

УДК 532.5

ОБОБЩЕННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЭЛЕЯ-ТЕЙЛОРА ДЛЯ СУСПЕНЗИЙ, СЕДИМЕНТАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ

В.П. Трубицын^{1,2}, Е.В. Харыбин¹

¹*Институт физики Земли РАН, Москва,*

²*Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, Москва,*
trub@ifz.ru

Аннотация

Изучается процесс осаждения суспензий с тяжелыми частицами, взаимодействующими между собой и с основной вязкой жидкостью. Рассматривается случай малого числа Прандтля, без инерциальных членов, что соответствует медленным течениям в высоковязкой жидкости. Аналогично теории неустойчивости Рэля-Бенара для конвективного переноса тепла и теории диффузионной конвекции можно провести анализ неустойчивости переноса массы в вязкой жидкости с оседающими частицами, включая переход от кондуктивного переноса массы в виде стокосового осаждения слоя как целого к седиментационной конвекции всей смеси, когда слой тяжелых частиц деформируется в струи. В пределе при стремлении к нулю скорости осаждения частиц (т.е. замороженных в жидкость) область жидкости, содержащую тяжелые частицы, можно рассматривать как более плотную жидкость. В этом пределе седиментационная конвекция переходит в классические течения неустойчивости Рэля-Тейлора. В приближении малой концентрации и усредненного описания распределения частиц удается провести аналитический анализ неустойчивости. Найдены критические моды течений и критические числа порога (начала) седиментационной конвекции, из которых выводится простой критерий. В случае медленных течений независимо от вязкости и скачка плотности слой тяжелых частиц с концентрацией C при радиусах более $\sim 0.15C^{1/2}$ от размера области падает как целое по Стоксу, при меньших размерах частиц слой деформируется, и возникают струйные течения, в пределе переходящие в течения рэлей-тейлоровской неустойчивости. Результаты линейного аналитического анализа проверены численными решениями системы уравнений Стокса и уравнения переноса концентрации в том же приближении с усреднением распределением частиц. При этом были рассчитаны как малые, так и конечно-амплитудные течения. Далее были проведены численные эксперименты для оседания взаимодействующих частиц (твердых цилиндров) в вязкой жидкости путем численного решения непосредственно уравнения Стокса для конечных концентраций и без усреднения, с заданиями дискретных частиц в виде маркируемых перемещающихся областей повышенной плотности и аномально высокой вязкости.

EXTENDED RAYLEIGH-TAYLOR INSTABILITY FOR SUSPENSION, SEDIMENTATION CONVECTION

The process of suspension sedimentation with heavy particles, including the interaction between each other and with the basic liquid, is studied. The case of small Prandtl number is considered only, without inertial terms, for slow flow in high viscous liquid. Similar to Rayleigh-Benar instability theory for convective heat transfer or diffusive mass transfer in viscous liquid it is possible to create the instability analysis of the convective mass transfer in viscous liquid with settling particles, including the transition of Stokes sinking of heavy layer to convection of whole mixture, when the heavy layer deforms like jets. In limit case of zero settling velocity (i.e. frozen particles) this area of liquid can be considered as the heavy liquid. In this case sedimentation convection turns into flow of Rayleigh-Taylor

theory. The analytical analysis of instability can be created for small concentration and mean description of the particle distribution. The critical modes and critical number of sedimentation convection onset are calculated. They give simple criterion. In case of slow flow (independently of viscosity and density jump) the layer of heavy particles sinks by Stokes if radius of particles is greater than $\sim 0.15C^{1/2}$, where C is concentration. For smaller size of particles the layer deforms and Rayleigh-Taylor flows appear. The results of analytical analysis are tested by numerical solution of the system of Stokes equation and equation of concentration transfer in the same approximation of mean particle distribution both as well as for linear and finite-amplitude flows. Later the numerical experiments for sinking layer of solid interactive cylinders were done by direct solution of Stokes equation for discrete particles, without averaging-out. The particles are described by active markers with higher density and anomaly high viscosity.

1. Введение

При инверсии плотности в жидкости может возникать конвективное (циркуляционное) движение. Конвекция в однокомпонентной нагреваемой жидкости называется тепловой. В лабораторном эксперименте она была открыта Бенаром, а теория ее возникновения (теория неустойчивости) была развита Рэлеем. Конвекцию, вызванную инверсией плотности в изотермической многокомпонентной жидкости, в общем случае называют химической. В частности в отсутствие химических реакций для механической смеси ее называют гравитационной или концентрационной, или композиционной. При диффузионном механизме переноса массы уравнения композиционной (диффузионной) конвекции совпадают с уравнениями тепловой конвекции с точностью до замены диффузионного потока тепла $q_T = k_T \nabla T$ на диффузионный поток массы $q_D = k_D \rho \nabla C$, где k_T – коэффициент теплопроводности, T – температура и k_D – коэффициент диффузии, C – объемное содержание (концентрация) примесной компоненты, ρ – ее плотность. Конвекцию, вызванную градиентами температуры и концентрации с диффузионным механизмом, называют двойной диффузионной конвекцией.

Однако, кроме диффузионного механизма (на молекулярном уровне), в гетерогенной механической смеси возможен также перенос массы на макро уровне с ненулевой относительной скоростью примеси относительно основной жидкости. Таким примером может служить падение совокупности тяжелых частиц (или всплывание легких) сквозь вязкую жидкость по закону Стокса с относительной скоростью S . При этом распределение совокупности отдельных частиц можно усреднить и рассматривать их как примесную жидкую компоненту, которая может проникать сквозь основную жидкость. В случае осаждения частиц поток массы будет пропорционален не градиенту концентрации C как в диффузионной конвекции, а самой концентрации и равен $q_s = S \cdot \rho C$ с коэффициентом пропорциональности, равным относительной скорости S примесной компоненты. В результате этого дифференциальное уравнение переноса массы в отличие от диффузионного переноса тепла или массы меняется и становится не второго, а первого порядка.

Если инверсия плотности достаточно велика, то, кроме кондуктивного переноса массы (путем стокового осаждения частиц), может возникнуть более эффективный перенос массы с конвективным движением всей смеси. Эту конвекцию можно назвать седиментационной [1], чтобы более подчеркнуть ее отличие от тепловой конвекции или диффузионной, которые также вызываются силой гравитации. В общем случае при массопереносе композиционная конвекция может включать в себя и диффузионную и седиментационную конвекцию [2].

Исследование неустойчивости слоев тяжелой и легкой невязкой жидкости при инверсии плотности было проведено Рэлеем в 1900г. В 1908г. Харрисон [3] получил уравнение для роста мод возмущений для слоев вязких жидкостей. В 1950г Тейлором теория неустойчивости слоев жидкостей в гравитационном поле была распространена на течения в центрифугах. Чандрасек-

харом теория неустойчивости Рэлея-Тейлора была обобщена учетом магнитного поля и вращения [3]. В последующем [4] был развит метод потенциального течения, позволяющий приближенно, но более просто рассчитывать растущие моды при неустойчивости Рэлея-Тейлора.

Поскольку в теории неустойчивости Рэлея-Тейлора не учитывается возможность проникновения примесной тяжелой жидкости сквозь основную жидкость, то рассматриваемая в настоящей работе седиментационная конвекция обобщает теорию Рэлея-Тейлора, которая становится предельным частным случаем седиментационной конвекции при стремлении к нулю размеров частиц и соответственно скорости их падения сквозь основную жидкость. В этом случае часть основной жидкости, в которую вморожены тяжелые частицы, можно рассматривать как более тяжелую жидкость.

В настоящей работе для простоты авторами рассмотрен случай медленных течений, когда инерционными членами в уравнении Стокса можно полностью пренебречь. Это имеет место, например, для течений в мантии Земли, в частности при осаждении капель железа на поздних этапах формирования ядра Земли и подъема плюмов-термиков с горячего дна мантии. Аналитический анализ седиментационной неустойчивости (возникновение конвекции) был проведен в работах [1, 5]. Авторами были найдены критические числа седиментационного аналога теплового числа Рэлея R_s и критические моды конвективного движения. В работе [2] теория седиментационной неустойчивости была распространена на термо-композиционную конвекцию с осаждением частиц, которая описывает процесс осаждения и перемешивания частиц при взаимодействии с тепловой конвекцией. В работах [6,7] были получены численные решения уравнений седиментационной конвекции как в области надкритичности вблизи порога неустойчивости, так и для конечно-амплитудной конвекции.

Изучение конвективного переноса тепла началось в начале прошлого века. При этом для понимания ее природы Рэлеем сначала была исследована конвективная неустойчивость однокомпонентной нагретой жидкости. Интенсивное изучение конвективного массопереноса проводилось позже, когда само явление конвекции уже стало понятным. При этом уже была построена теория неустойчивости Рэлея-Тейлора для двухслойной вязкой жидкости с инверсией плотности. Поэтому во второй половине прошлого века сразу началось интенсивное изучение конечно-амплитудных течений переноса массы, не привлекая анализ конвективной неустойчивости. К настоящему времени опубликовано очень много работ по изучению гравитационной конвекции в дисперсных системах. В первых работах вводились упрощения с пренебрежением объемным содержанием частиц и вариациями эффективной вязкости среды [8]. Многочисленные примеры расчетов конвекции в суспензиях с использованием более общей модели, частично учитывающей конечность объема дисперсной фазы, представлены в монографии [9]. Наиболее общая модель гравитационной конвекции суспензий и где, в частности, исследуется и неустойчивость типа Рэлея-Тэйлора, развита в работе Невского и Осипцова [10]. Подробный обзор математических моделей гравитационной конвекции в дисперсных системах можно найти в диссертации Невского [11]. Численные решения уравнений развитой композиционной конвекции (при усреднении распределения дискретных частиц) в применении к осаждению кристаллов в застывающих магматических камерах получены в [12]. Поскольку основные применения конвекции в суспензиях относятся к случаям высоко-амплитудных течений, то аналитической теории неустойчивости с возникновением седиментационной конвекции (аналогичной теории Рэлея-Бенара) уделялось мало внимания.

В настоящей работе в методологических целях кратко излагаются основные результаты аналитического анализа неустойчивости жидкости с оседающими частицами и приводятся численные решения, как для надкритических, так и конечно-амплитудных течений с эволюцией усредненного распределения частиц. Новыми являются результаты непосредственных численных экспериментов для осаждения системы взаимодействующих дискретных тяжелых частиц в вязкой жидкости с возникновением седиментационной конвекции, без усреднения распределения

частиц и без приближения малых концентраций. Приводимые результаты численного моделирования подтверждают не только результаты аналитического решения уравнений на неустойчивость осаждения частиц, но и сами уравнения движения, в которых дискретное распределение конечных частиц описывается приближенным усредненным распределением плотности для тяжелой компоненты.

2. Модель, уравнения движения и массопереноса и граничные условия

Рассмотрим слой вязкой двухкомпонентной жидкости, состоящей из основной жидкости с плотностью ρ_0 и небольшого количества тяжелой примеси частиц с плотностью вещества ρ_1 . Дискретное распределение частиц будем рассматривать как усредненное непрерывное распределение тяжелой компоненты с объемной долей (концентрацией) $C = \Omega_1 / (\Omega_1 + \Omega_0)$. Здесь Ω_1 – объем элемента смеси, занятый тяжелой компонентой и Ω_0 – объем, занятый основной жидкостью. При этом будем учитывать, что тяжелая компонента может двигаться (проникать) сквозь основную жидкость с относительной скоростью $S = V_1 - V_0$. Здесь V_1 и V_0 – абсолютные скорости движения тяжелой компоненты и основной жидкости, S – заданная фиксированная относительная скорость тяжелой компоненты.

При стоковом осаждении одиночного шара с вязкостью вещества η_1 в жидкости с вязкостью η_0 относительная скорость S приближенно равна [13]

$$S_s = [(2g\Delta\rho r^2)/(3\eta_0)] [(\eta_0 + \eta_1)/(2\eta_0 + 3\eta_1)]. \quad (1)$$

При $\eta_1 \gg \eta_0$ (для твердого шара) выражение (1) переходит в формулу Стокса $S_s = 2g\Delta\rho r^2/(9\eta)$, а при $\eta_1 \ll \eta_0$ (для газового шара) выражение (1) переходит в $S_s = g\Delta\rho r^2/(3\eta_0)$. Здесь r – радиус шара, g – ускорение силы тяжести, $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_0$ – скачок плотности.

В двумерной модели (для бесконечного цилиндра, падающего плашмя) скорость падения цилиндра S_c определяется приближенным соотношением [14]

$$S_c = \psi g \Delta\rho r^2 / (4\eta), \quad \psi(\beta) = \ln \beta - (\beta^2 - 1) / (\beta^2 + 1), \quad \beta = b/r. \quad (2)$$

где r – радиус цилиндра, g – ускорение силы тяжести, ψ – множитель, характеризующий влияние боковых стенок с прилипанием, b – расстояние от цилиндра до стенок. Для значений $\beta = 3, 8, 10$ функция ψ принимает соответственно значения 0.3, 1.0 и 1.3. При $\beta = 6$ скорость падения цилиндра (2) совпадает с (1) для шара.

При осаждении частицы внутри слоя других частиц благодаря противотоку жидкости скорость частицы S' уменьшается (увеличивается эффективная вязкость), что описывается введением множителя $S' = \zeta S$, зависящего от концентрации $\zeta = \zeta(C)$. Эта зависимость ζ пока плохо известна и остается предметом многих исследований. По формуле Эйнштейна [13] $\zeta = 1/(1 + 2.5C)$. В работе [11] предлагается более сильная зависимость ζ от концентрации $\zeta = (1 - C)^5$. Очевидно, что благодаря взаимодействию с другими частицами может меняться и траектория частицы. Изложенная ниже теория седиментационной конвекции показывает, что эти траектории определяются течениями седиментационной конвекции, в пределе переходящими в течения Рэлея-Тейлора.

Уравнение движения Навье-Стокса для смеси и уравнения массопереноса для смеси и отдельно для тяжелой компоненты можно записать в обычном виде [13]

$$\rho dV/dt = -\nabla p + \eta \nabla^2 V + \rho g, \quad (3)$$

$$\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho V) = 0, \quad (4)$$

$$\partial C / \partial t + \text{div}(CV_1) = 0. \quad (5)$$

Здесь p - давление, η - постоянная эффективная вязкость смеси, ρ - плотность смеси, равная

$$1/\rho = C\rho_1 + (1-C)\rho_0 = \rho_0(1 + C\Delta\rho/\rho_0), \quad (6)$$

V – скорость движения центра тяжести элемента смеси, равная

$$V = C_m V_1 + (1-C_m)V_0, \quad (7)$$

V_1 и ρ_1 – скорость и плотность для тяжелой компоненты V_0 и ρ_0 – для основной жидкости, $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_0$, C_m - массовая концентрация. Абсолютная скорость тяжелой компоненты V_1 равна векторной сумме относительной скорости S и скорости основной жидкости V_0 , $V_1 = S + V_0$.

Подставим (6) и (7) в (4) и (5). Для малых концентраций $C \ll 1$ и $C_m \ll 1$, полагая $\rho_1 \approx \rho_0$ во всех членах уравнений, кроме члена плавучести, после простых преобразований получим систему уравнений

$$\rho dV/dt = -\nabla p + \eta \nabla^2 V + g(1 + C\Delta\rho/\rho_0)\rho_0 \quad (8)$$

$$\text{div} V = 0 \quad (9)$$

$$\partial C/\partial t = -\text{div}[C(S+V)] \quad (10)$$

Система трех уравнений (8-10) содержит три неизвестные функции: гидродинамическую скорость смеси $V=(U,V,W)$, распределение объемной доли частиц C и давление p .

Рассмотрим двумерный горизонтальный слой жидкости толщиной D . Введем безразмерные переменные. Примем в качестве единицы измерения для длины - толщину слоя D , для скорости V_0 - заданное значение относительной скорости частицы S_0 (например, скорость падения шаров по Стоксу), для времени - время падения частицы с заданной скоростью S_0 через слой неподвижной жидкости $t_0 = D/S_0$, для концентрации частиц - некоторое произвольное значение объемного содержания частиц $C=C_0$ (например $C_0=10\%=0.1$), для давления $p_0 = \eta S_0/D$.

Направим ось z вверх. Поскольку скорость Стокса S направлена вниз, то $\text{div}(CS) = -S\partial C/\partial z$. Для упрощения скорость S принята постоянной. Будем отсчитывать давление от гидростатического распределения, определяемого уравнением

$$\nabla p_0 = -g\rho_0. \quad (11)$$

В безразмерных переменных уравнения (8-10) примут вид

$$(1/Ps)\rho dV/dt = -\nabla p + \nabla^2 V - R_s \cdot C \cdot i_z \quad (12)$$

$$\text{div} V = 0 \quad (13)$$

$$\partial C/\partial t + V \cdot \nabla C = \partial C/\partial z \quad (14)$$

где R_s использованное в работе [1] седиментационное число, аналог тепловому числу Рэлея и Ps - седиментационный аналог числа Прандтля Rg или числа Шмидта Sc (диффузионного аналога числа Прандтля).

$$R_s = \Delta\rho C_0 g D^2 / (S_0 \eta) = (\Delta\rho/\rho) C_0 g D^2 / (S_0 v), \quad Ps = v/(SD) \quad (15)$$

Седиментационное число характеризует интенсивность течений при массопереносе подобно тепловому числу Рэлея для тепловой конвекции $Ra = \alpha \Delta T g D^3 / (\kappa \eta)$, где α – коэффициент теплового расширения, k – коэффициент теплопроводности и $\kappa = k/(\rho c_p)$ – коэффициент температуропроводности, ΔT - перепад температуры в слое, $v = \eta/\rho$ - кинематическая вязкость. Различная зависимость чисел R_s и Ra от толщины слоя обусловлена тем, что поток тепла

пропорционален градиенту температуры $q_T = k_T \cdot \nabla T$, а поток тяжелой компоненты при стоковом падении пропорционален самой концентрации $q_s = S \cdot \rho C$.

Число Прандтля $Pr = \nu/k$ характеризует соотношение между интенсивностями диффузии импульса (благодаря вязкости) и диффузии тепла. Число Шмидта (диффузионный аналог числа Прандтля) $Sc = \nu/k_D$ (где k_D - коэффициент диффузии) характеризует соотношение между интенсивностями диффузии импульса и диффузии массы. Появляющийся в теории седиментационной конвекции седиментационный аналог числа Прандтля $Ps = \nu/(SD)$ характеризует соотношение между интенсивностями диффузии импульса и седиментационного переноса массы тяжелой компоненты.

Отметим, что уравнение для концентрации (14) можно также получить непосредственно из закона сохранения массы примеси в виде $D(\rho C)/Dt = \text{div} q_s$.

Далее для упрощения будем рассматривать только медленные движения при большой вязкости, при больших значениях седиментационного числа Прандтля Ps , когда инерционными членами в уравнения Стокса можно пренебречь.

Для исключения давления из системы уравнений (12, 13) применим операцию **rotrot** к уравнению (12). Тогда с учетом (13) система уравнений (12-14) сведется к двум уравнениям для двух переменных $W(x, z, t)$ и $C(x, z, t)$

$$\nabla^4 W = R_S \partial^2 C / \partial x^2, \quad (16)$$

$$\partial C / \partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla C = \partial C / \partial z \quad (17)$$

Примем простейшие граничные условия для скорости, взяв верхнюю ($z=1$) и нижнюю ($z=0$) границы непроницаемыми $W=0$ без прилипания, т.е. при нулевом сдвиговом вязком напряжении $\sigma_{zx} = \eta(\partial U / \partial z + \partial W / \partial x) = 0$. Так как W равно нулю при всех x то $\partial W / \partial x = 0$. В результате граничные условия для скорости примут вид

$$W = \partial^2 W / \partial z^2 = 0 \text{ при } z=0, 1. \quad (18)$$

Принципиальное отличие уравнения седиментационного массопереноса от уравнения теплопереноса выражается в том, что дифференциальное уравнение (17) для объемной доли частиц C (в отличие от уравнения для температуры T) имеет первый порядок. Поэтому для концентрации нужно задавать только одно граничное условие, например фиксированное значение C_1 на верхней границе

$$C = C_1 \text{ при } z=1. \quad (19)$$

Система уравнений седиментационной конвекции (16, 17) для безразмерных переменных содержит всего один параметр - седиментационное число R_S .

Если в качестве начального взять какое-либо распределение тяжелых частиц без инверсии распределения плотности для смеси, то частицы будут равномерно осаждаться без возникновения конвективных течений. Противоток, вытесняемой вверх основной жидкости, не представляет собой конвекцию, так как не образует замкнутых (или квазизамкнутых) траекторий течения жидкости. При инверсии начального распределения плотности может возникать конвекция. Подобно тому, как при нагреве снизу возникает тепловая конвекция, так при возрастании вверх распределения тяжелых частиц может возникнуть конвекция во всей смеси, которую можно назвать седиментационной конвекцией [1].

3. Конвективная неустойчивость вязкой жидкости с линейным распределением тяжелых частиц

В работах [1, 2, 5] исследована конвективная неустойчивость состояния высоковязкой

жидкости с тяжелыми частицами, оседающими вниз с относительной скоростью S по закону Стокса. Задача аналитического определения критических условий возникновения седиментационной конвекции очень упрощается, если в качестве начального инверсионного распределения кристаллов взять простейшую линейно возрастающую кверху функцию $\underline{C}(z, t=0)=C_1 - \gamma \cdot (1-z)$, где γ – наклон прямой.

В отсутствии конвекции решение уравнений (16)-(19) будет иметь вид (см. рис.1)

$$\begin{aligned} \underline{C}(z, t) &= C_1 \text{ при } z < 1-S \cdot t \\ \underline{C}(z, t) &= C_1 - \gamma \cdot (1-S \cdot t - z) \text{ при } z < 1-S \cdot t. \end{aligned} \tag{20}$$

Это решение соответствует равномерному осаждению слоя частиц через неподвижную жидкость. Заметим, что в рассматриваемом приближении малой концентрации частиц мы пренебрегаем небольшим противотоком жидкости.



Однако такой режим осаждения слоя кристаллов при определенных условиях может нарушаться с возникновением конвективного движения всей жидкости. Будем искать решение уравнений (16)-(19) в виде суперпозиции решения $\underline{C}(z, t)$ для осаждения частиц в неподвижной жидкости $W=0$ и возмущения, растущего во времени, т.е. применим подход, развитый Рэлеем для анализа возникновения тепловой конвекции. В малом нелинейном члене $\mathbf{V} \cdot \nabla C$ заменим распределение концентрации C на ее начальное линейное распределение \underline{C} и для простоты положим $\gamma=1$. Тогда $\nabla \underline{C} \approx \nabla C = \mathbf{i}_z$. В результате нелинейное дифференциальное уравнение (17) упрощается до линейного уравнения

$$\partial C / \partial t + W = \partial C / \partial z. \tag{21}$$

Будем искать решения уравнений (16, 21) для скорости движения жидкости W и для распределения тяжелой компоненты C в виде, соответствующим конвективным течениям (аналогично теории тепловой неустойчивости Рэля), в виде

$$W(x, z, t) = \exp(\lambda t) \cdot \varphi(z) \cdot \cos(kx), \quad C(x, z, t) = \underline{C}(z, t) + \exp(\lambda t) \cdot f(z) \cdot \cos(kx), \tag{22}$$

где показатель λ характеризует скорость нарастания возмущений во времени и k - волновое число, характеризующее его длину волны $2\pi/k$ с периодичностью по оси x .

После подстановки (22) в уравнения (16, 21) с учетом (20) получим систему уравнений для функций $\varphi(z)$ и $f(z)$

$$\begin{aligned} (d^2/dz^2 - k^2)^2 \varphi(z) &= -k^2 R_s f(z), \\ \lambda f(z) + \varphi(z) &= df/dz \end{aligned} \quad (23)$$

Исключая $\varphi(z)$ из (23), получим для $f(z)$ дифференциальное уравнение пятого порядка, содержащее три параметра R_s , k и λ

$$(d^2/dz^2 - k^2)^2 (df/dz - \lambda f) = -k^2 R_s f(z) \quad (24)$$

С граничными условиями

$$f|_{z=1} = df/dz|_{z=1} = d^2f/dz^2|_{z=1} = df/dz|_{z=0} = d^2f/dz^2|_{z=0} = 0. \quad (25)$$

Будем искать частные решения уравнения (24) в виде экспоненциальной функции от z

$$f(z) = A \cdot \exp(qz). \quad (26)$$

Подставив (26) в уравнение (24), получим алгебраическое уравнение пятой степени для определения коэффициента q

$$(q^2 - k^2)^2 (q - \lambda) = -k^2 R_s. \quad (27)$$

Это уравнение имеет пять корней q_1, \dots, q_5 . Поэтому общее решение уравнения (24) можно записать в виде суммы пяти функций

$$f(z) = \sum A_n \cdot \exp(q_n z) \quad (28)$$

Пять коэффициентов A_n находятся из пяти граничных (25). Поскольку получающаяся система пяти алгебраических уравнений однородна, то она имеет ненулевые решения при условии равенства нулю ее определителя. В результате получается одно алгебраическое уравнение, связывающее параметры R_s , λ и k . В явном виде его можно записать как $R_s = R_S(k, \lambda)$ или как $\lambda = \lambda(R_S, k)$. По (22) коэффициент λ характеризует скорость нарастания возмущений. Они не затухают, если $\lambda > 0$. Для фиксированной моды (фиксированного волнового числа k^*) уравнение $\lambda = \lambda(R_S, k^*)$ определяет критическое значение седиментационного числа R_S , при котором λ становится положительным и возникает седиментационная конвекция с данной модой k^* . При этом из всех возможных мод k^* должна реализоваться та мода течений, k^*_{\min} , для которой критическое седиментационное число R_S^* минимально.

Как показано в работах [1, 2, 5], для рассматриваемых граничных и начальных условий минимальное критическое седиментационное число равно $R_S^* = 105$. При этом волновое число, которое дает это минимальное значение седиментационного числа равно $k^*_{\min} = 3.0$.

На рис.2 приведена функция $\lambda = \lambda(R_S^*, k^*)$ при фиксированном значении $k^* = 3.0$. Как видно на рис.2, этот коэффициент положителен при $R_S^* > 105$. Таким образом, это значение седиментационного числа R_S^* является критерием нарастания возмущений и начала седиментационной конвекции.



Минимальное критическое число Рэлея $R_s^*=105$ согласно (25) получено для обеих скользких границ. При этом длина волны наиболее быстро растущей моды равна $2\pi/k^*$, а конвективная ячейка имеет аспектное отношение (отношение ширины к высоте), равное $a^*=\pi/k^*=1,05$. Для обеих шероховатых границ (с полным прилипанием) $R_s^*=220,8$ и $a^*=0,68$. Для одной скользкой и другой шероховатой границ $R_s^*=157,1$ и $a^*=0,83$. Как известно, при тепловой конвекции с начальным линейным распределением температуры для разных типов границ критические числа Рэлея и аспектные отношения соответственно равны $Ra^*=657,5$ и $a^*=1,41$; $Ra^*=1707,8$ и $a^*=1,01$; $Ra^*=1100,7$ и $a^*=1,17$.

Таким образом, при значениях седиментационного числа R_s , меньших критического R_s^* , возмущения вида (22) затухают ($\lambda < 0$), и слой тяжелых частиц с начальным линейным распределением оседает равномерно без возникновения конвективных течений. При $R_s > R_s^*$ в смеси жидкости и тяжелых частиц конвективные возмущения нарастают ($\lambda > 0$), и возникает седиментационная конвекция, при которой, как будет видно далее на рис. 3-4, слой частиц начинает деформироваться (аналогично неустойчивости Рэлея-Тейлора), а скорость суммарного массопереноса частиц увеличивается, т.к. к стоксовому осаждению частиц добавляется их перенос конвективными течениями.

Выражение для седиментационного числа (15) можно получить качественно из баланса сил. При возмущении границы раздела между основной жидкостью и вышележащей смеси элемент жидкости, в котором объемная концентрация тяжелых частиц равна C , обладает отрицательной плавучестью $f_1 = a_1 C \Delta \rho g$ и при движении вниз тормозится силой трения $f_2 = a_2 \eta V / D^2$. При установившемся течении обе силы должны быть равны друг другу. Поэтому скорость опускания рассматриваемого элемента будет равна $V = (a_1/a_2) C \Delta \rho g D^2 / \eta$. Движение вниз рассматриваемого элемента возмущенной жидкости не затухнет, если его скорость больше, чем скорость S , с которой тяжелые частицы по закону Стокса выпадают из слоя, $V > S$. В противном случае тяжелые частицы уйдут из рассматриваемого элемента жидкости, и он перестанет быть тяжелым. Таким образом, критерий возникновения конвективных течений в жидкой смеси принимает вид $V = (a_1/a_2) C \Delta \rho g D^2 / \eta > S$ или $\Delta \rho C g D^2 / S \eta > (a/a_1)$. Таким образом, в соответствии с определением седиментационного числа (15) конвекция не затухает, если $\Delta \rho C g D^2 / S \eta = R_s$ больше некоторого критического значения.

Заметим, что в теории неустойчивости Рэлея - Бенара в качестве начального состояния берется состояние покоя при линейном распределении температуры с кондуктивным потоком тепла. Тепловая конвекция возникает, когда (при малом коэффициенте теплопроводности и вязко-

сти) конвективный перенос тепла более эффективным, чем кондуктивный. При седиментационной конвекции исследуется неустойчивость начального состояния при линейном распределении оседающей тяжелой компоненты. Седиментационная конвекция возникает, когда (при малой скорости осаждения Стокса) конвективный перенос массы оказывается более эффективным, чем осаждение по Стоксу.

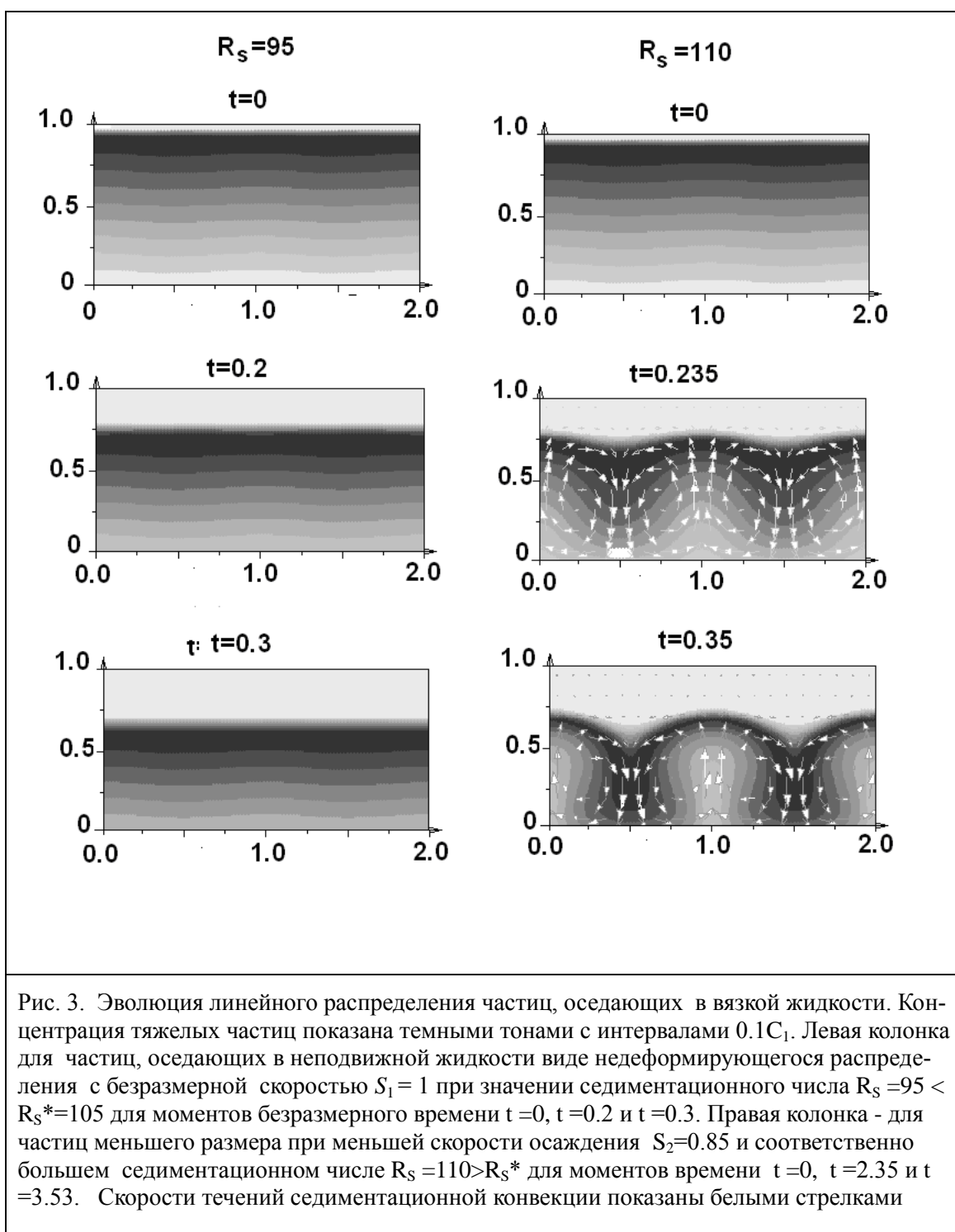
4. Численные решения слабо надкритичной и развитой седиментационной конвекции, вызванной инверсионным распределением тяжелых частиц

Численное решение исходных уравнений седиментационной конвекции (12-14) с учетом нелинейности члена $\mathbf{V} \cdot \nabla C$ дает возможность проследить эволюцию распределения частиц, оседающих в вязкой жидкости, а также зависимость структуры конвективных течений от различных значений седиментационного числа R_S , не только для слабо надкритических, но и конечно-амплитудных нелинейных течений.

4а) Осаждение тяжелой компоненты при линейно возрастающем кверху распределении с возникновением слабой седиментационной конвекции

Чтобы проверить полученные результаты аналитического решения для конвективной неустойчивости, было проведено численное решение уравнений (12-14) для модели с таким же указанным выше начальным распределением частиц, линейно возрастающим кверху $C_0(z, t=0) = C_1 - \gamma \cdot (1-z)$ для двух значений седиментационного числа R_{S1} и R_{S2} , меньшего критического значения и больше критического значения R^*_S .

На рис. 3 в левой колонке представлены результаты численного решения уравнений (12-17) для эволюции распределения тяжелых частиц с безразмерной скоростью оседания, равной $S_1=1$ (или $S_1=S_0$ в размерном виде) при значении седиментационного числа, равного $R_{S1}=95$, что меньше критического значения, равного $R^*_S=105$. В этом случае в соответствии с результатами аналитического решения даже при слабом возмущении распределения конвекция не возникает, и слой тяжелых частиц оседает как целое по Стоксу со скоростью падения одиночной частицы. На рис. 3 в левой колонке приведено вычисленное распределение частиц для моментов безразмерного времени (в единицах D/S) $t=0$, $t=0.2$ и $t=0.3$.



В правой колонке рис.3 приведены результаты расчета для частиц несколько меньшего размера, для которых скорость Стокса равна $S_2=0.85$ (или $S_2=0.85S_0$ в размерном виде). При такой скорости Стокса седиментационное число по (15) оказывается в $1/0.85=1.17$ раз большим и равным $R_{S1}=110$, что больше критического значения $R_{S1}^*=105$. В этом случае кондуктивный массоперенос путем простого стоксового осаждения становится малоэффективным, мгновенное распределение частиц в виде медленно оседающего неоднородного слоя становится неустойчи-

вым и подобно рэлей-тейлоровской неустойчивости возникают течения всей смеси. Скорости течений показаны стрелками. Соответственно деформируется распределение тяжелых частиц. Чтобы легче сравнить положение верхней границы распределения частиц для обоих рассмотренных случаев, в правой колонке рис. 1 для более медленно оседающих частиц показаны моменты времени с более длительными интервалами безразмерного времени $t=0$, $t=2/0.85=2.35$ и $t=3/0.85=3.53$.

Таким образом, результаты численного решения уравнений массопереноса для эволюции осаждения тяжелых частиц в вязкой жидкости для случая инверсии плотности с линейно возрастанием концентрации кверху в соответствии с аналитически решением выявляет два режима. При седиментационном числе, большем критического, режим стокового осаждения (аналогичного кондуктивному переносу тепла) сменяется на конвективный режим. При этом скорость переноса массы убыстряется по сравнению со стоковым падением этих же одиночных частиц. Но, конечно, эта скорость массопереноса остается меньшей по сравнению со случаем осаждения более крупных частиц.

4б) Осаждение однородного слоя тяжелых частиц с возникновением седиментационной конвекции

Аналитическое решение задачи на неустойчивость было проведено для случая инверсионного линейного распределения оседающих частиц, когда уравнения для возмущений сильно упрощаются. При численном решении рассмотрен и другой более часто встречающийся случай осаждения однородного слоя частиц с фиксированной концентрацией. Значение безразмерной объемной доли частиц было взято равным $C=1$ (или $C=C_0$ в размерном виде) внутри слоя и $C=0$ вне слоя. Боковые стенки взяты непроницаемыми и без прилипания. Одна из границ слоя (нижняя) взята неровной, чтобы создать начальное возмущение для развития конвекции, а также продемонстрировать зависимость скорости нарастания возмущения от номера волнового числа k .

Численные решения уравнений седиментационной конвекции (12-14) были получены как для подкритических чисел Rs , так для конечно-амплитудных течений, в которых нелинейный член $\mathbf{V} \cdot \nabla C$, учитывающий обратное влияние изменяющегося распределения тяжелых частиц на скорости течения, становится большим.

На рис. 4 в левой колонке для сравнения представлены результаты расчета для осаждения крупных частиц со скоростью Стокса $S=S_1$ при значении седиментационного числа $R_{S1}=80$. При таком подкритическом значении числа Рэля в смеси жидкой смеси даже при инверсии плотности конвекция не возникает. Как и в случае линейного распределения частиц, слой частиц опускается, не деформируясь, со скоростью осаждения отдельной частицы в безразмерных единицах S_1 .

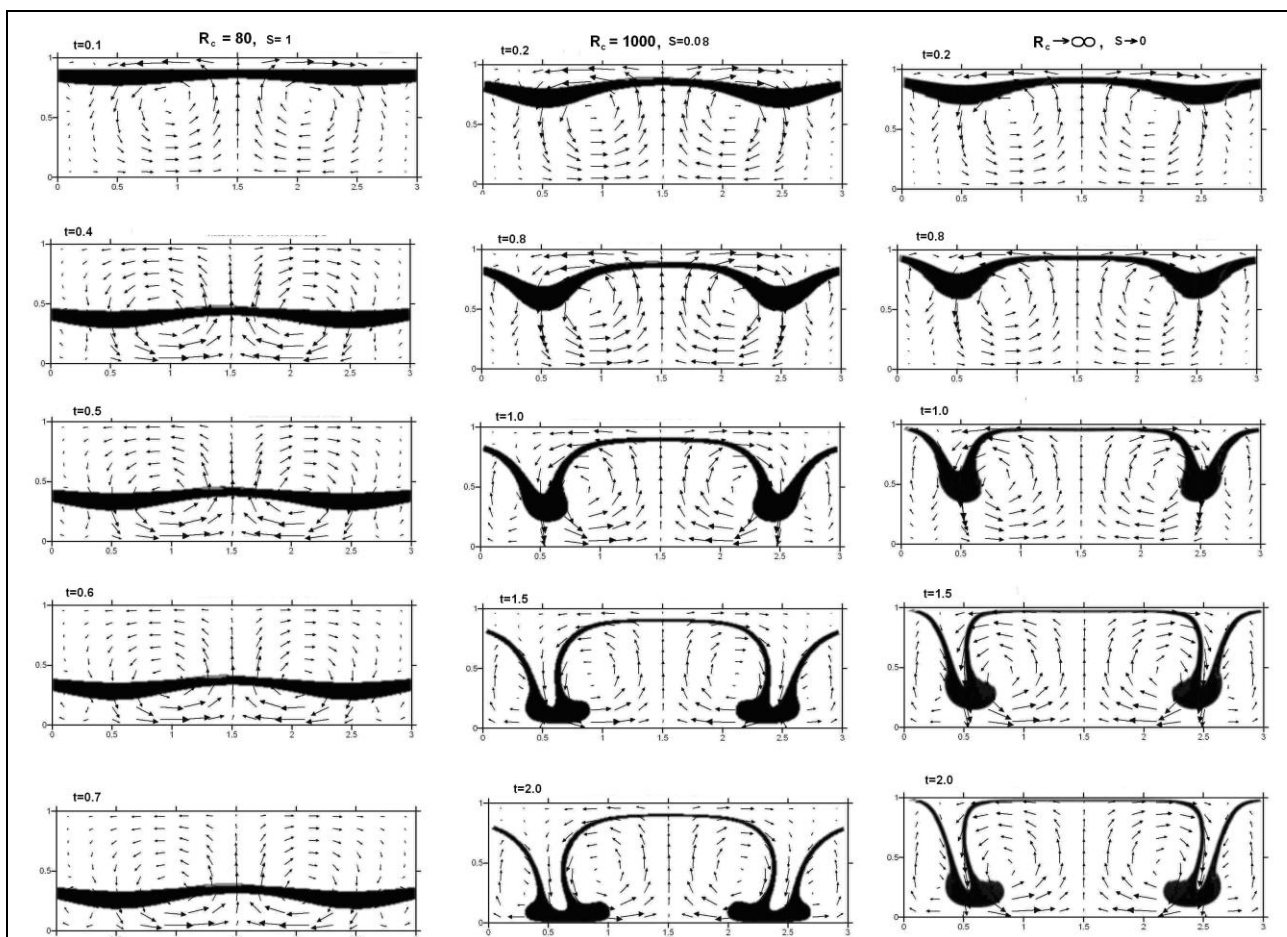


Рис.4. Результаты численного моделирования осаждения слоя частиц в вязкой жидкости при различных скоростях Стокса и соответственно разных значений седиментационного числа. В левой колонке слой осаждается как целое со скоростью Стокса. В правой колонке при нулевой скорости осаждения частиц возникают течения Рэлея-Тейлора

Во второй колонке приведены расчеты эволюции жидкой смеси с мелкими частицами, безразмерная скорость оседания Стокса для которых равна $S_2 = 0.08$, что соответствует значению седиментационного числа $R_{S2} = 1000$ развитой седиментационной конвекции. В третьей колонке приведена эволюция распределения еще более мелких частиц со скоростью осаждения $S_3 = 10000$, что практически соответствует бесконечному значению седиментационного числа $R_{S3} \rightarrow \infty$. В этом предельном случае седиментационная конвекция переходит в классические течения неустойчивости Рэлея-Тейлора.

Как видно на рис.4, несмотря на то, что скорость Стокса для частиц в средней колонке в 80 раз меньше, чем в левой колонке, слой достигает дна всего в три раза дольше. При этом возникают течения седиментационной конвекции, характеризуемые числом $R_s = 1000$, структура которых уже близка к структуре течений Рэлея-Тейлора.

Таким образом, седиментационная конвекция резко убыстрит перенос массы, особенно для мелких частиц. В пределе одинокие очень мелкие частицы, имеющие очень малую скорость стоксового осаждения, почти висят как бы замороженными в слой основной жидкости. Но, поскольку эти частицы все-таки тяжелее основной жидкости, то они эквивалентны слою тяжелой жидкости. Такой предельный случай эквивалентен классической задаче Рэлея-Тейлора. Таким образом, развитая в работах авторов теория седиментационной конвекции включает теорию Рэ-

ля-Тейлора как частный предельный случай.

Как видно на рис. 4, по данным этого моделирования критическое значение седиментационного числа для перехода режима осаждения слоя частиц по Стоксу к режиму седиментационной конвекции находится в интервале значений от 80 до 1000.

4в) Зависимость скорости роста мод возмущений от волнового числа для оседающего слоя в критическом режиме

Чтобы более точно определить критическое седиментационного числа для слоя оседающих частиц и выявить наиболее быстро растущую моду, были проведено численное решение уравнений (12-14) для $Rs=100$ и $Rs=200$, при этом для различных начальных мод возмущений.

На рис. 5 приведены результаты решения для осаждения слоя при значении седиментационного числа $Rs=100$. В левой колонке начальное положение возмущенной нижней границы слоя взято в виде $z=0.2+0.03\sin(\pi x)$, а в правой $z=0.2+0.03\sin(3\pi x)$. Как видно на рис.5, при осаждении слоя частиц возмущения при $k=\pi$ и при $k=2\pi$ нарастают очень медленно, так что слой не успевает существенно деформироваться во время падения.

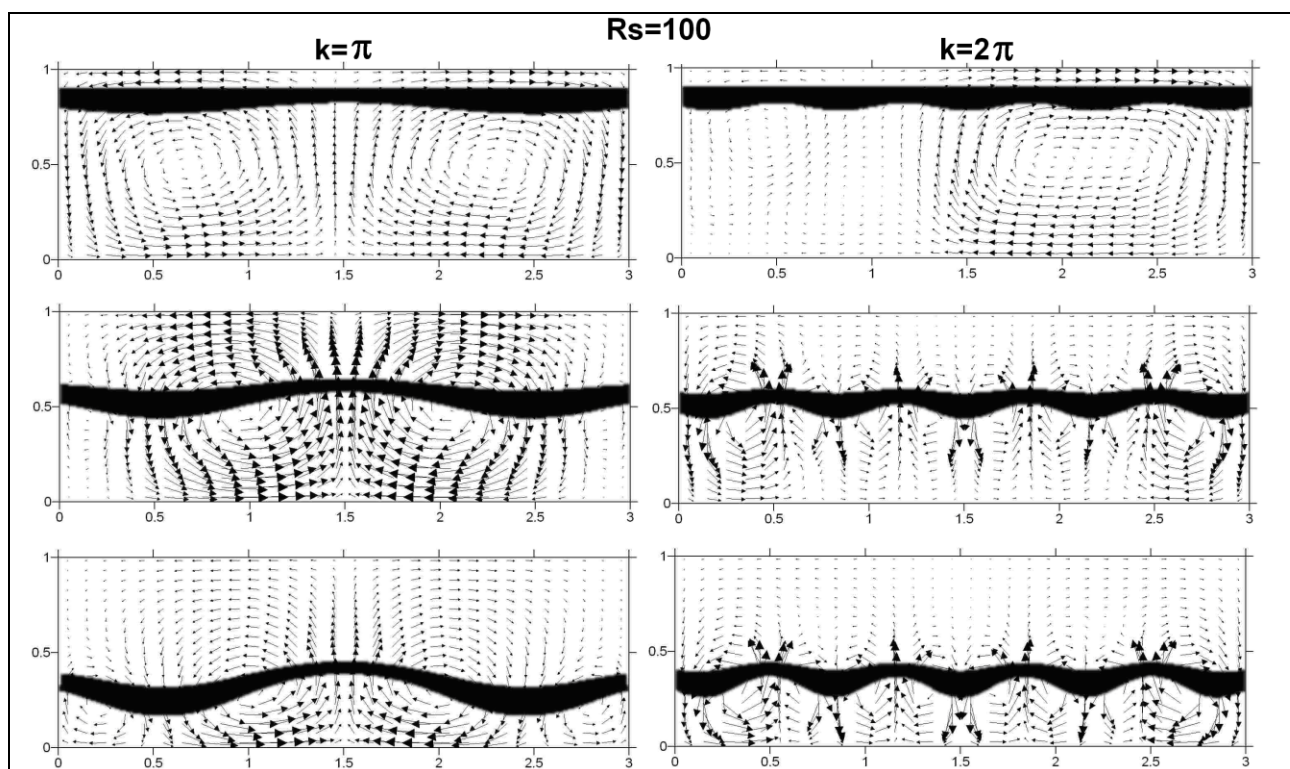


Рис. 5. Осаждение слоя тяжелых частиц при $Rs=100$ для двух мод начального возмущения нижней границы при $k=\pi$ и $k=2\pi$.

На рис. 6 приведены результаты решения для осаждения слоя при значении седиментационного числа $Rs=200$ при различных модах возмущения с волновыми числами $k=\pi$, $k=3\pi$, $k=6\pi$. Как и в случае $Rs=100$ более быстро растущей оказывается мода $k=\pi$, но начинают расти и более высокие моды. Как было показано выше, аналитическое решение на неустойчивость линейного распределения оседающих частиц дает для наиболее быстро растущей моды значение $k=3$, что

хорошо согласуется с полученными численными решениями.

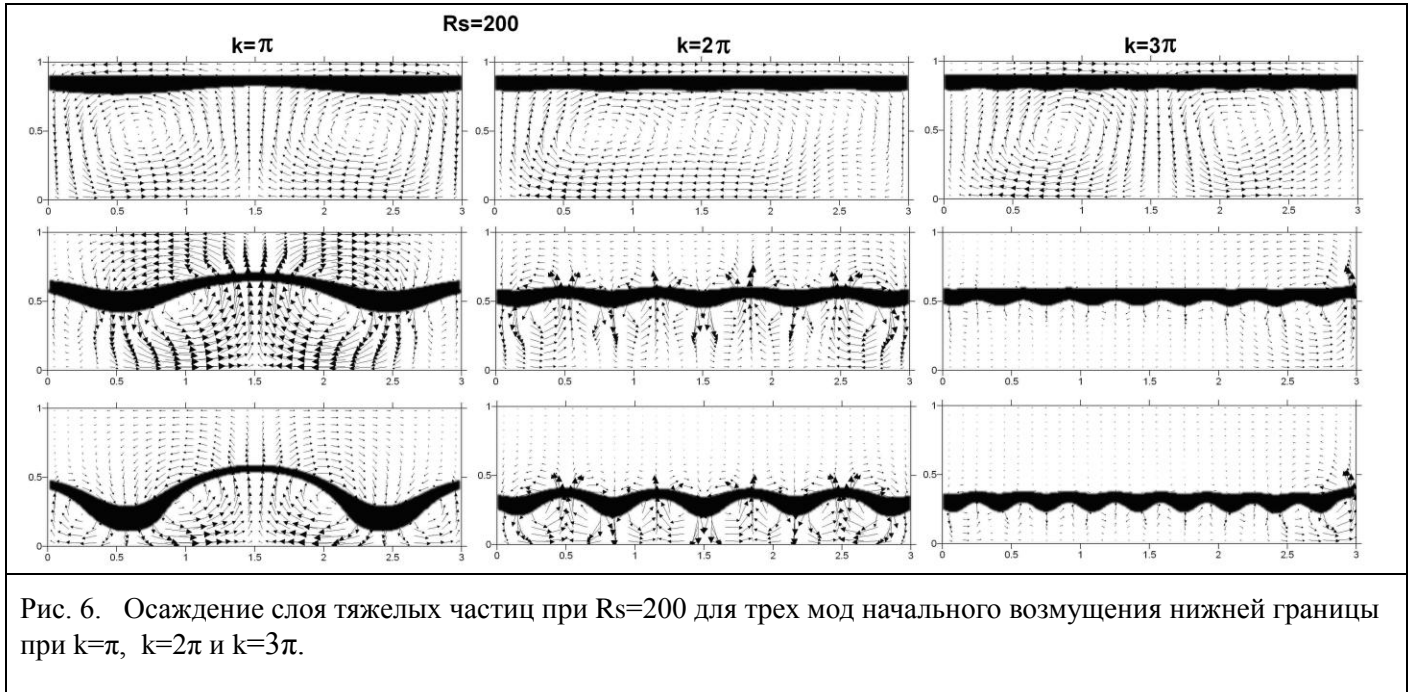


Рис. 6. Осаждение слоя тяжелых частиц при $Rs=200$ для трех мод начального возмущения нижней границы при $k=\pi$, $k=2\pi$ и $k=3\pi$.

Значение критического седиментационного числа для линейного распределения равно $Rs=105$. Как видно из сравнения рис.5 и 6, для оседающего слоя седиментационная конвекция начинается при значении Rs^* в интервале 100-200. Для практической оценки критерий возникновения седиментационной конвекции при осаждения слоя тяжелой суспензии, когда начинают расти первые моды возмущений, можно принять приближенно в виде $Rs^*\approx 200$.

4г) Универсальный критерий для возникновения седиментационной конвекции при осаждении слоя взаимодействующих оседающих частиц.

Подставим в выражение (15) для седиментационного числа скорость осаждения частицы (1) для случая падения шаров по Стоксу $S'_s = \xi 2g\Delta\rho r^2 / (9\eta)$. В результате для седиментационного числа получается очень простое выражение

$$R_s = (4.5/\xi) C (D/r)^2 \tag{29}$$

Таким образом, критерий для возникновения течений седиментационной конвекции при осаждении слоя шаров можно записать в виде

$$R_s = (4.5/\xi) C (D/r)^2 > R_s^* \approx 200$$

или

$$(r/D)^2 < 4.5C / (\xi R_s^*) = 0.0225C/\xi, \quad r/D < 0.15(C/\xi)^{1/2}, \quad C > 44 \xi (r/D)^2 \tag{30}$$

В двумерной модели аналогом шаров будут цилиндры, падающие плашмя. Для слоя цилиндров с учетом выражения (2) для скорости их осаждения критерий запишется в виде

$$(r/D)^2 < 4C / (\xi\psi R_s^*) = 0.02 \psi C_0 / \xi, \quad r/D = 0.14 C^{1/2} (\xi\psi)^{-1/2}, \quad C > 50 \xi\psi (r/D)^2 \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{При } r > r^* \text{ (или } C < C^*) \text{ - стоксово осаждение,} \\
 &r < r^* \text{ (или } C > C^*) \text{ - седиментационная конвекция,} \\
 &r \ll r^* \text{ (или } C \gg C^*) \text{ - течения Рэлея-Тейлора.}
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

При $r > r^*$ слой частиц падает как целое по Стоксу, при $r < r^*$ слой деформируется, и возникают струйные течения, в пределе переходящие в течения Рэлея-Тейлора.

Интересной особенностью полученного универсального критерия является его независимость ни от вязкости основной жидкости, ни от скачка плотности. На первый взгляд могло бы показаться, что тяжелые свинцовые шарики, падающие с большей скоростью, будут предпочтительнее падать в режиме Стокса. Физический смысл независимости критерия от плотности частиц объясняется тем, что критерий фактически определяется равенством скорости осаждения частиц и скорости роста возмущений рэлей-тейлоровской неустойчивости. При этом они обе прямо пропорциональны плотности частиц и обратно пропорциональны вязкости. Поэтому плотность частиц и вязкость основной жидкости в критерий не входят.

5. Численные эксперименты для осаждения цепочки тяжелых частиц в вязкой жидкости

Выше аналитически и численными решениями было исследовано явление возникновения конвективных течений при осаждении тяжелых частиц в высоковязкой жидкости. Используемые уравнения, кроме условия малых концентраций, были получены на основе общепринятого приближенного метода усреднения. Дискретное распределение частиц было заменено непрерывным распределением тяжелой компоненты в смеси двух жидкостей. При этом учитывалась возможность проникновения тяжелой жидкости сквозь основную жидкость с заданной эффективной относительной скоростью. Очевидно, что такое усреднение применимо только для большого числа частиц малого размера. Поэтому для проверки степени применимости полученных результатов для движения системы твердых взаимодействующих частиц в высоковязкой жидкости были проведены непосредственные численные эксперименты, описывающие как режим стоксового осаждения частиц, так и возникновение конечно-амплитудных течений седиментационной конвекции. При этом не используется ни приближение малых концентраций, ни усреднение распределения частиц.

Численный расчет движения жидкости с частицами проводился непосредственно решением уравнения Стокса для вязкой жидкости. При этом каждая твердая частица моделировалась как локальная область аномально повышенной на 4 порядка вязкости и повышенной плотности. Движение каждой этой области прослеживалось с помощью большого числа активных маркеров, которые перемещаются на каждом временном интервале со скоростью течений смеси V на расстояние $dl = Vdt$. В каждый момент времени неоднородное распределение вязкости определяется мгновенным распределением маркеров, полагая, что область, занятая маркерами имеет аномально повышенную вязкость и плотность, т.е. маркеры переносят и плотность и вязкость пропорционально пространственной плотности их распределения. При вязкости, моделирующей твердые частицы, соответствующие маркеры остаются внутри каждой частицы. При таком численном решении уравнения Стокса находится эволюция скорости течений в каждой точке смеси, эволюция распределения вязкости и эволюция распределения частиц.

Численное решение проводилось с помощью программы в конечных элементах СиткомCU (CITCOM-CU), разработанной Moresi [16], усовершенствованной Zhong [17] и с дополнениями и автоматизированной графикой, разработанной Евсеевым [18].

Осаждение однородной цепочки одинаковых цилиндров в вязкой жидкости

Полученный выше по (31) аналитический критерий $C > 50(\zeta\psi)(r/D)^2$ для деформации оседающей цепочки цилиндров был проверен непосредственным численным моделированием. Для этого численно решалось уравнение Стокса для вязкой жидкости в области с аспектным отношением L/D , где L – ширина области. Как указывалось выше, использовался метод активных маркеров (переносящих плотность и вязкость), позволяющий постоянно проследить перемещение вещества, а именно вещества цилиндров.

Для цепочки N цилиндров с радиусами r в области шириной L концентрация C равна суммарной площади торцов цилиндров деленной на площадь слоя толщиной в диаметр цилиндра $C = \pi r^2 N / 2rL = \pi r N / 2L$. Подставляя эту концентрацию C в критерий (31), получим условие неустойчивости стокова осаждения для числа частиц в цепочке в виде

$$N > (100/\pi)(\zeta\psi)(r/D)(L/D) \quad (33)$$

В случае цилиндров с относительными радиусами $(r/D)=0.1$ и аспектным отношением расчетной области $(L/D)=3$ получим $N > 9.6(\zeta\psi)$. Подставим сюда входящие в формулу для скорости (2) выражение для вязкости суспензий выражение Эйнштейна $\zeta = 1/(1+2.5C)$ и в качестве оценки примем для функции $\psi \approx 1$. В результате критерий неустойчивости стокова осаждения цепочки цилиндров получим в виде квадратного уравнения $N > 9.6/(1+0.13N)$. Его решение дает $N > 5.4$.

На рис. 7 представлены результаты численного моделирования осаждения в вязкой жидкости в области $L \times D = 3 \times 1$ для линейной цепочки трех, пяти и девяти цилиндров с радиусами $r/D = 0.1$ от толщины слоя жидкости. В левой колонке слой из трех цилиндров падает по Стоксу как целое. В средней колонке слой из пяти цилиндров также падает почти как целое, при этом очень незначительно деформируется. В правой колонке слой из девяти цилиндров резко деформируется, и в смеси возникают струйные течения седиментационной конвекции, которые в пределе соответствуют течениям Рэлея-Тейлора.

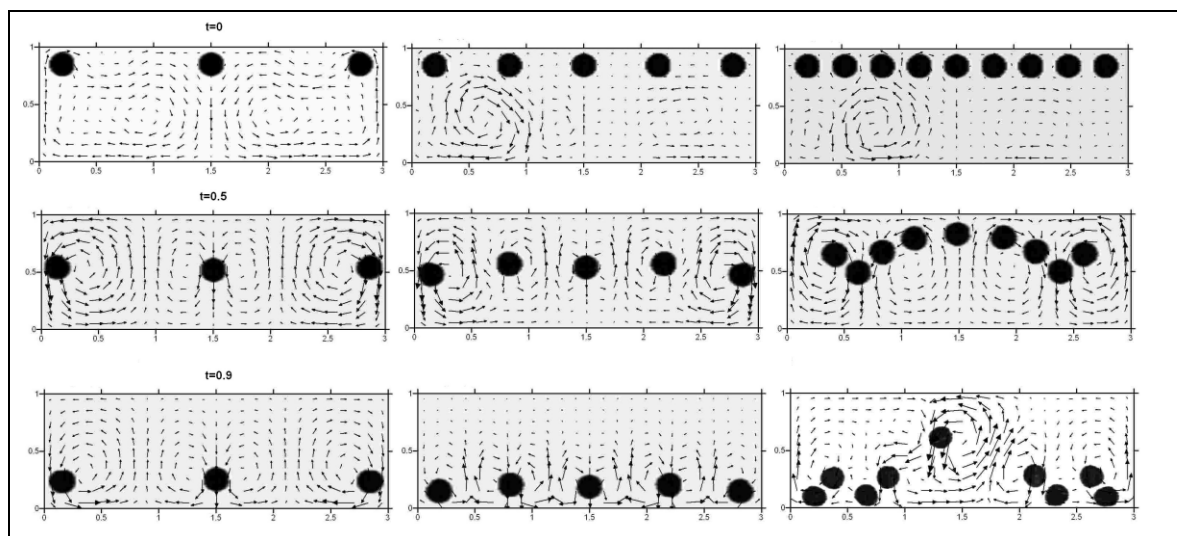


Рис. 7. Результаты численного моделирования осаждения частиц в вязкой жидкости с радиусами $r=0.1$ в области размером 3×1 . Разреженная цепочка из 3 частиц падает как целое по Стоксу. В цепочке из 9 частиц благодаря взаимодействию возникает седиментационная конвекция, ускоряющая перенос массы.

Таким образом, несмотря на то, что критерий возникновения седиментационной конвекции был получен аналитически для усредненного распределения тяжелых частиц и для малых концентраций, неожиданно он согласуется и с численными экспериментами для осаждения слоя дискретных частиц.

6. Заключение

Классическими теориями неустойчивости в вязкой жидкости являются теория Рэлея-Бенара и теория Рэлея-Тейлора. При неустойчивости нагретой снизу однокомпонентной жидкости кондуктивный теплоперенос сменяется на регулярную тепловую конвекцию Рэлея-Бенара с ускорением теплопереноса. Неустойчивость слоя тяжелой изотермической жидкости, лежащего на легкой жидкости, приводит к возникновению струйных течений, описываемых теорией Рэлея-Тейлора. При этом обычно считается, что эти теории качественно различны. Кроме того, что эти теории описывают разные виды переноса (тепла или массы), полагается, что они описывают качественно различные структуры течений.

В работе акцентируется внимание на то, что неустойчивость Рэлея-Тейлора является частным предельным случаем седиментационной конвекции в суспензии, течения которой подобны течениям тепловой конвекции. Если резко нагреть нижнюю часть слоя вязкой жидкости с очень малым коэффициентом теплопроводности, то появится инверсия плотности, и вначале возникнут струйные течения, подобные течениям Рэлея-Тейлора. Со временем, по мере выравнивания скачка температуры (или при начальном линейном распределении), эти течения заменятся на течения тепловой конвекции Рэлея-Бенара. Аналогично при очень малых размерах частиц и соответственно малой скорости осаждения, частицы в суспензии оказываются замороженными в жидкость и область, занятая частицами, оказывается аналогичной тяжелой жидкости. Поэтому появляется неустойчивость Рэлея-Тейлора, и возникают струйные течения жидкости с замороженными частицами. При конечных размерах частиц с конечной скоростью стокового осаждения в общем случае возникает седиментационная конвекция, аналогичная тепловой конвекции. Некоторое количественное отличие в структурах течений тепловой и седиментационной конвекции обусловлено различной зависимостью потоков тепла и массы от температуры и концентрации. При этом критерий перехода от стокова осаждения к седиментационной конвекции оказывается универсальным и не зависит ни от плотности частиц, ни от вязкости жидкости.

Одиночная тяжелая частица падает в вязкой жидкости по закону Стокса. Этот закон усложняется в присутствии других частиц, находящихся на расстояниях, сравнимых с их радиусом. При этом должны меняться как величина скорости, так и траектория частиц. Исследованию изменения величины скорости, описываемое как увеличение эффективной вязкости суспензии, посвящено много работ. В настоящей работе на основе седиментационной конвекции частично показывается, как меняются траектории частиц. Их гидродинамическое взаимодействие приводит к тому, что падающие частицы перегруппируются и объединяются в области, эквивалентные эффективной большей быстрее падающей частице или струе. В пределе этот эффект и вызывает струйное перемешивание Рэлея-Тейлора.

Аналитическая теория и численные результаты в настоящей работе изложены для случая высоковязких жидкостей при пренебрежении инерционными членами, но сохраняют качественно выводы и для случая конечного немалого седиментационного числа Прандтля.

Авторы выражают благодарность А.Н. Осипову за полезные замечания и рекомендации по улучшению статьи. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 11-05-000256 и 11-05-000262.

Литература

1. Трубицын В.П., Харыбин Е.В. Конвективная неустойчивость режима седиментации в мантии // Физика Земли, 1987, № 7, С.21-30.
2. Трубицын В.П., Харыбин Е.В. Термоседиментационная конвективная неустойчивость двухкомпонентной вязкой жидкости // Физика Земли, 1991, № 2, С.3-17.
3. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability// Oxford.Clarendon Press, 1961, P.652.
4. Joseph D.D. Viscous potential flow// J. Fluid. Mech. 2003, V.479, P.191-197.
5. Трубицын В.П., Харыбин Е.В. Гидродинамическая модель дифференциации вещества в Земле // Физика Земли, 1988, №4, С.83-86.
6. Трубицын В.П., Харыбин Е.В. Конвекция в магматических камерах, вызванная инверсией распределения по глубине осаждающихся кристаллов // Физика Земли, 1997, № 5, С.47-52.
7. Трубицын В.П., Харыбин Е.В. Конвекция в вязкой жидкости с оседающими частицами// Физика Земли, 2005, №12, С.3-11
8. Hill W.D., Rothhfus R.R., Kun Li. Boundary enhanced sedimentation due to settling convection// Intern. J. Multiphase Flow, 1977, V.3, N6, P. 561-583
9. McCaffrey S.J., Elliott L., Ingham D.B., Enhanced Sedimentation in Inclined Fracture Channels// Topics in Engineering. 1997, V. 32, P. 280-291
10. Невский Ю.А., Осипцов А.Н. Медленная гравитационная конвекция дисперсных систем в областях с наклонными границами//Изв. РАН, Механика жидкости и газа, 2011, №2, с. 65-81
11. Невский Ю.А. Моделирование гравитационной конвекции в дисперсных системах // Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. Москов. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. Москва, 2010, с. 1-22
12. Rudman M., Two-phase natural convection for crystal settling in magma chambers// Phys. Earth Planet. Inter., 1992, V.72, P.153-172.
13. Ландау,Л.Д., Лифшиц Е.М., Гидродинамика. <<Наука>> Москва 1986.
14. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой вязкости, ГИТТЛ, Москва, 1955, С. 514.
15. Richardson, J.F., Zaki, W.N. Sedimentation and fluidization// I. Trans. Inst. Chem. Eng. , 1954, V.32, P.35–53.
16. Moresi L.N., Solomatov V. S. Numerical investigation of 2D convection with extremely large viscosity variations// Phys. Fluids, 1995, V.7, P. 2154-2162.
17. Moresi L., Zhong S. J., Gurnis M. The accuracy of finite element solutions of Stokes' flow with strongly varying viscosity // Phys. Earth Planet. Inter., 1996, V. 97, P. 83-94.
18. Трубицын В.П., Евсеев А.Н., Баранов А.А., Трубицын А.П. Структура конвекции при различной ширине зон фазовых переходов // Физика Земли. 2008. №8 . С. 3-14.

Статья поступила в редакцию 29 октября 2012 г.