданию модели виртуального ГЛА. I. – М.: ИПМех РАН, 2013. – 160 с.
2. Железнякова А.Л. Метод расщепления по физическим процессам для решения задач гиперзвуковой аэродинамики на неструктурированных сетках // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2013. Том 14, вып. 2. 7с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2013-14-2/articles/387/>
3. Железнякова А.Л., Суржиков С.Т. Численное моделирование гиперзвукового обтекания модели летательного аппарата X-43 // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2011. Том 11. 11с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2011-11/articles/191/>
4. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. of Computational Physics. Vol. 49. 1983. P. 347–393.
5. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. — Springer; 3rd edition, April 2009. – 724 p.
6. Toro E.F. The Weighted Average Flux Method Applied to the Time-Dependent Euler Equations / Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1992. Vol. 341. P. 499–530.
7. Toro E.F. A Weighted Average Flux Method for Hyperbolic Conservation Laws // Proc. Roy. Soc. London, 1989. Vol. 423. P. 401–418.
8. van Leer, B. MUSCL, A New Approach to Numerical Gas Dynamics / In Computing in Plasma Physics and Astrophysics, Max-Planck-Institut für Plasma Physik, Garching, Germany, 1976.

9. van Leer, B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, I–V // *J. Com. Phys.*, V.18, P. 163–168, 1973. V.14. P. 361–370, 1974. V.23. P. 263–275, 1977. V.23. P. 276–299, 1977. V.32. P. 101–136, 1979.
10. Roe P.L. Some Contributions to the Modelling of Discontinuous Flows // In Proceedings of the SIAM/AMS Seminar, San Diego, 1983.
11. vanAlbada G.D., van Leer B., Roberts W.W. A Comparative Study of Computational Methods in Cosmic Gas Dynamics // *Astron. and Astrophysics*, 1982. V108. P. 76–84.
12. Железнякова А.Л. Анализ эффективности современных численных схем решения задачи о распаде произвольного разрыва в рамках метода расщепления по физическим процессам для расчета гиперзвуковых течений // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*, 2014. Том 15. Вып.5. 24 с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-5/articles/255/>
13. Годунов С.К. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. – 400 с.
14. Steger J.L., Warming R.F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods // *J. Comput. Phys.* Vol. 40, 1981.P. 263–293.
15. van Leer. B. Flux–Vector Splitting for the Euler Equations // ICASE Report 82–30, NASA Langley Research Center, USA, 1982.
16. van Leer. B. Flux Vector Splitting for the Euler Equations // Proc. 8th International Conference on Numerical Methods in Fluids Dynamics, Springer–Verlag, Berlin, 1982. P. 507–512.
17. Liou M.S., Steffen C.J. A new flux splitting scheme // *Journal of Computational physics.* Vol. 107, №1, 1993. P. 23–39.
18. Liou M.S. Recent progress and applications of AUSM+ // Sixteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, Springer–Verlag, Vol. 515, 1998.P.302–307
19. Harten A., Lax P., van Leer B. On upstream differencing and Godunov type methods for hyperbolic conservation laws // *SIAM review.* Vol. 25, 1983. P.35–61.
20. Toro E.F., Spruce M., Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL Riemann solver // *J. Shock Waves.* Vol. 4, 1994. P. 25–34.
21. Toro B.F., Chakraborty A. Development of an approximate Riemann solver for the steady supersonic Euler equations // *The Aeronautical Journal.* Vol. 98, 1994. P. 325–339.
22. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // *ЖВМиМФ.* Vol. 1, № 2, 1961. P. 267–279.
23. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes // *J. Comput. Phys.* Vol. 43. 1981. P. 357–372.
24. Engquist B., Osher S. One-sided difference approximations for nonlinear conservation laws // *Math. Comp.* Vol. 36, № 154, 1981. P. 321–351.
25. Osher S., Solomon F. Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws // *Math. Comp.* Vol. 38, № 158, 1982. P. 339–374.
26. Osher S., Chakravarthy S.R. Upwind schemes and boundary conditions with applications to Euler equations in general geometries // *J. Comput. Phys.* Vol. 50, 1983. P. 447–481.
27. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Матем. сб.* Т. 47, № 3, 1959. С. 271–306.
28. Кудрявцев А.Н. Вычислительная аэродинамика сверхзвуковых течений с сильными ударными волнами: дис. д-ра физ.-матем. наук. — Новосибирск, 2014. — 337 с.
29. Ben-Artzi M., Falcovitz J. A Second Order Godunov-Type Scheme for Compressible Fluid Dynamics // *J. Comput. Phys.*, 1984. V.55. P. 1–32.
30. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. Т. I. – М.: Мир, 1990. – 384 с.
31. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. Т. II. – М.: Мир, 1990. – 392 с.

Статья поступила в редакцию 18 ноября 2015 г.