

# Computer Simulation of Aerohydrodynamics Problems on the Base of Numerical Solution of Kinetic Equation by Lattice Boltzmann Method in the XFlow software package

Natalia Vladimirova<sup>1</sup>, Anatoly Prostomolotov<sup>2</sup>, Natalia Verezub<sup>2</sup>,

<sup>1</sup>Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Moscow Region, 140180, Russia

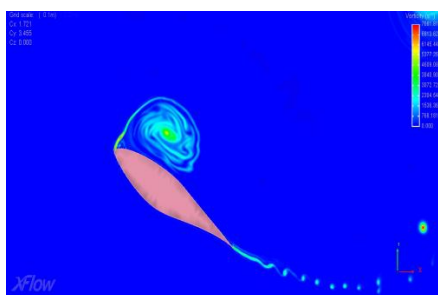
<sup>2</sup>Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, 119526, Russia

vlana@progtch.ru

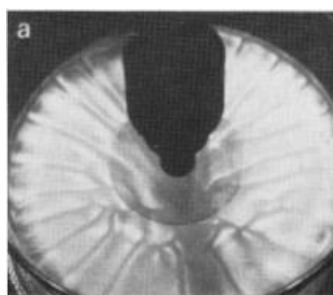
## Abstract

The possibilities of software package XFlow™ developed by Next Limit Technologies™ and designed to simulate a wide class flows of viscous heat-conducting liquids and gases are demonstrated. Numerical algorithm is based on the meshless method of Lagrangian particles to solving the Boltzmann equation for the distribution function with a certain type of collision integral. The basis of the numerical scheme is a solution of lattice Boltzmann equations, known in the literature as LBM – method (Lattice Boltzmann Method). For the simulation of turbulent flows the LES (Large Eddy Simulation) model of large-scale turbulence is used. XFlow™ has the ability to calculate the non-stationary two- and three-dimensional problems with complicated boundary conditions and moving bodies. The results of the simulation of external aerodynamics and internal hydrodynamics are presented.

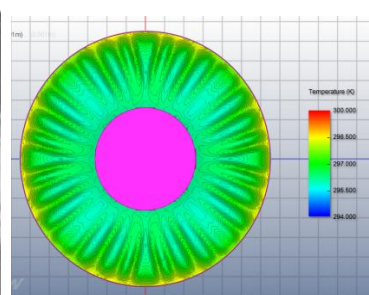
Keywords: kinetic equation, lattice Boltzmann method, computational aero- and hydrodynamics, crystal growth, Czochralski hydrodynamic model.



Unsteady separated flow around NREL S809 airfoil;  $M=0.15$ ,  $\alpha=30^\circ$ ,  $Re=500\,000$ . Vorticity field.



Experiment  
The "spokes" on liquid surface at thermal gravitational convection during disk's presence.



XFlow calculation

УДК 532.5 519.63 621.315.592:548.4

# Компьютерное моделирование задач аэрогидродинамики на основе численного решения кинетического уравнения методом решеточных уравнений Больцмана в программном комплексе XFlow

Н.А. Владимирова<sup>1</sup>, А.И. Простомолотов<sup>2</sup>, Н.А. Вerezуб<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского, Россия, Жуковский, 140180, улица Жуковского 1*

<sup>2</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, проспект Вернадского 101-1  
vlana@progtch.ru*

## Аннотация

В работе демонстрируются возможности программного комплекса XFlow™, разрабатываемого компанией Next Limit Technologies™ для моделирования широкого класса течений вязких теплопроводных жидкостей и газов. Численный алгоритм основан на бессеточном методе Лагранжевых частиц решения кинетического уравнения Больцмана для функции распределения с определенным видом интеграла столкновений. В основу численной схемы положен LBM-метод (Lattice Boltzmann Method) решеточных уравнений Больцмана. Для моделирования турбулентных течений используется LES-модель турбулентности (Large Eddy Simulation). Алгоритм предназначен для моделирования нестационарных двумерных и пространственных задач со сложными граничными условиями и подвижными телами. Приведены результаты моделирования широкого класса задач внешней аэродинамики и внутренней гидродинамики.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, метод решеточных уравнений Больцмана, вычислительная аэро- и гидродинамика, выращивание кристаллов, гидродинамическая модель метода Чохральского.

## 1. Метод расчета

Программный комплекс XFlow [1], разрабатываемый для моделирования течений вязких теплопроводных жидкостей и газов, использует метод решеточных уравнений Больцмана, известный в литературе как LBM – метод или Lattice Boltzmann Method [2–7]. Обычно для решения задач гидродинамики и тепломассопереноса применяются сеточные вычислительные методы, основанные на численном решении уравнений Навье-Стокса. В последние 20 лет активно развивается альтернативный подход, в котором для моделирования течения вязкой жидкости решается дискретизированное кинетическое уравнение Больцмана для функции распределения. Суть метода заключается в том, что исследуемая область разбивается на конечное число прямоугольных ячеек с жидкими частицами, между которыми на каждом шаге по времени происходит перенос вещества в соответствии с заданным видом кинетического уравнения и интеграла столкновений.

LBM – метод в настоящее время достиг высокого уровня развития, по своим возможностям сопоставим или превосходит возможности традиционных методов решения уравне-

ний Навье-Стокса и имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционным подходом, которые проявляются, например, при моделировании многофазных течений со свободной поверхностью и при обтекании пористых тел. Метод LBM является нестационарным явным по времени методом и естественным образом распараллеливается на большое количество вычислительных ядер и позволяет применять графические процессоры. Эффективность и ускорение вычислений может достигать сотен раз по сравнению с алгоритмами, основанными на решении уравнений Навье-Стокса методом конечных объемов (например, пакет программ ANSYS Fluent).

Метод решеточных уравнений Больцмана хорошо описывает динамику жидкости и газа для широкого класса задач и согласуется с уравнениями Навье-Стокса [4]. Метод разложения Чепмена-Энскога, описанный в [8–10], позволяет доказать, что поведение среды, описанной уравнением Больцмана с определенным оператором столкновений, ведет себя в соответствии с уравнениями Навье-Стокса. Метод Чепмена-Энскога – это способ получения решения кинетического уравнения Больцмана для одночастичной функции распределения. Он является своеобразным методом последовательных приближений, в котором локальное распределение Максвелла определяется стандартной равновесной формулой, но с локальными значениями плотности числа частиц, гидродинамической скорости и температуры, и используется в качестве нулевого приближения. А условием существования решения для следующих приближений является выполнение гидродинамических уравнений в предыдущем приближении. Изложенный метод решения, основанный на идее решения интегральных уравнений Д. Гильберта (D. Hilbert, 1912), был разработан Д. Энскогом (D. Enskog, 1917) и независимо С. Чепменом (S. Chapman, 1916). Недостатки LBM – метода проявляются при высоких скоростях потока для чисел Маха  $M \geq 0.3$ , однако для устранения этих недостатков был предложен ряд подходов [11–12].

Программный XFlow обладает рядом преимуществ: достаточно высокой скоростью расчета, возможностью моделирования нестационарных задач со сложными граничными условиями (подвижные стенки и тела и т.п), автоматической генерацией вычислительной сетки, распараллеливанием алгоритма на тысячи процессов без существенной потери производительности, возможностью расчетов задач с миллиардами ячеек и более. XFlow™ позволяет моделировать процессы теплопереноса газа и жидкости для научных и прикладных задач аэродинамики, вентиляции и кондиционирования, волновых движений жидкостей со свободной поверхностью, тепловой конвекции и др.

Рассмотрим кратко основы решеточного метода Больцмана. Расчетная область разбивается на одинаковые квадратные (в двумерном случае) или кубические (в трехмерном случае) ячейки. Частицы вещества из узлов ячеек могут перемещаться только в соседние узлы по выделенным направлениям. Рассматриваются шаблоны, обеспечивающие достаточную точность и стабильность расчетов эволюции системы в рассматриваемом диапазоне параметров. Таковыми являются, например, шаблон D2Q9 с 9-ю скоростями в двумерном пространстве и шаблон D3Q19 с 19-ю скоростями в трехмерном пространстве – рис. 1.

Решеточное уравнение Больцмана записывается в виде [13,14]:

$$f_a(x + e_a \delta t, t + \delta t) = f_a(x, t) + \Omega_a(x, t), \quad (1)$$

где  $f_a$  – одночастичная функция распределения для выбранного дискретного направления  $a$ ;  $e_a$  – дискретная скорость;  $\delta t$  – шаг по времени;  $\Omega_a(x, t)$  – интеграл столкновений.

Макроскопические параметры плотность  $\rho$  и средняя скорость  $u$  вычисляются как первые главные моменты от одночастичной функции распределения следующим образом:

$$\rho = \sum_a f_a \text{ и } \rho u = \sum_a e_a f_a$$

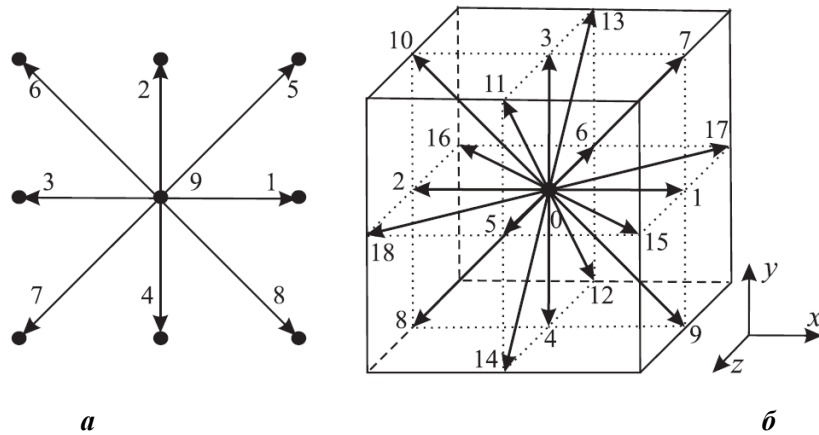


Рис. 1. Шаблоны узлов в ячейках - решетка D2Q9 (а), решетка D3Q19 (б)

В методах LBM для описания движения газа интеграл столкновений используется в виде BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) приближения, которое представляет собой линейную релаксацию системы к локальному равновесию [15,16]:

$$\Omega_a = \frac{1}{\tau}(f_a^{eq} - f_a),$$

где  $f_a^{eq}$  – равновесная одночастичная функция распределения и  $\tau$  – безразмерный параметр релаксации. В модели считается, что в каждой локальной области частицы подчиняются распределению Максвелла-Больцмана. Поэтому для невысоких значений средних скоростей ( $u \ll c_s$ , где  $c_s$  – скорость звука) можно записать разложение равновесной функции по малому параметру в виде приближения [17]:

$$f_a^{eq} \approx \rho w_a \left[ 1 + \frac{(e_a u)}{c_s^2} + \frac{(e_a u)^2}{2c_s^4} - \frac{u^2}{2c_s^2} + \frac{(e_a u)^3}{2c_s^6} - \frac{(e_a u)u^2}{2c_s^4} \right] + o(u^4),$$

где  $w_a$  – весовые коэффициенты, значение которых зависит от типа решетки. Так, для решетки D2Q9:  $w_0 = 4/9$ ,  $w_1 = \dots = w_4 = 1/9$ ,  $w_5 = \dots = w_8 = 1/36$ , для решетки D3Q19:  $w_0 = 1/3$ ,  $w_1 = \dots = w_6 = 1/18$ ,  $w_7 = \dots = w_{18} = 1/36$ .

Равновесные функции распределения подчиняются закону сохранения массы и импульса:

$$\rho = \sum_a f_a^{eq} \text{ и } \rho u = \sum_a e_a f_a^{eq}$$

Рассмотренная модель качественно описывает течения при малых значениях числа Маха  $M \ll 1$ , при этом кинематическая вязкость определяется через безразмерное время релаксации в виде  $\nu = (\tau - 0.5)c_s^2 \delta t$ . Граничные условия в виде непроницаемых стенок без проскальзывания моделируются отражением скорости налетающей частицы.

Решеточное уравнение Больцмана (1) решается явным по времени методом. Один шаг по времени состоит из двух этапов: сначала происходит перенос, схема которого представлена на рис. 2, а затем релаксация к равновесной функции распределения.

Решаемое дискретное уравнение Больцмана (1) и выражение для равновесной функции распределения  $f_a^{eq}$  можно разложить в ряд по степеням малого параметра – шага по времени. Используя только первые два члена разложения уравнения, можно получить уравнение для гидродинамических законов сохранения массы и импульса. Оно отличается от уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости на величину второго порядка по шагу

по времени, а также на величину второго порядка малости по параметру, который исторически принято называть числом Маха базовой скорости LBM-метода, хотя по смыслу он является числом Куранта.

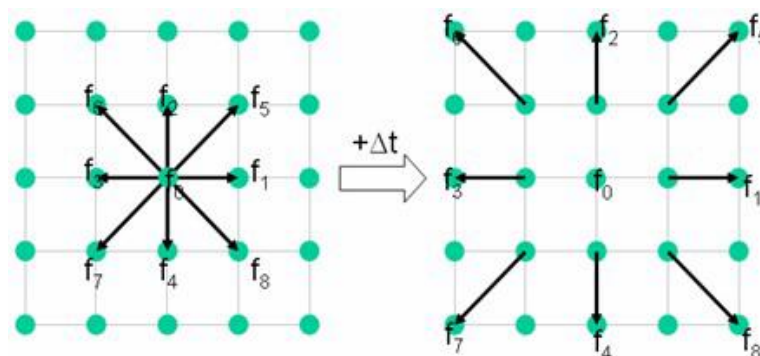


Рис. 2. Схема переноса вещества в ячейках

## 2. Результаты численного моделирования

XFlow – развивающийся компьютерный код, ежегодно обновляемый и модифицируемый разработчиками. По сравнению с предыдущими релизами новые версии кода XFlow 2014–2015 включают усовершенствованный графический интерфейс и пре- и постпроцессинг, расширенный импорт/экспорт файлов и упрощенную форму работы со сложной геометрией исследуемого объекта. Уменьшены требования к оперативной памяти и времени расчета за счет расширения алгоритмических возможностей нового решателя. Более ранние версии кода XFlow 2012–2013 тестировались нами для ряда внутренних задач гидродинамики, которые до настоящего времени не решены адекватно сеточными методами. Результаты [18,19] этих тестирований оказались интересными и обнадеживающими. Однако выяснились и значительные технические трудности в подготовке расчетной модели, большом времени расчета и в неудобном экспорте результатов решений. Всё это дало нам импульс для продолжения тестирования этого кода на более широком классе задач [20].

В данной работе мы показываем возможности последней версии кода при решении конкретных задач аэро- и гидродинамики. Демонстрируются результаты решенных автоматами задач внешней аэродинамики:

- образование отрывных зон и вихревых структур за аэродинамическим профилем и трехзвенной механизацией крыла под большим углом атаки,
- динамика вихревого следа за вращающейся ветровой турбиной и винтом вертолета,
- трансзвуковые и сверхзвуковые течения с отсоединенными и присоединенными ударными волнами,
- течения со свободной поверхностью,

а также для внутренней гидродинамики даются объяснения явлений, наблюдаемых экспериментально на свободной поверхности жидкости при моделировании выращивания кристаллов методом Чохральского:

- возникновение крупномасштабных вихрей от низкочастотных осевых вибраций кристалла,
- возникновение структур, напоминающих спицы, в гидродинамически неустойчивых режимах тепловой конвекции и т. д.

### 2.1. Задачи внешней аэродинамики и гидродинамики

Возможности кода XFlow мы иллюстрируем результатами расчетов 8-ми задач внешнего обтекания:

1 – образование отрывных зон и вихревых структур за аэродинамическим профилем (рис. 3);

2 – обтекание трехзвенной щелевой механизации самолета под большим углом атаки с формированием вихревой "дорожки Кармана" (рис. 4);

3 – динамика потоков и диссипация вихревого следа от вращающихся лопастей ветровой турбины (рис. 5);

4 – расчет вихревого следа за винтом вертолета (рис. 6);

5 – обтекание тестовой полумодели стреловидного крыла с фюзеляжем и формирование вихревого следа и интенсивного вихревого жгута на конце крыла (рис. 7);

6 – установление течения при трансзвуковом обтекании профиля со скачками уплотнения (рис. 8);

7 – сверхзвуковые течения с отсоединенными ударными волнами (рис. 9);

8 – возбуждение волн на границе двух сред (воздух-вода) с формированием формы свободной поверхности жидкости при движении модели судна (рис. 10).

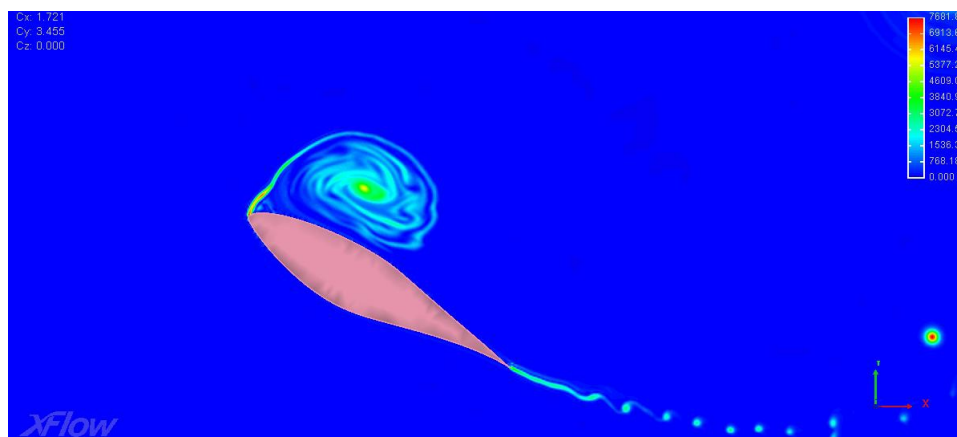


Рис. 3. Нестационарное отрывное обтекание профиля NREL S809;  $M=0.15$ ,  $\alpha=30^\circ$ ,  $Re=500\,000$ . Поле завихренности.

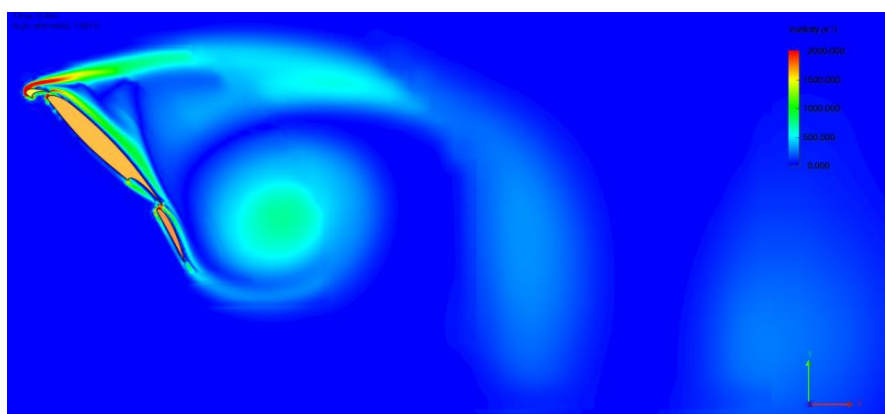


Рис. 4. Нестационарное отрывное обтекание трехзвенной щелевой механизации крыла ;  $M=0.2$ ,  $\alpha=45^\circ$ ,  $Re=3.5$  млн. Поле завихренности.

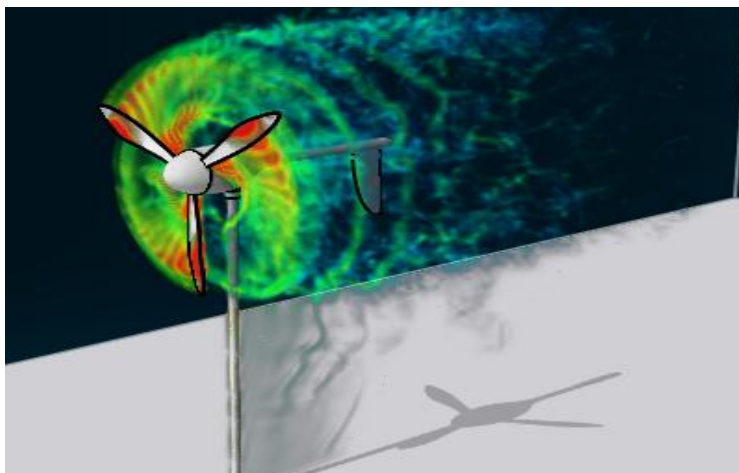


Рис. 5. Визуализация вихревой структуры за вращающимися лопастями ветровой турбины

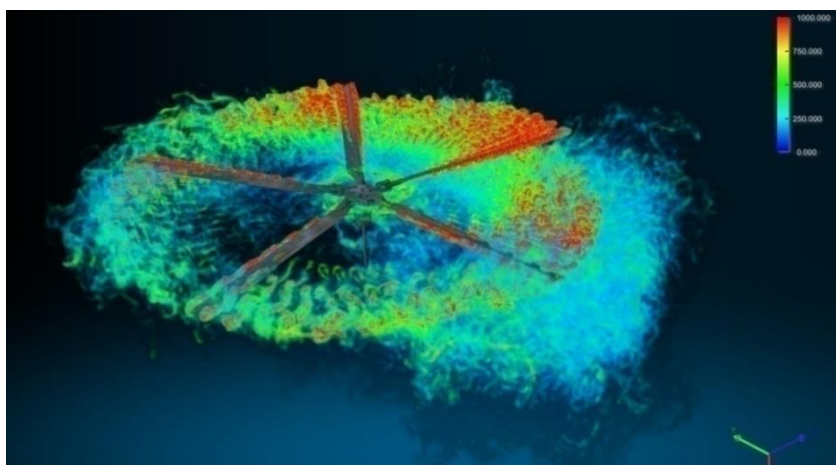


Рис. 6. Визуализация вихревой структуры за вращающимися лопастями вертолетного винта

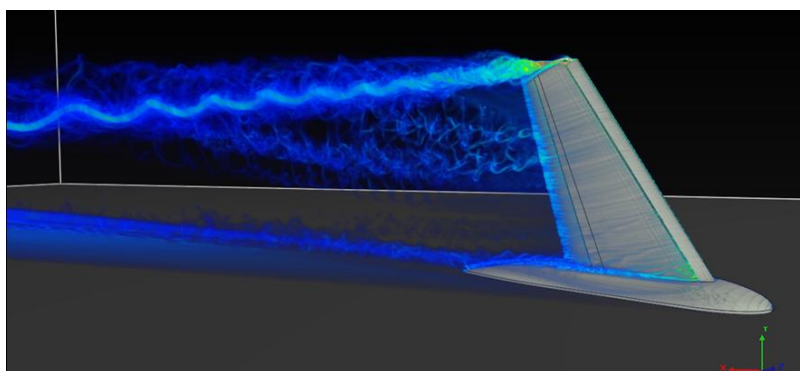


Рис. 7. Вихревой след за крылом полумодели самолета

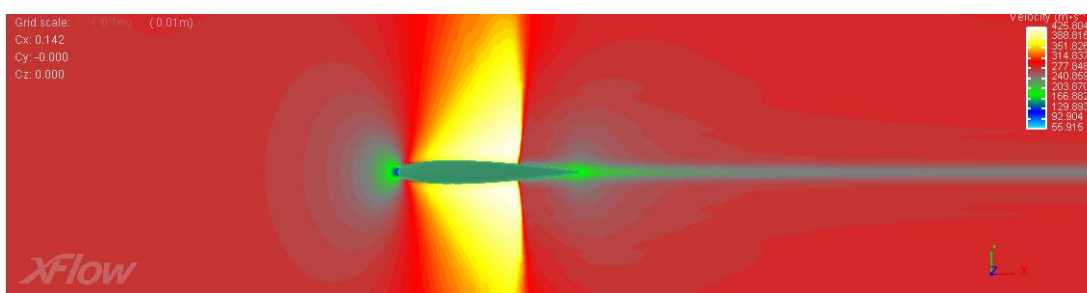


Рис. 8. Трансзвуковое обтекание профиля NASA 0012 со скачками уплотнения,  $M = -0.85$ ,  $\alpha = 0$

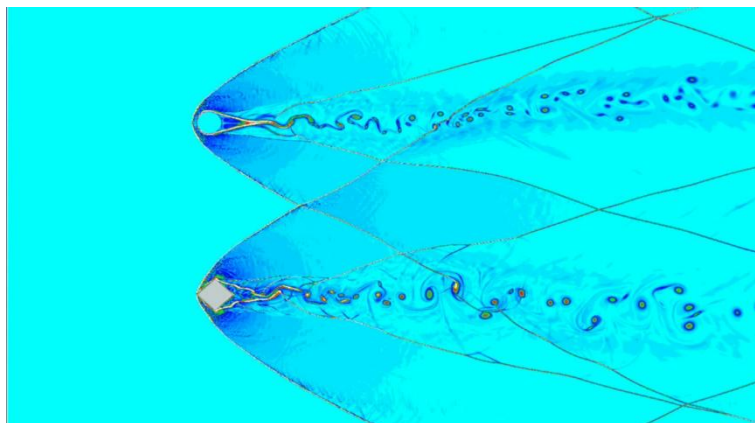
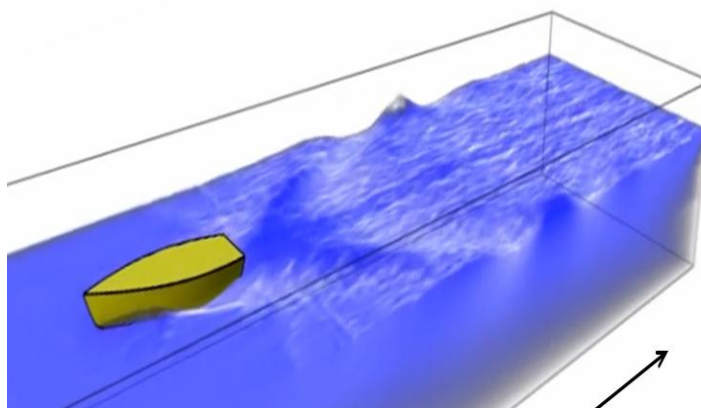
Рис. 9. Сверхзвуковые течения с ударными волнами,  $M=3$ 

Рис. 10. Волны на поверхности воды за моделью судна

## 2.2. Задачи внутренней гидродинамики

В настоящее время гидродинамическая модель выращивания кристаллов методом Чохральского широко используется для изучения фундаментальных закономерностей течения жидкости при различных внешних воздействиях (механических и тепловых). Геометрия модели следующая: жидкость находится в цилиндрическом тигле, на её поверхности расположен диск (имитатор кристалла) на одной оси с тиглем. Температура тигля выше, чем диска. Течение жидкости может быть вызвано вращением тигля/диска, осевыми вибрациями диска и тепловой конвекцией. Изучению течений в модели Чохральского посвящено много работ по численному моделированию и экспериментов с использованием различных модельных жидкостей [21, 22].

В данной работе рассматриваются два важных гидродинамических явления, которые довольно давно были обнаружены экспериментально, но до настоящего времени остаются малоизученными с помощью численного моделирования. Первое из этих явлений связано с возникновением крупномасштабных вихрей на поверхности изотермической жидкости при наличии низкочастотных осевых вибраций диска [23]. Второе явление связано с возникновением структур, напоминающих спицы, на поверхности неизотермической жидкости [24]. Оба явления имеют важное технологическое значение при выращивании оксидных кристаллов из расплавов, характеризующихся большими числами Прандтля (более 1). В лабораторных экспериментах [23, 24] они моделируются с использованием дистиллированной воды.

**Пример 1.** Низкочастотные вибрации твердого тела в контакте с жидкостью вызывают сложное полигармоническое движение поверхности жидкости, которое включает в себя два различных, но тесно связанных видов движения. Одно из них представляет собой



стоячую волну, которая распространяется по всей поверхности жидкости от вибрирующего тела к стенке контейнера. Одновременно с этой поверхностной волной развивается другой тип движения в виде крупномасштабного вихревого течения, имеющего ячеистую структуру с размером ячейки в несколько раз большей, чем длина волны стоячей волны. Длина стоячей волны, количество индуцированных вибрациями ячеек вихревого течения и скорость жидкости в ячейках определяются параметрами вибрации. Экспериментальная установка состоит из цилиндрического контейнера радиусом 72.5 мм и диска радиусом 19.5 мм, который введен в контакт с жидкостью и вибрирует в осевом направлении на низкой частоте.

На рис. 11а показана фотография структур установившегося движения поверхности жидкости, которые были получены со временем экспозиции 0.5 с для следующих значений параметров вибрации (частоты и амплитуды):  $f = 20$  Гц,  $A = 300$  мкм. Этот рисунок визуализирует как стоячие волны, так и индуцированные вибрациями вихревые ячейки. Амплитуда стоячих волн зависит, прежде всего, от амплитуды вибраций. Рис. 11б показывает ячеистую структуру, полученную по расчетам в программе XFlow. Структура вихрей визуализирована сферическими маркерами, которые перемещаются в процессе итераций по времени по соответствующим вихревым траекториям. Форма стоячих волн также может быть визуализирована графическими средствами этого комплекса. В целом, можно отметить хорошее соответствие с экспериментальными данными и эффективность применения LBM метода к вибрационной модели Чохральского.

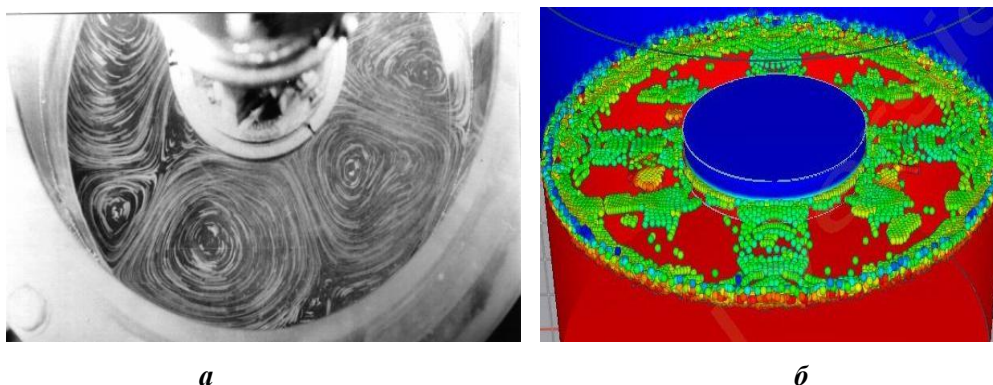


Рис. 11. Структура поверхностного течения при осевых вибрациях диска – эксперимент [23] (а), расчет XFlow (б)

**Пример 2.** Ранее численное изучение явления образования “спиц” на поверхности не-изотермической жидкости в модели Чохральского было проведено на основе трехмерного численного моделирования сеточным методом конечных объемов [25]. Численные и экспериментальные картины “спиц” были похожи. Образование спиц объяснялось неустойчивостью конвекции Марангони при наличии азимутальной неоднородности нагрева поверхности жидкости. В [25] говорится, что число узлов сетки качественно влияет на структуру течения и количество “спиц”. Например, количество спиц увеличивается на более подробной сетке. Это показывает, что сеточные методы пока не позволяют однозначно смоделировать и объяснить это интересное явление. Поэтому в данной работе мы попробовали применить бессеточный LBM метод, который, по нашему мнению, может дать альтернативное объяснение этого явления.

В данной работе численно моделировалась термогравитационная конвекция в тигле. Конвекция Марангони на поверхности жидкости не учитывается. Параметры задачи следующие: радиус тигля – 100 мм и диска – 65 мм, температура на стенке тигля – 324 К и на диске – 294 К. Дно тигля теплоизолировано. Явление образования “спиц” объясняется Рэлеевской тепловой неустойчивостью течения при наличии малых асимметричных азиму-

тальных возмущений, вызванных особенностями распределения ячеек решетки Больцмана в расчетной области и на ее границах.

Расчеты показали, что количество “спиц” на поверхности жидкости зависит от количества лагранжевых частиц (или от размера ячеек решетки) в расчетной области и/или в окрестности границ. Рис. 12 показывает экспериментальную (а) и расчетную (б) картины температурных “спиц” на поверхности воды в цилиндрическом тигле при наличии охлаждаемого диска.

Аналогичные картины приведены на рис. 13 при отсутствии диска. Сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными показывает их поразительную схожесть, что позволяет надеяться на успешное применение LBM метода и программного комплекса XFlow для расчетов таких задач.

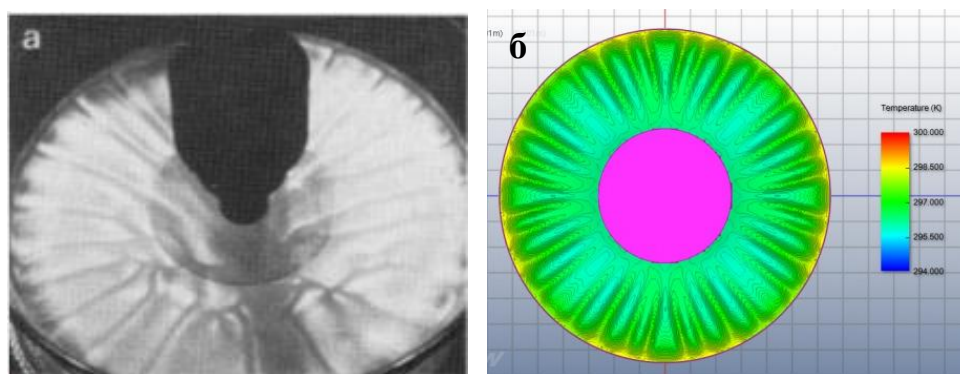


Рис. 12. Вид сверху на “спицы”, возникающие на поверхности жидкости при термогравитационной конвекции при наличии диска – эксперимент [24] (а), расчет XFlow (б)

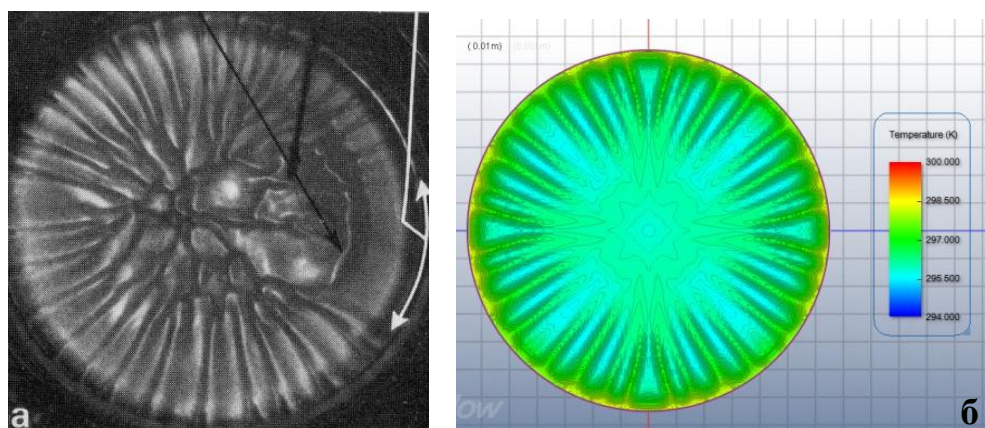


Рис. 13. Вид сверху на “спицы”, возникающие на поверхности жидкости при термогравитационной конвекции при отсутствии диска – эксперимент [24] (а), расчет XFlow (б)

**Другие примеры.** Модель для расчета конвективного теплопереноса в тигле при выращивании кристалла методом Чохральского показана на рис. 14а. Цилиндрический тигель 1 заполнен модельной жидкостью (дистиллированной водой), имитатор кристалла (диск) 2 с диаметром, меньшим диаметра тигля, поэтому имеется участок свободной поверхности жидкости 3. Боковая стенка тигля нагрета до температуры  $T_1 = 320$  К, а температура имитатора кристалла  $T_2 = 300$  К, свободная поверхность жидкости и дно тигля – адиабатические. Кристалл или погруженное в жидкость тело-вибратор могут совершать осевые вибрации с частотой  $f = 30$  Гц и амплитудой  $A = 0.1$  мм.

На рис. 14б показано распределение изотерм при тепловой гравитационной конвекции, которое соответствует подъемному движению жидкости около боковой стенки и опускному струйному движению в центре тигля. Для управления этим движением применяют-

ся осевые вибрации самого кристалла или погруженного в жидкость специального тела-вибратора (см. рис. 14а).

Из сравнения распределений изотерм на рис. 15 можно видеть характерные отличия в течениях, вызванных вибрациями кристалла и погруженного в жидкость коаксиального цилиндрического тела. Целью физического процесса является хорошее перемешивание жидкости вблизи поверхности кристалла, и с помощью программного кода XFlow нам удалось определить ряд важных закономерностей для таких вибрационных воздействий.

Расчеты XFlow четко подтверждают экспериментальные данные, что осевые колебания диска при определенных частотах могут генерировать стоячие волны на свободной поверхности жидкости (см. для сравнения экспериментальное фото и результат расчета на рис. 16а–б, где  $A$  – амплитуда и  $f$  – частота колебаний диска).

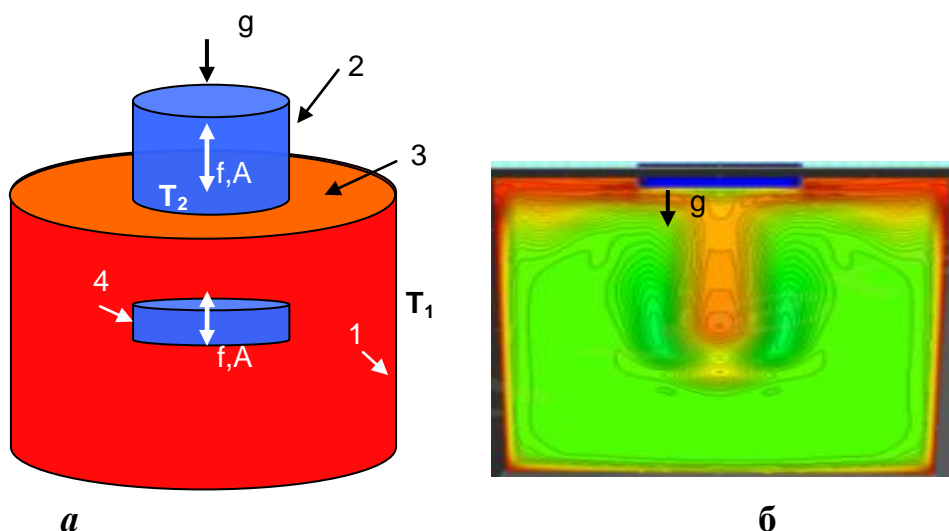


Рис. 14. Гидродинамическая модель выращивания кристалла методом Чохральского (а) и распределение изотерм в жидкости при тепловой конвекции (б)

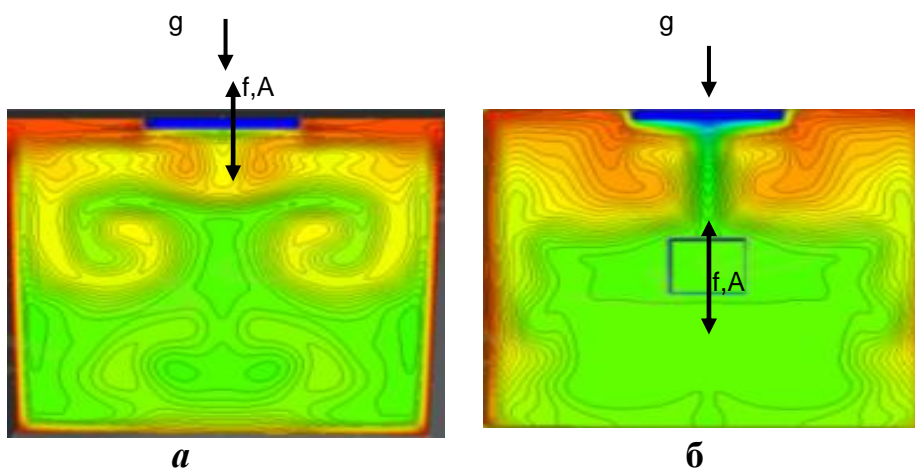


Рис. 15. Распределение изотерм в жидкости при наложении на тепловую конвекцию вибраций кристалла (а) или вибраций погруженного в расплав тела (б)

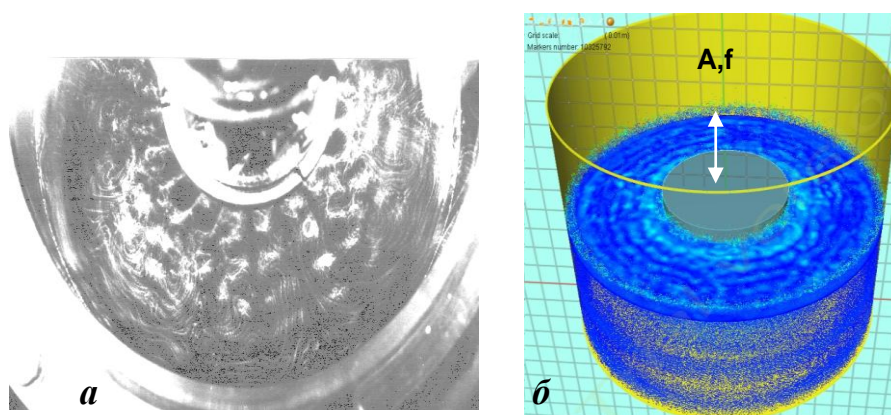


Рис. 16. Картина поверхностных волн, обусловленных осевыми вибрациями диска - эксперимент (а), расчет XFlow (б)

Расчеты также подтвердили, что в случае полностью открытой свободной поверхности жидкости быстрое вращение тигля ( $\Omega_s$  – угловая скорость вращения) создает известную вращающуюся воронку (рис. 17 а), а осевые вибрации погруженного в жидкость диска приводят к образованию крупномасштабной вихревой структуры (рис. 17 б).

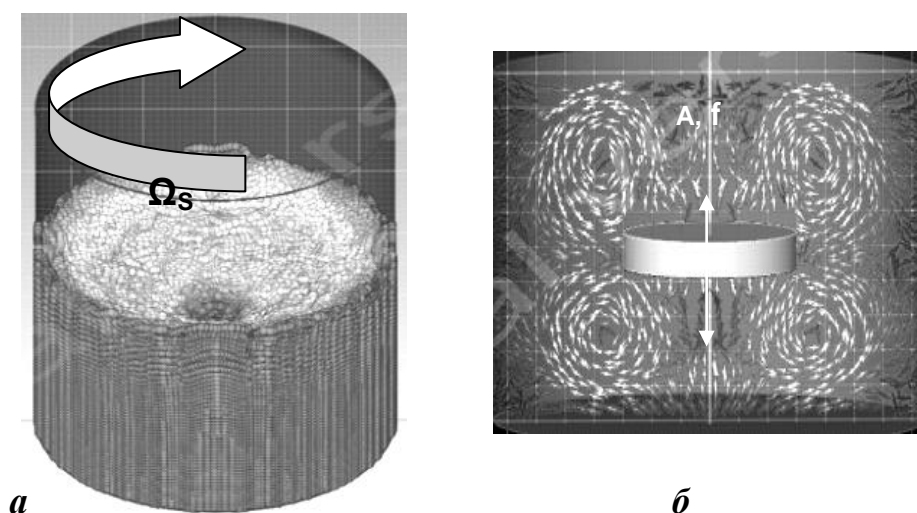


Рис. 17. Течения в тигле – вращающаяся воронка (а), вихревая структура, вызываемая вибрацией диска (б)

Кроме того, программный комплекс XFlow дает новые возможности для исследований геометрически сложных течений, вызываемых тепловой конвекцией при нагреве диска в форме шайбы и при дополнительном его взаимодействии с колебаниями ещё одного - верхнего диска меньшего диаметра (см. рис. 18 а,б).

### 3. Заключение

Идея многоуровневого подхода в решении задач компьютерной аэрофизики [26] предполагает также апробацию новых численных аппроксимаций уравнений переноса сплошной среды, широкое применение которых до настоящего времени сдерживалось ограниченными вычислительными ресурсами компьютеров. В их числе рассмотренный в статье LBM-метод, возможности которого стали сопоставимы, а в ряде задач превосходят возможности традиционных методов решения уравнений Навье – Стокса. Проведенные тест-

ты этого метода с помощью комплекса XFlow показывают его несомненные преимущества для задач со сложной геометрией, движущимися границами и телами, в том числе несколькими телами, движущимися по своим законам. Напротив, решение такого рода задач сеточными методами (разностными, конечно-элементными) требует построения сложных перестраивающихся сеток, интерполяции решений с сетки на сетку, что весьма трудоемко и требует постоянного контроля точности решения [27]. Поэтому постановка и решение таких задач LBM методом кажется более простой и естественной.

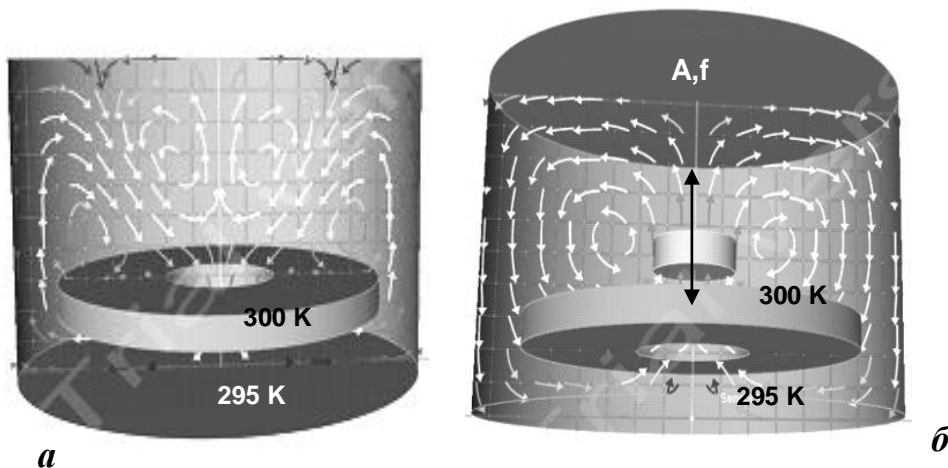


Рис. 18. Течения в сложной геометрии – тепловая конвекция, вызываемая нагреванием диска в форме шайбы (а) и при дополнительной вибрации верхнего диска (б)

Однако результаты тестов показали, что для получения надежного решения требуется задание достаточно большого числа лагранжевых частиц, иначе проявляются эффекты численной колебательной неустойчивости, которые легко принять за гидродинамическую неустойчивость течения. Также может быть потеря сплошности течения, несоблюдение заданных граничных условий и т.д. В общем, вопросы корректной аппроксимации с помощью лагранжевых частиц остаются такими же, что и в сеточных методах.

Тем не менее, большим преимуществом XFlow является то, что в расчетах LBM методом легко поддерживается многопроцессорность, причем скорость выполняемых расчетов с увеличением числа процессоров растет практически линейно. К сожалению, возможности наших тестов были ограничены персональным компьютером всего с 4-мя процессорами и мы не смогли показать всю мощь этого метода расчета. Однако мы считаем, что это можно будет сделать, но для применения комплекса XFlow потребуются высокопроизводительные многопроцессорные компьютеры.

## Благодарности и ссылки на гранты

Авторы благодарят РФФИ за финансовую поддержку (гранты: 14–08–00454, 15–02–00794) и компанию Next Limit Technologies™ (Испания) за предоставление лицензии для тестов задач аэро- и гидродинамики по программе XFlow™.

## Литература

1. XFlow 2014 User Guide. – © 2014 Next Limit Dynamics SL, 2014.
2. McNamara G., Zanetti G. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata // Physical review letters. 1988. **61**. Pp.2332-2335.
3. Higuera F.J., Jimenez J. Boltzmann approach to lattice gas simulations // Europhysics Letters. 1989. **9**. Pp.663–668.
4. Qian Y.H., D'Humieres D., Lallemand P. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation // Europhysics letters. 1992. **17**. Pp.479–484.

5. Chen S., Doolen G. Lattice Boltzmann method for fluid flows // *Annual reviews of fluid mechanics*. 1998. **30**. Pp.329–364.
6. Guo Zh., Shi B., Wangy N. Lattice BGK model for incompressible Navier–Stokes equation // *Journal of Computational Physics*. 2000. **165**, No 1. Pp.288–306.
7. Succi S. *The lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond*. - Oxford: Clarendon Press, 2001.
8. Чепмен С., Каулинг Т. Д., Математическая теория неоднородных газов. – М.: ИЛ, 1960.
9. Уленбек Дж., Форд Дж. Лекции по статистической механике. – М.: Мир, 1965.
10. Maxwell J. B. *Lattice Boltzmann methods for interfacial wave modelling*. – Edinburgh: University of Edinburgh, 1997.
11. Sun C. Lattice-Boltzmann models for high speed flows // *Phys. Rev. E*. 1998. **58** (6). Pp.7283–7287.
12. Chen F., Xu A., Zhang G., Li Y. Three-dimensional lattice Boltzmann model for high-speed compressible flows // *Commun. Theor. Phys*. 2010. **54** (6). 1121–1128.
13. He X., Luo L.-S. Theory of the lattice Boltzmann method: from the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation // *Phys. Rev. E*. 1997. **56** (6). 6811–6817.
14. Begum R., Basit M.A. Lattice Boltzmann method and its applications to fluid flow problems // *European J. of Scientific Research*. 2008. **22** (2). 216–231.
15. Bhatnagar P., Gross E.P., Krook M.K. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // *Phys. Rev.* 1954. **94** (3). Pp.511–525.
16. Qian Y.H., d’Humi`eres D., Lallemand P. Lattice BGK models for Navier–Stokes equation // *Europhysics letters*.1992. **17** (6). Pp.479–484.
17. Aidun C.K., Clausen J.R. Lattice-Boltzmann method for complex flows // *Annual reviews of fluid mechanics*. 2010. **42**. Pp.439–472.
18. Prostomolotov A.I., Iliasov H.H., Verezub N.A., Vladimirova N.A. Application of XFlow™ code for numerical simulation of aero- and hydrodynamic structures // Сборник избранных трудов конференции "Потоки структуры в жидкостях", 25-28 июня 2013 г., Санкт-Петербург. - М.: МАКС Пресс. 2014. С. 170-177.
19. Vladimirova N.A. CFD analysis and calculation of aerodynamic characteristics of helicopter rotor // *Proceedings of the 39th European Rotorcraft Forum (ERF39)*, September 3–6, 2013, Moscow.
20. Владимировна Н.А., Вerezуб Н.А., Простомолотов А.И. Апробация программного комплекса XFlow™ 2014 для моделирования волновых и вихревых структур // *Материалы 5-ой международной научной школы молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах»*, 25–28 ноября 2014 г., Москва. – М.: МАКС Пресс. 2014. С. 127–130.
21. Miller W. Numerical simulation of bulk crystal growth on different scales: silicon and GeSi // *Phys. Status Solidi B*. 2010. **247** (4). 885-869.
22. Mokhtari F., Bouabdallah A., Zizi M., Hanchi S., Alemany A. Combined effects of crucible geometry and Marangony convection on silicon Czochralski crystal growth // *Cryst. Res. Technology*. 2009. **44** (8). Pp.787–799.
23. Вerezуб Н.А., Жариков Е.В., Мьяльдун А.З., Простомолотов А.И. Явление крупномасштабного вихреобразования на поверхности жидкости при вибрациях твердого тела// *Докл. РАН*. 1996. **350** (4). С. 474–477.
24. Miller D.C., Pernell T.L. Fluid flow patterns in a simulated garnet melt // *Journal of Crystal Growth*. 1982. **58**. 253–260.
25. C.J. Jing, M. Kobayashi, T. Tsukada, M. Hozawa, T. Fukuda, N. Imaishi, K. Shimamura, N. Ichinose. Effect of RF coil position on spoke pattern on oxide melt surface in Czochralski crystal growth // *Journal of Crystal Growth*. 2003. **252**. Pp.550–559.
26. Суржиков С.Т. Перспективы многоуровневого подхода к задачам компьютерной аэрофизики // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2008. Т. 7. 9с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2008-7/articles/435/>
27. Железнякова А. Л., Суржиков С. Т. Построение пространственных неструктурированных сеток на NURBS-поверхностях сложных изделий авиационной и ракетно-космической техники методом молекулярной динамики // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2014. Т. 15, вып. 1. 18с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-1/articles/108/>

Статья поступила в редакцию 15 ноября 2015 г.