

ИНДЕКС УДК 533.5

**ИСТЕЧЕНИЕ СТРУЙ ИДЕАЛЬНОГО И РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ ИЗ  
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СОПЕЛ. ВОПРОСЫ ПОДОБИЯ  
2. ИСТЕЧЕНИЕ В ЗАТОПЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО**

**Ю.И. Герасимов<sup>1</sup>, В.Н. Ярыгин<sup>2</sup>**

*1 – Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С.П. Королева, г. Королев  
2 – Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теплофизики  
им. С.С. Кутателадзе СО РАН (ИТ СО РАН), г. Новосибирск  
yury.gerasimov@rsce.ru, yarygin@itp.nsc.ru*

**Аннотация**

Приведены результаты теоретических, расчетных и экспериментальных исследований газодинамических и геометрических параметров течения струй газа, истекающих из сверхзвуковых сопел в затопленное пространство с сильным недорасширением. Сформулирована система параметров подобия этого класса струйных течений, получены простые зависимости для определения плотности и динамического давления газа в поле течения струи. Представлена методология воспроизведения в модельных экспериментах условий истечения струй ракетных двигателей с использованием струй  $\text{CO}_2$  с тождественными значениями характерного угла расширения и пересчета их результатов на натурные условия истечения струй.

**JET EXPANSION OF IDEAL AND REAL GASES FROM AXISYMMETRIC NOZZLES.  
SIMILARITY MATTERS. 2. OUTFLOW OF JETS INTO SUBMERGED SPACE**

Results of theoretical, computational and experimental studies of gas-dynamic and geometric parameters of strongly underexpanded gas jet flows ejected from a supersonic nozzle into submerged space are presented. The system of similarity parameters for such class of jets is stated; simple relations of gas density and dynamic pressure determination in jet flow field are obtained. The methodology of reproduction with  $\text{CO}_2$  jets in model experiments of rocket thruster's jet flow parameters is given. This methodology implies identity of typical angles of jet divergence in real and model conditions and conversion of model experiment results to conditions of real jet flow.

**Введение**

Опубликованные к настоящему времени монографии [1-3] и обзоры [4,5], а также труды отечественных конференций и международных симпозиумов по динамике разреженных газов дают достаточно полное представление о явлениях и процессах, сопровождающих истечение газа в пространство с малым абсолютным давлением, в пределе – в пустоту.

При свободном расширении газа в покоящуюся среду с малым противодействием заданное состояние газа, температуры  $T_0$  и давления торможения  $p_0$ , геометрии сопла (диаметров критического  $d_*$  и выходного  $d_a$  сечений сопла, полуугла раскрытия  $\beta_a$ , либо профиля его сверхзвуковой части), а также условий в окружающем пространстве – рода газа, его температуры  $T_\infty$  и давления  $p_\infty$  полностью определяет как поле газодинамических параметров в струе, так и набор и характер протекания физических процессов на всех этапах формирования структуры течения.

Интерес к исследованию сверхзвуковых струйных течений малой плотности возник в послевоенные годы под влиянием интересов авиационной и ракетно-космической техники, а с середины 60-х годов прошлого столетия в динамике разреженных газов радикально расширились глубокие физические исследования и их приложения к различным новейшим технологиям. Сюда можно отнести изучение релаксационных процессов и их роли в формировании градиентных течений в соплах и струях, процессов разделения газов и изотопов, нерав-

новесных химических и плазмохимических реакций, неравновесного излучения, первичных актов конденсации, образования и испарения кластеров, аэрозолей, получение ультрадисперсных порошков и композитов, пленок, функциональных покрытий и т.д.

Детальный анализ этих исследований выходит за рамки данной работы. Основная цель – рассмотрение существующих и развитие новых подходов к моделированию струй двигателей управления и ориентации космических аппаратов (КА). Струи этих двигателей оказывают силовое, тепловое и физико-химическое воздействие на элементы КА. В данной работе, являющейся продолжением [6], представлены:

1. Основные положения теории подобия струй, истекающих в затопленное пространство с большой степенью нерасчетности, сформулированные с использованием понятия о характерном угле расширения струи ( $\theta_+$ ) и параметра  $N/\bar{F}$ , где:  $N = P_0/P_\infty$  - степень полного расширения струи по давлению ( $P_0$  - давление в камере сгорания,  $P_\infty$  - внешнее давление),  $\bar{F}$  - степень расширения сопла по площади. Показано, что для двух струй при равенстве значений пар параметров  $N/\bar{F}$  и  $\theta_+$  имеет место идентичность их геометрических параметров.

2. Методика пересчета результатов модельных экспериментов на натурные условия истечения струй, иллюстрированная сравнением результатов, которые получены при исследовании струй натуральных двигателей и их модельных сопел.

## 1 Подобие сильно недорасширенных струй. Струи идеального газа

**Структура поля течения струи.** Структура струи, истекающей из осесимметричного сверхзвукового сопла с недорасширением ( $P_\infty < P_a$ ), показана на рис. 1.

В отличие от струи, истекающей в вакуум, поле течения ограничено сжатым слоем, расположенным за висячим скачком уплотнения ( $S$ ), отделяющим перерасширенную часть струи от внешнего давления [7]. На границе струи ( $B$ ) давление газа равно внешнему давлению  $P_\infty$ .

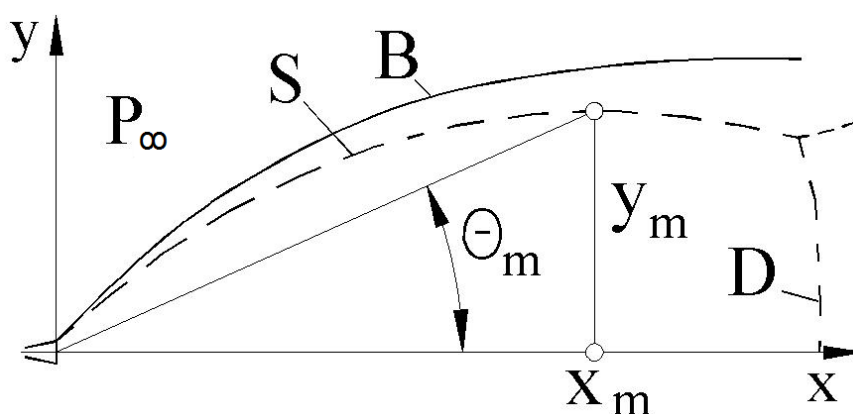


Рис. 1

нию  $P_\infty$ . В области, ограниченной скачком  $S$  и диском Маха ( $D$ ), распределения газодинамических параметров струи соответствуют условиям истечения в вакуум.

В рамках модели идеального газа подобие струй, истекающих из осесимметричных сопел в затопленное пространство, определяется равенством чисел Маха на срезе сопла  $M_a$ , отношений удельных теплоемкостей  $\gamma$ , углов раствора сопла  $\beta_a$  и отношений давлений газа на срезе сопла к давлению в окружающем пространстве (степень нерасчетности истечения)  $n = P_a/P_\infty$ . В этом случае безразмерные переменные  $\bar{V} = V/V_a$ ,  $\bar{P} = P/P_a$ ,  $\bar{\rho} = \rho/\rho_a$  будут одинаковыми в сходственных сечениях полей течения струй. Это определение является постулатом для моделирования в стендовых условиях натурального процесса истечения струй

двигателей КА. При этом в модельных условиях необходимо воспроизводить значения всех четырех параметров, иначе могут иметь место значительные различия в распределениях модельного и натурального полей течения струй. Поскольку для сильно недорасширенных струй ( $n \gg 1$ ) изменение угла раствора сопла  $\beta_a$  в диапазоне 0-15° относительно слабо влияет на форму струи и распределение параметров в поле течения, практически речь идет в основном о моделировании по  $M_a$ ,  $\gamma$  и  $n$ .

Если с воспроизведением в модельных экспериментах натуральных значений параметров  $M_a$  и  $n$ , как правило, нет особых проблем, то воспроизведение натурального состава струи и, соответственно, величины  $\gamma$  практически нереализуемо. К чему приводит невыполнение условия  $\gamma_{мод} = \gamma_{нат}$  иллюстрирует рис. 2, на котором в качестве примера приведены результаты расчета по распределению давления и положению границы струи в одном из поперечных сечений для двух значений  $\gamma = 1,2$  (характерная величина для продуктов сгорания) и  $\gamma = 1,4$  (воздух) и одинаковых значений чисел  $M_a = 3,0$ ,  $n = 400$ ,  $\beta_a = 10^0$ . Различия очевидны.

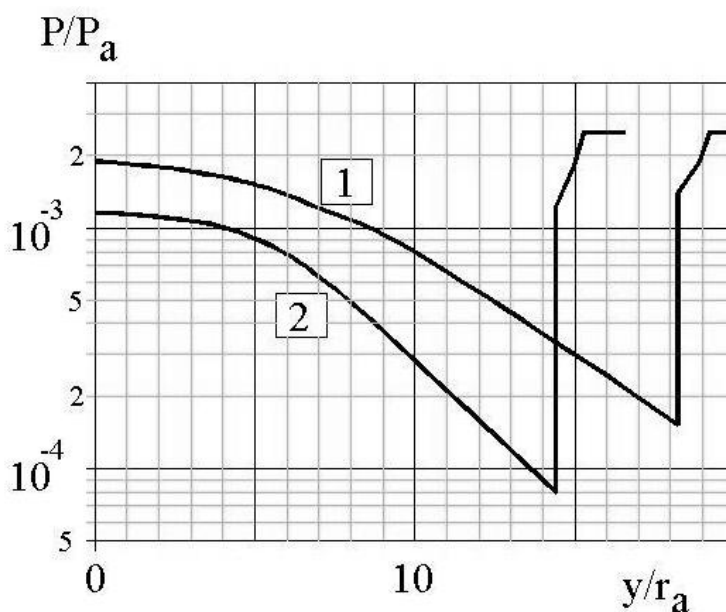


Рис. 2. Результаты расчетов:  $M_a=3$ ,  $n=400$ ,  $\bar{X} = 19$ ,  
1 -  $\gamma=1.2$ , 2 -  $\gamma=1.4$

В этой ситуации целесообразно перейти к интегральным характеристикам сильно недорасширенных струй и, соответственно, к интегральным параметрам моделирования.

Вопросам подобия струй идеального газа из сверхзвуковых сопел с недорасширением посвящены работы [8-10]. В работе [8] показано, что продольный и поперечный размеры струи  $R_1, R_2$  выражаются через  $M_a$ ,  $\gamma$ ,  $n$  и относительный импульс газа на срезе сопла  $\bar{J}_a$ :

$$R_1 = (1 + \gamma \cdot M_a^2)^{0.5} n^{0.5} \approx \gamma^{0.5} \cdot M_a n^{0.5}, \quad R_2 = R_1 \cdot (1 - \bar{J}_a)^{0.5} \quad (1)$$

В этих координатах полученные расчетом положения границ струй и их висячих скачков с приемлемой точностью описываются едиными кривыми. Соответствующие данные из работы [8] воспроизведены в оригинальном виде на рис.3. Диапазоны изменения режимных параметров приведены в табл. 1.

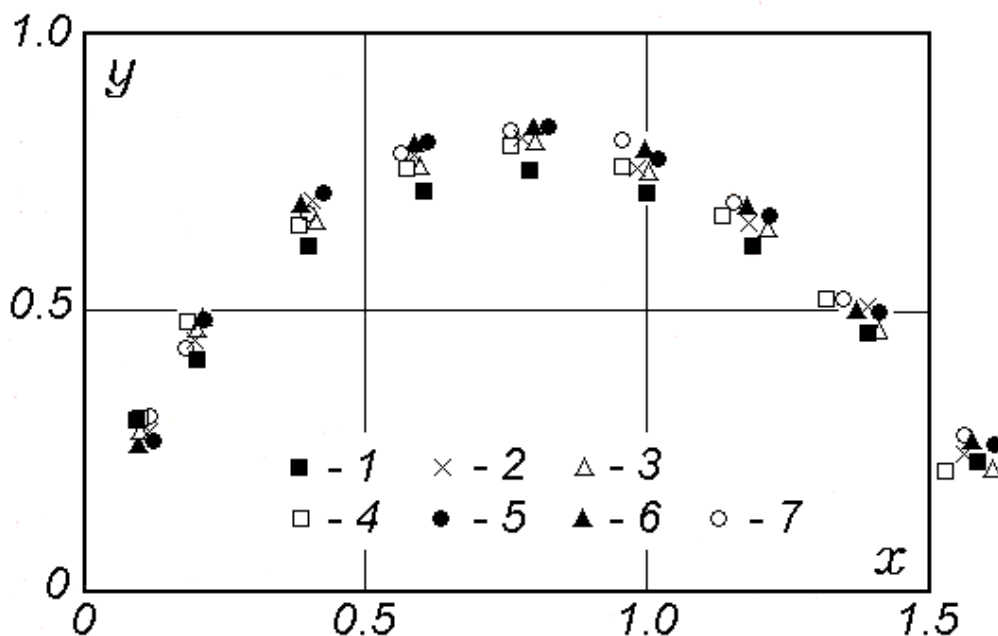


Рис. 3. Положение фронта скачка S, результаты [8]:  $x \equiv x/R_1$ ,  $y \equiv y/R_2$ .

Таблица 1

Значения режимных параметров на рис. 3

№	1	2	3	4	5	6	7
$M_a$	4	4	4	3	5	4	4
$\gamma$	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.3	1.5
$n$	$10^2$	$10^4$	$10^6$	$10^7$	$10^4$	$10^4$	$10^4$

Для общего случая  $n \gg 1$  в [8] величина отношения характерных размеров определена, как “характерный угол поворота потока”  $\theta \sim R_2 / R_1 = (1 - \bar{J}_a)$ .

По представленным в [8] результатам можно заметить, что для случая с  $n = 10^2$  (режим №1, табл. 1) положение границы и фронта всякого скачка отличается от обобщающих кривых в сторону меньших значений координат  $y = y/R_2$ .

В работе [10] получен уточненный вид выражений для  $R_1$ , совпадающий при  $M_a^2 \gg 1$  с формулой (1), и для  $R_2$ , однако в последнем случае (в выражении для  $R_2$ ) явный вид параметра  $\bar{J}_a$  потерял смысл. И также, как в [8], в работе [10] наблюдается тенденция к “выпадению” из обобщающих кривых результатов расчетов, полученных при малых значениях нерасчетности истечения ( $n = 10 - 50$ ).

В рамках данной работы рассматриваются вопросы о более углубленном, чем в [8,10], анализе проблемы моделирования геометрии и параметров поля течения данного класса струй в следующей постановке:

- имеем параметры струи натурального двигателя при истечении в затопленное пространство;

- необходимо определить параметры модельной струи и условия истечения по нерасчетности истечения, при которых реализуется воспроизведение геометрии поля течения и подобие в распределении основных параметров течения газа.

Следует отметить, что результаты [8-10] не позволяют ответить на все поставленные вопросы данной задачи. Из результатов [8] однозначно следует, что в модельных экспериментах необходимо воспроизвести натурное значение относительного импульса газа на срезе сопла  $\bar{J}_a$  или согласно нашей концепции [6], значение характерного угла расширения струи  $\theta_+$ .

В то же время вопрос о выборе степени нерасчетности истечения для воспроизведения натурной геометрии струи (в реальном масштабе и при варьировании значений степени нерасчетности) в указанных публикациях не обсуждается. В данной работе этому вопросу уделено большое внимание, как в расчетном, так и в экспериментальном плане.

Проведен анализ рассматриваемой задачи с привлечением параметров подобия струй, истекающих в вакуум, сформулированных в [6]. С использованием данных [11] проведена серия расчетов полей течения недорасширенных струй идеального газа в более широких, чем в [8,10] диапазонах изменения параметров  $M_a$ ,  $\gamma$ ,  $n$ , а также проведена серия экспериментов в установках ВС-3 и ВИКИНГ ИТ СО РАН.

Было показано, что для сильно недорасширенных струй ( $n \gg 1$ ) угловое положение висячего скачка уплотнения в сечении его максимального диаметра (рис. 1) определяется величиной характерного угла расширения струи:

$$\theta_m = \theta_+, \quad (2)$$

а относительная продольная координата этого сечения:

$$\bar{X}_m^2 \cong 2.4 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \frac{N}{F}, \quad (3)$$

$$\text{где} \quad C_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{(\gamma+1)}{2 \cdot (\gamma-1)}}, \quad C_2 = \frac{\gamma}{(\gamma-1)^{0.5}}, \quad N = \frac{P_0}{P_\infty} \quad (4)$$

Здесь:  $C_1$ ,  $C_2$  – множители, зависящие от значения отношения удельных теплоемкостей  $\gamma$ ,  $P_0$  – давление торможения. Для представляющего практический интерес диапазона  $\gamma=1.15-1.67$  произведение множителей  $C_1 \cdot C_2$  меняет свое значение от 0.62 до 0.41. Среднее значение  $C_1 \cdot C_2=0.49$ , соответствует  $\gamma=1.3$

При получении (3) в отличие от аналогичных процедур, выполненных в [8,10], в интегральном уравнении сохранения импульса струи на границах внутренней области течения использовались зависимости изменения плотности газа (13) и расхода (14) из [6].

Из (3) с учетом (2) получены следующие приближенные формулы, определяющие для сильно недорасширенных струй ( $n \gg 1$ ) максимальный поперечный размер висячего скачка уплотнения  $\bar{Y}_m = Y_m / r_a$  и соответствующую координату его положения  $\bar{X}_m = X_m / r_a$ :

$$\bar{Y}_m \approx 1.1 \cdot \left( \frac{N}{F} \right)^{0.5} \cdot \text{tg} \theta_+, \quad \bar{X}_m \approx 1.1 \cdot \left( \frac{N}{F} \right)^{0.5}. \quad (5)$$

Таким образом, при постановке и проведении экспериментов по моделированию струй двигателей КА необходимо воспроизводить натурные значения параметров  $\theta_+$  и  $N/\bar{F}$ . Подтверждением сказанному является рис. 4, на котором представлены результаты расчета геометрии недорасширенной струи (положение бокового скачка) для натуральных и модельных условий при общепринятом и развитом в данной работе подходе. Можно видеть, что условная натурная струя двигателя КА с параметрами  $M_a=3.0$ ,  $\gamma=1.2$ ,  $n=400$  согласно развитой концепции вполне удовлетворительно моделируется струей воздуха ( $\gamma=1.4$ ) с параметрами  $M_a=2.0$ ,

$n=700$ , в то время как обычный подход демонстрирует весьма сильное отличие от натуральных условий.

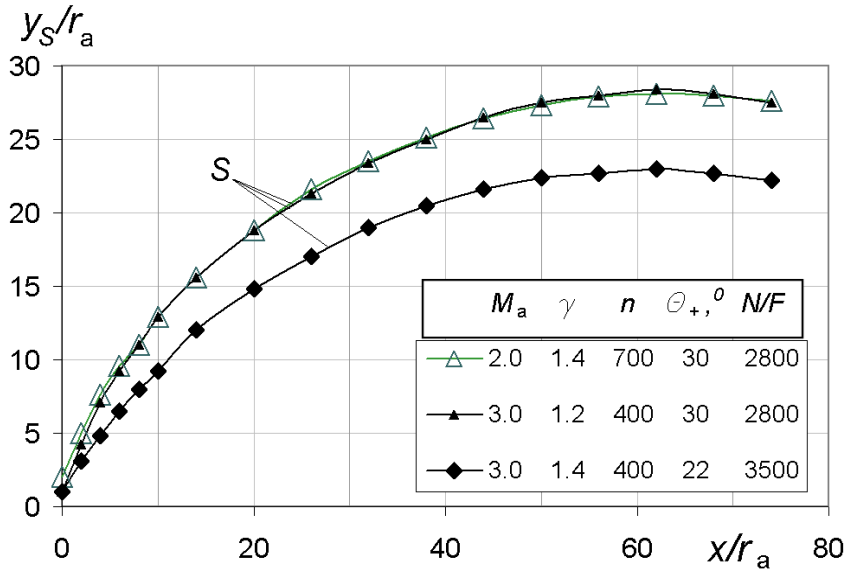


Рис. 4

По результатам расчетов полей течения струй положение фронта висячего скачка в безразмерных полярных координатах  $\bar{\theta}_s = \theta_s / \theta_+$  и  $r_s / r_m$  аппроксимируется зависимостью инвариантной по значениям  $M_a$  и  $\gamma$ :

$$r_s / r_m \approx 0.25 \cdot (3 - \bar{\theta}_s)^2. \tag{6}$$

Угол наклона висячего скачка уплотнения к оси струи  $\varphi$  определяется зависимостью:

$$\varphi / \theta_+ \approx 1.5 \cdot (\bar{\theta}_s - 1). \tag{7}$$

Проведено сравнение формул (5) с зависимостями, полученными другими авторами. Вторая формула в (5) на вид отличается от выражения для определения  $\bar{X}_m$ , полученного в [8]:

$$\bar{X}_m = 0.9 \cdot (1 + \gamma \cdot M_a^2)^{0.5} \cdot n^{0.5}. \tag{8}$$

Однако, если в (5) сделать замену  $N = n / \pi_a(M_a, \gamma)$ , где  $\pi_a(M_a, \gamma) = P_a / P_0$  получится, что сравнивать между собой нужно значения комплексов  $0.9 \cdot (1 + \gamma \cdot M_a^2)^{0.5}$  и  $1.1 \cdot (\pi_a \cdot \bar{F})^{-0.5}$ . Сравнение расчетных величин выделенных комплексов показало, что формулы (5) и (8) определяют практически одинаковые значения размера  $\bar{X}_m$ . Отличие в формулах (1) и (5), определяющих поперечный масштаб струи ( $\bar{Y}_m$ ), выражается в отсутствии в первой из них множителя  $1 / J_a^{-0.5}$ , что справедливо для гиперзвукового приближения ( $M_a^2 \gg 1$ ).

**Влияние степени нерасчетности на геометрию струй идеального газа.** Принятая для анализа модель распределения параметров газа в поле течения свободной струи применима при  $\bar{r} = r / r_a \geq 10$ , как следствие того, что вблизи сопла течение газа отличается от модели источника, расположенного в центре сопла. Это отличие ощущается в распределении плотности газа до величин  $\bar{r} \sim 40$ . Поэтому в этих границах можно говорить только о точности приближения реального течения к модели точечного источника, а не о нем, как таковом.

Кроме этого следует иметь в виду, что на самом деле экстраполяция лучей линий тока газа, из дальнего поля течения струи в окрестность сопла определяет положение источника не в центре среза сопла, а на оси струи при некотором удалении  $\Delta x \leq 4r_a$ , которое зависит от величины  $\gamma$ , при этом наблюдается обратная зависимость – чем больше величина  $\gamma$  тем меньше  $\Delta x$ . Отмеченные особенности модели относятся к ее недостаткам и выражаются в  $\sim 30\%$  погрешности аппроксимации формулой (3) в [6] расчетных значений плотности газа.

По указанным выше причинам следует ожидать, что автомодельность по степени нерасчетности формы и границ будет нарушаться в струях, имеющих размер  $\bar{X}_m < 40$  (или, как следствие из (3), при  $N/\bar{F} < 1600$ ). На самом деле изменение равенства (2) в сторону уменьшения  $\theta_m$  становится заметным при значениях  $N/\bar{F} < 10^4$ .

На рис. 5 приведены расчетные данные, характеризующие положение висячего скачка уплотнения в обобщенных координатах (5) в сильно недорасширенных струях ( $N/\bar{F} \geq 10^5$ ). Здесь видно, что с погрешностью  $\sim 5\%$  эти данные можно описать единой зависимостью. Положение границ струй на этом рисунке показано осредненной функцией «В».

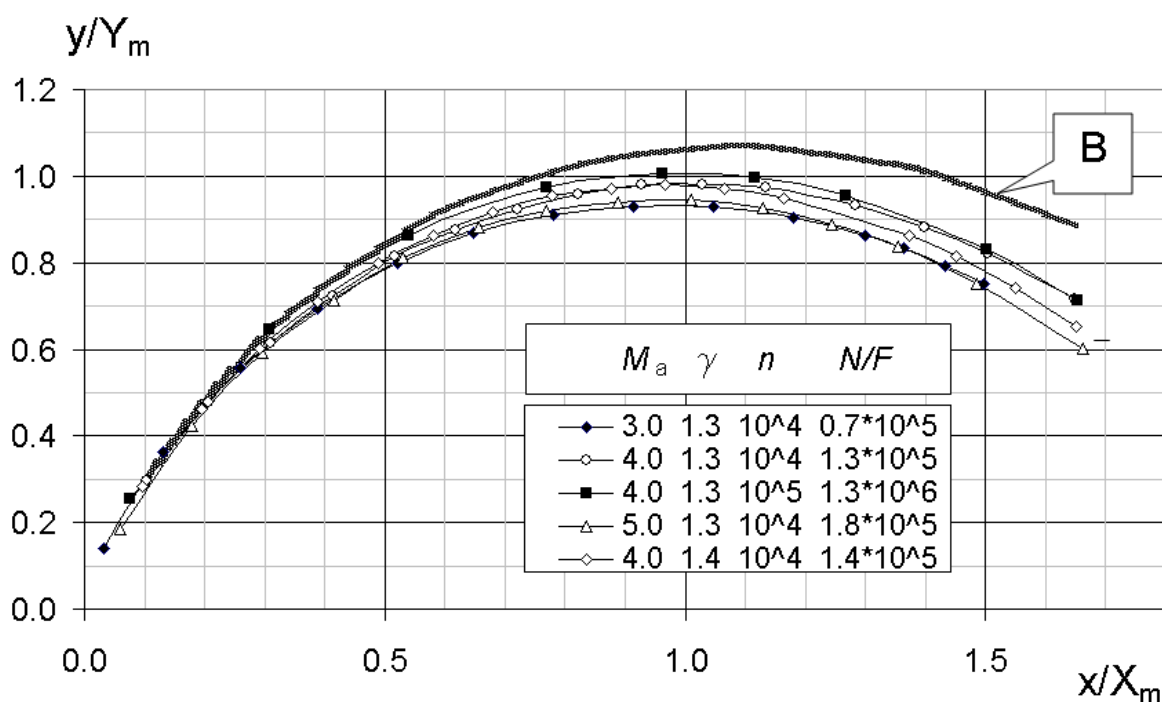


Рис. 5

На рис. 6 приведены результаты серии расчетов положения скачка  $S$ , в которых варьировались величины  $n$  в диапазоне от  $10$  до  $10^6$  ( $N/\bar{F} = 1.26 \cdot 10^2 \div 1.26 \cdot 10^7$ ).

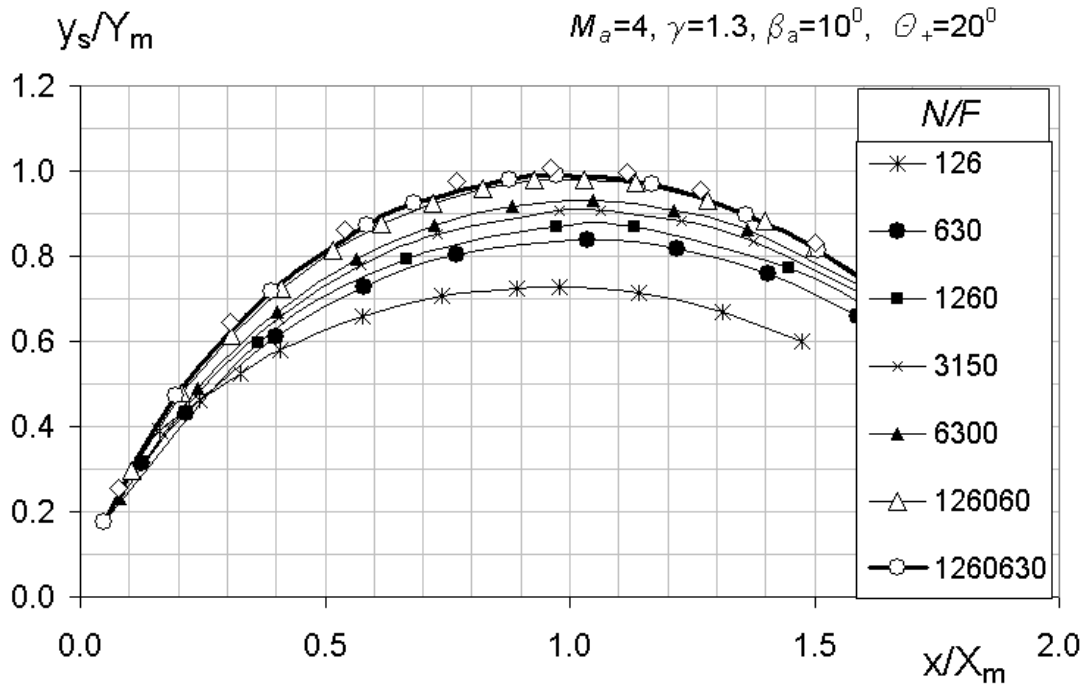


Рис. 6

Здесь явно прослеживается монотонность уменьшения поперечного размера скачка уплотнения, о котором было отмечено, как «выпадение», при анализе результатов работ [8,10]. Такое же изменение характерно для геометрии внешней границы струи.

При равенстве параметров  $N/\bar{F}$  и  $\theta_+(\bar{J}_a)$  имеет место идентичность геометрических параметров струй. Примеры такого воспроизведения геометрии струй с использованием сопел с отличающимися параметрами истечения, но с выполнением условий  $\bar{J}_a=const, N/\bar{F}=const$ , приведены рис. 7 и 8.

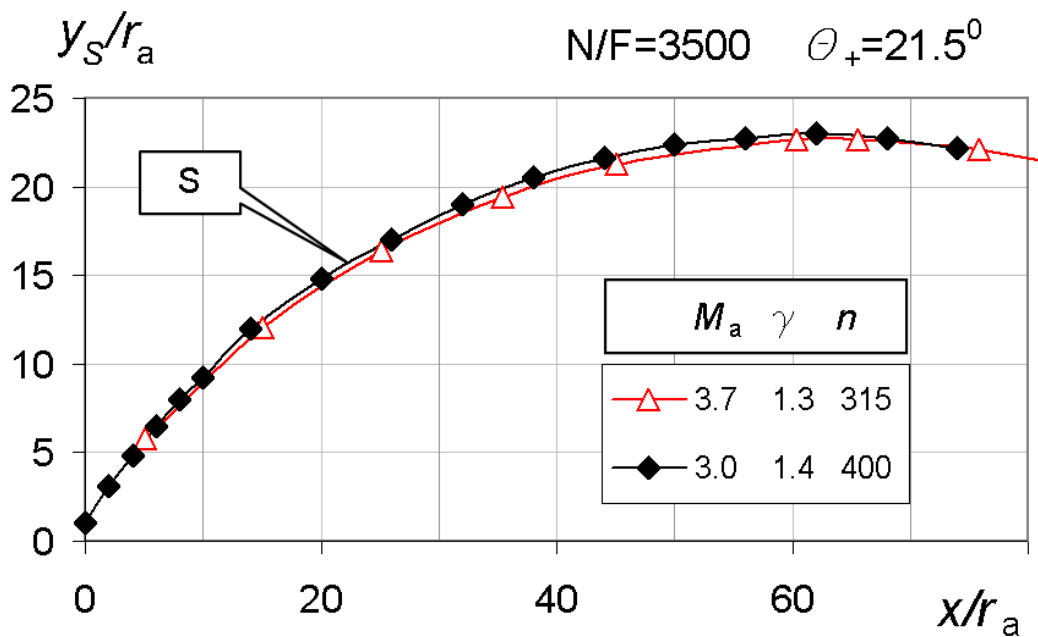


Рис. 7



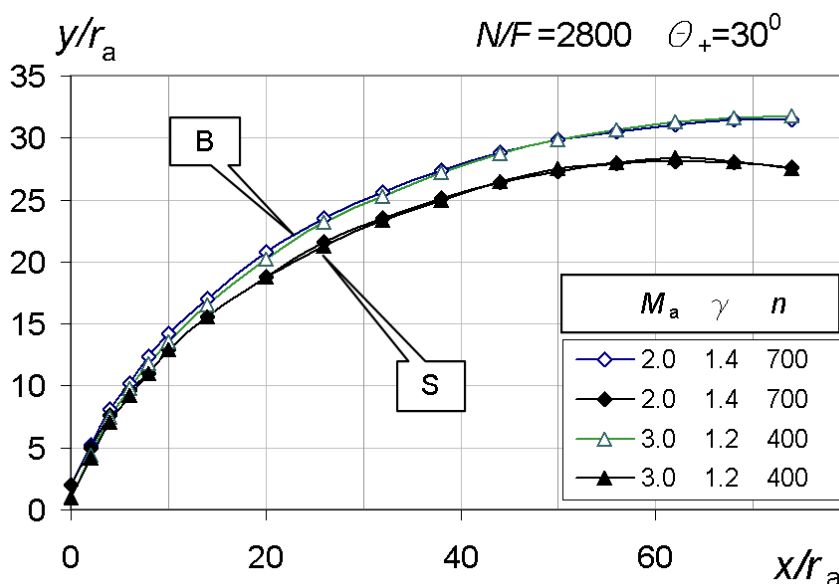


Рис. 8

Приведенные на указанных рисунках результаты иллюстрируют возможности и простоту предлагаемого метода.

По результатам проведенного анализа сделаны следующие выводы:

1. При больших значениях степени нерасчетности истечения  $n > 10^4$  ( $N/\bar{F} > \sim 10^5$ ) геометрические параметры струй с различными значениями  $\bar{J}_a$  идентичны в координатах, определяемых формулами (5).

2. Идентичность геометрических параметров струй при меньших степенях нерасчетности истечения достигается при одновременном выполнении условий  $\theta_+(\bar{J}_a) = const$ ,  $N/\bar{F} = const$ . В этом случае имеет место тождественность геометрии струй в физических координатах  $\bar{x} = x/r_a$  и  $\bar{y} = y/r_a$ .

## 2 Результаты экспериментальных исследований

Проведенный выше анализ струйного истечения газа в затопленное пространство, а также данные [6], позволили сформулировать новый, более точный подход к моделированию струй двигателей КА в вакуумных камерах. Для подтверждения достоверности и эффективности этого подхода в дополнение к [6] были проведены экспериментальные исследования по распределению давлений и геометрии недорасширенных струй.

**Распределение давлений.** Эксперименты проведены в установках ВС-3 и ВИКИНГ Института теплофизики СО РАН. Это была вторая серия исследований по программе, описанной ранее в [6]. Эта серия исследований была ориентирована на диагностику струй Ar и CO<sub>2</sub>, истекающих из звуковых и сверхзвуковых конических сопел с  $d_* = 0.5$  мм с отличающимися значениями геометрического параметра  $\bar{F} = 1, 4$  и 16, но имеющих близкие величины характерных углов  $\theta_+ \sim 30^\circ$ . Выполнение последнего требования осуществлялось подбором параметров газа в форкамере  $P_0$  и  $T_0$  по результатам исследований, описанных в [6].

Величины фоновых давлений в барокамере  $P_\infty$  выбирались с учетом давлений  $P_0$  и значений параметра  $\bar{F}$  таким образом, чтобы в экспериментах с разными соплами были реализованы одинаковые значения комплекса  $N/\bar{F}$ , режимы экспериментов приведены в табл.2.

Таблица 2

№ эксп.	Газ	$\bar{F}$	$P_0 \cdot 10^{-5}$ Па	$T_0$ , К	$P_\infty$ , Па	$N$	$N/\bar{F}$
1	Ar	1	8	700	122	6560	6560
2	Ar	1	8	700	30.6	26140	26140
4	CO <sub>2</sub>	1	16	600	61.1	26180	26180
6	CO <sub>2</sub>	4	16	600	245	6530	1633
7	CO <sub>2</sub>	4	4	450	61.1	6547	1637
8	CO <sub>2</sub>	4	16	600	61.1	26186	6547
9	CO <sub>2</sub>	4	4	450	15.3	26143	6536
10	CO <sub>2</sub>	4	16	600	15.3	104575	26144
12	CO <sub>2</sub>	16	16	300	245	6531	408
13	CO <sub>2</sub>	16	16	300	61.1	26186	1637
14	CO <sub>2</sub>	16	16	300	15.3	104575	6536

Для режимов, указанных в табл. 2, были проведены измерения профилей полного давления вдоль оси струи и в поперечных сечениях.

Для примера на рис. 9 приведено поперечное распределение полного давления в относительных величинах для одного из режимов истечения. В полученных поперечных профилях  $P'_0(\bar{y})$  положение максимума в периферийной части струи  $y_s$  было идентифицировано, как координата средней части области смешения, заключенной между висячим скачком ( $S$ ) и границей струи ( $B$ ) на рис. 1. Далее по тексту с некоторой погрешностью координата  $y_s$  будет отнесена к положению фронта скачка.

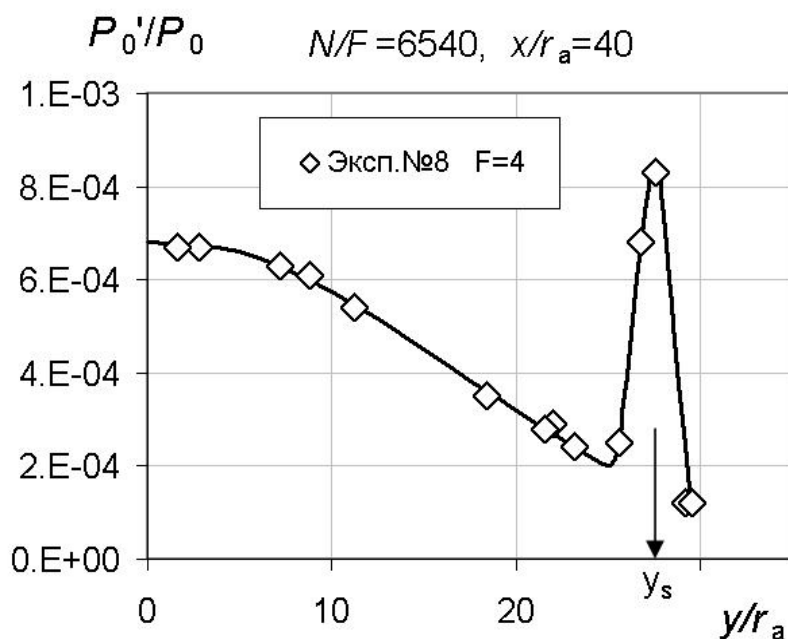


Рис. 9

**Геометрические параметры недорасширенных струй.** На рис. 10 приведены результаты обобщения данных по величинам  $y_s$ , полученных в экспериментах со звуковыми соплами ( $\bar{F} = 1$ ), в координатах, вид которых определен формулами (5).

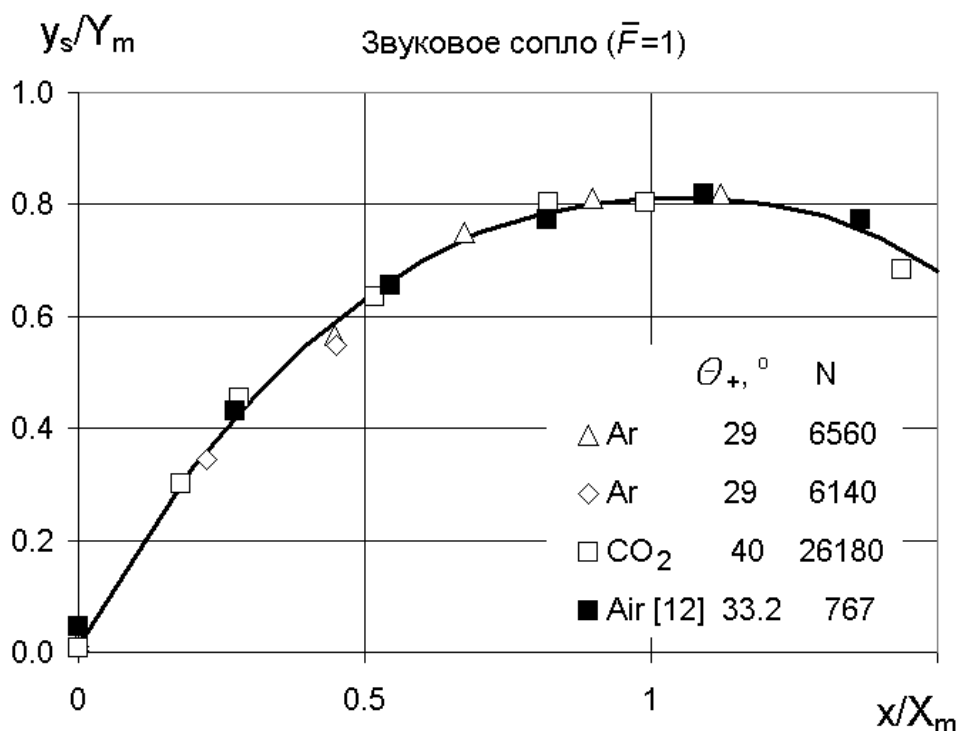


Рис. 10

Отметим, что в этой серии экспериментов значения характерных углов расширения струй отличались друг от друга. На этом же рисунке приведены данные, полученные по фотографии поля течения звуковой струи воздуха ( $\theta_+ = 33^\circ$ ), приведенной в работе [12]. Видно, что эти результаты можно описать единой функцией (сплошная линия).

Аналогичные данные, полученные в наших экспериментах со сверхзвуковыми соплами, приведены на рис. 11. Эти результаты так же хорошо, как и результаты, полученные в экспериментах со звуковыми соплами, аппроксимируются единой зависимостью, т.е. при изменении значений параметра  $N/\bar{F} = 4 \cdot 10^2 \div 2.6 \cdot 10^4$ , не наблюдается явного расслоения функций в зависимости от значения параметра  $N/\bar{F}$ , отмеченное для струй идеального газа по результатам расчетов (см. рис. 6). На рис. 11 результаты экспериментов табл. 2 дополнены данными, полученными в исследованиях струй с соплом  $\bar{F} = 10.2$ , которое использовалось при моделировании условий стендовых испытаний натурального двигателя.

На рис. 11 также приведена зависимость, полученная для звуковых струй (см. рис. 10), и воспроизведена расчетная зависимость для струй идеального газа ( $N/\bar{F} > 10^4$ , см. рис. 6). Отметим, что эти три зависимости отличаются друг от друга и в большей степени различие сказывается на поперечных размерах струй.

Различие в поперечных размерах модельных струй за звуковыми соплами и результатов расчетов для струй идеального газа составляет 25%.

Результаты, полученные в экспериментах со сверхзвуковыми соплами, лежат еще ниже, чем данные для струй за звуковыми соплами. Различие между ними по поперечным размерам составляет ~20%.

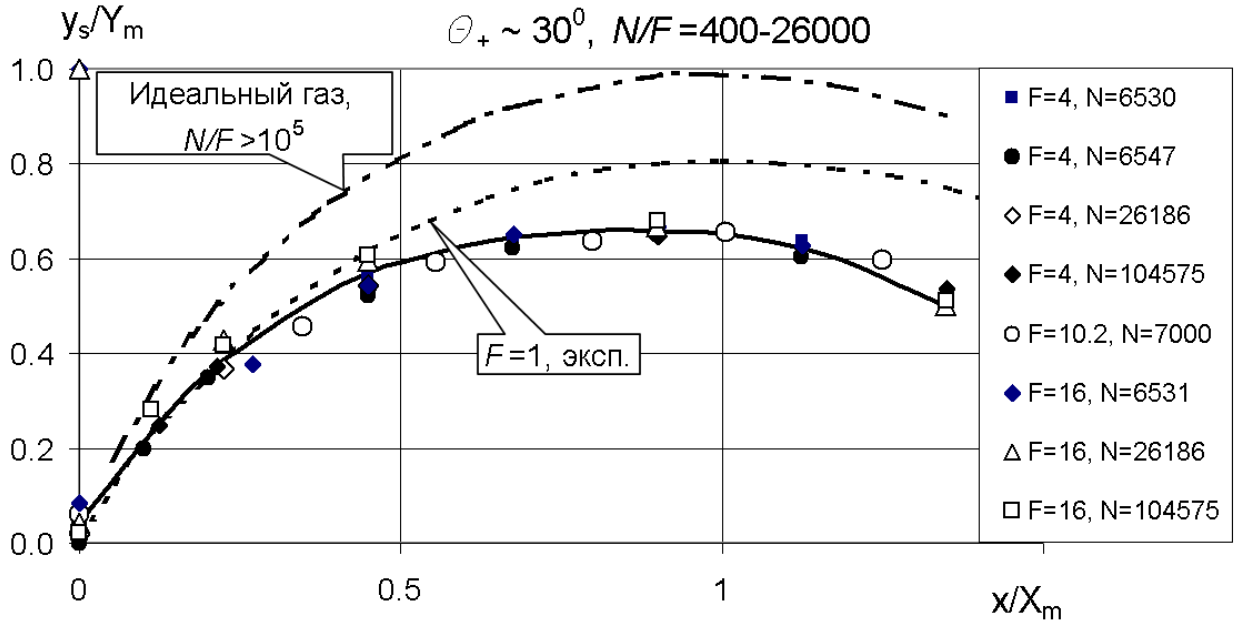


Рис. 11

Выявленные отличия размеров звуковых и сверхзвуковых недорасширенных струй отражают влияние вязких эффектов, которые проявляются в пограничном слое на стенке сверхзвукового сопла и минимальны для звукового.

Важным результатом проведенных экспериментов со сверхзвуковыми соплами является то, что физические размеры струй (в единицах  $r_a$ ) при равных значениях параметров  $N/\bar{F}$  и  $\theta_+$  совпали друг с другом (рис.12).

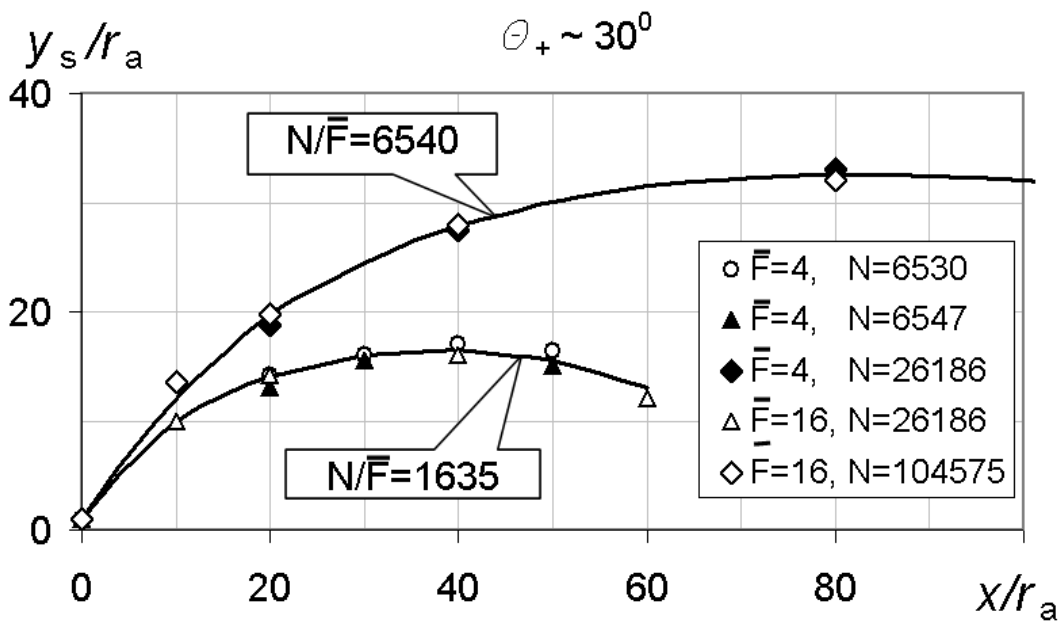


Рис. 12

**Динамическое давление в слое смешения.** Результаты измерений максимальных величин давления газа в слое смешения за фронтом всяческого скачка уплотнения  $P_0^I(\bar{y}_s)/P_0$  в поперечных сечениях струй приведены на рис. 13.

Полученные данные группируются по величинам полных перепадов давления  $N = P_0 / P_\infty$ . Эти же результаты показывают величину погрешности измерений величин, обусловленную градиентом параметров в зоне скачка уплотнения и относительно большим диаметром трубки Пито [6].

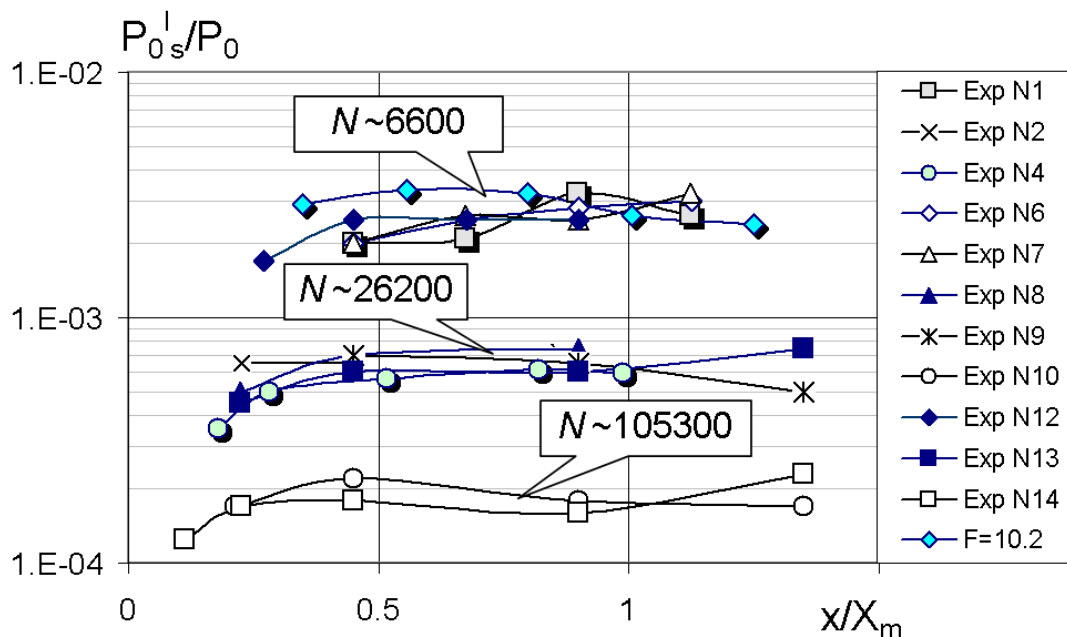


Рис. 13

Характерно, что максимальные разбросы данных наблюдаются в экспериментах с меньшими величинами  $N$ , в которых реализуются меньшие размеры зон смешения. По той же причине растет погрешность по мере уменьшения координаты  $x$ , здесь также сказывается увеличение угла вектора скорости потока по отношению к оси измерительной трубки.

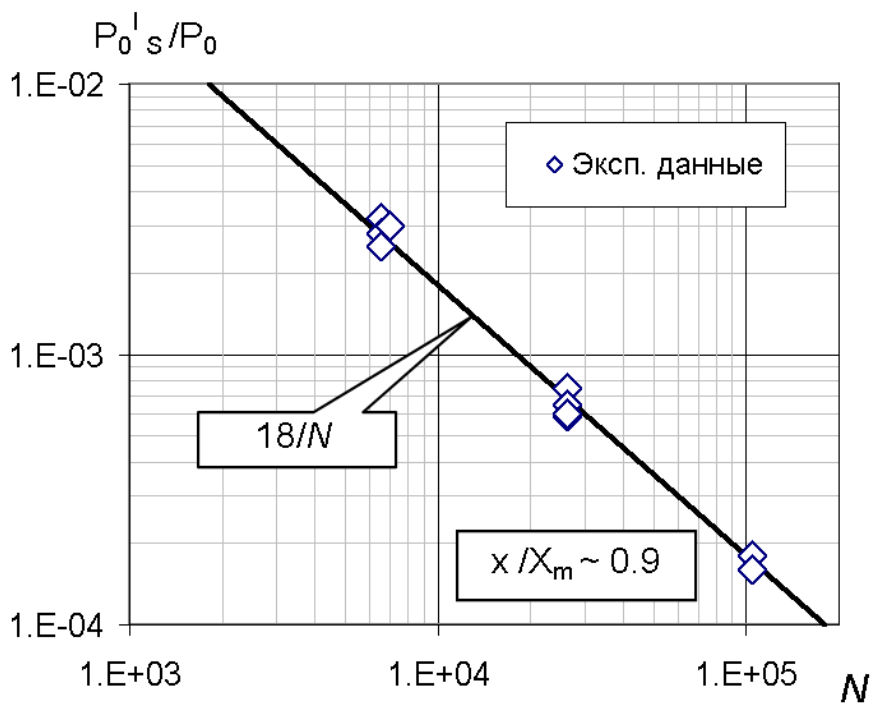


Рис. 14

Отмеченные выше факторы меньше всего сказались на результатах измерений в сечениях соответствующих максимальным поперечным размерам струи  $x/X_m \approx 1.0$ . Эти результаты приведены на рис. 14 в зависимости от значений полных перепадов давлений  $N$ . Здесь видно, что  $P_0^I(\bar{y}_s)/P_0 \sim N^{-1}$  или  $P_0^I(\bar{y}_s) \sim P_\infty$ .

В проведенных экспериментах значения комплекса  $R_L = Re_* / N^{0.5}$  [13] соответствовали ламинарному режиму течения в слое смешения у границы струи и менялись в диапазоне  $R_L=100-800$ .

### 3 Моделирование силового воздействия струй двигателей космических аппаратов

При разработке КА возникают задачи не только экспериментального моделирования струй двигателей КА, но и взаимодействия этих струй с элементами внешней поверхности аппарата.

**Формулы пересчета результатов модельных экспериментов.** Рассмотрим задачу о струе, истекающей из сопла натурального двигателя с параметрами  $\bar{F}_{нат}, M_{a,нат}(\bar{F}_{нат}, \gamma_{нат})$ , воздействующей на поверхность, расположенную перпендикулярно линии тока газа на расстоянии  $\bar{r} = r/r_a \gg 1$ .

Примем, что распределение газодинамических параметров в поле течения струи определяется результатами расчета методом характеристик [14]. В модельных экспериментах используем струю доступного газа ( $N_2$  или  $CO_2$ ), истекающей из сопла с параметрами:  $\bar{F}_{мод}, M_{a,мод}(\bar{F}_{мод}, \gamma_{мод})$ .

В основу решения задачи заложен принцип сохранения в модельных условиях натурального закона относительного распределения плотности газа в поле течения струи, т.е. для любых двух геометрически подобных точек модельного и натурального пространств, свободных от взаимодействия струй, должно выполняться условие  $\rho_{мод} = Const \cdot \rho_{нат}$ . Это достигается путем воспроизведения в модельных условиях величины относительного импульса  $\bar{J}_a$  (или  $\theta_+ = idem$ ).

В этом случае из формулы, вид которой определяется по формулам (25) и (13) работы [6]

$$\bar{P}_0^I = \frac{P_0^I}{P_0} \approx \frac{0.42 \cdot C_2}{\bar{F} \cdot \bar{r} \cdot \theta_+^2} \exp(-0.5 \cdot \bar{\theta}^2), \quad C_2 = \frac{\gamma}{(\gamma-1)^{0.5}} \quad (8)$$

следует, что в сходственных точках пространства полей течений натурной и модельной струй соблюдается равенство

$$\bar{P}_{0,нат}^I = A_1 \cdot \bar{P}_{0,мод}^I, \quad (9)$$

$$A_1 = \frac{C_2(\gamma_{нат})}{C_2(\gamma_{мод})} \cdot \frac{\bar{F}_{мод}}{\bar{F}_{нат}}. \quad (10)$$

Другой вид выражения для коэффициента  $A_1$ , тождественного (10), получается рассмотрением полной системы уравнений, определяющих соотношение натуральных и модельных величин  $P_0^I$  в струях модельного и натурального пространств и соответствующих им импульсов газа в выходных сечениях сопел:

$$\frac{P_{0,нат}^I}{P_{0,мод}^I} = \overline{M}^2 \cdot \frac{J_{нат}}{J_{мод}} \quad (11)$$

Здесь:  $\overline{M} = r_{a,мод} / r_{a,нат}$  - масштаб модели,  $J$  – импульс газа на срезе сопла. В этом случае формула для коэффициента пересчета принимает вид:

$$A_1 = \overline{M}^2 \cdot \left( \frac{P_0}{J} \right)_{мод} / \left( \frac{P_0}{J} \right)_{нат} \quad (12)$$

Это выражение достаточно четко поясняет смысл коэффициента пересчета в уравнении (9) и является удобным для использования в практике в том случае, когда в качестве модельного используется газ с постоянными свойствами (по  $\gamma$ ). В этом случае величина  $J_{мод}$  определяется однозначно по расчетным параметрам газа на срезе сопла. В том случае, когда моделирование проводится с использованием газа, у которого ярко выражены неравновесные процессы в поле течения струи, и определение величины импульса  $J$  становится затруднительным, более удобным представляется использование выражения (10), учитывая ее слабую зависимость от  $\gamma$ .

**Верификация метода по результатам экспериментов с одиночными струями.**

Сравниваются результаты экспериментов (табл. 2), в которых для сверхзвуковых струй были реализованы режимы истечения с выполнением двух условий моделирования:  $\theta_+ = const.$  и  $N/\overline{F} = const.$  Условно принято, что эксперименты с соплами, имеющими  $\overline{F} = 4$ , относятся к “натурным”, а эксперименты с соплами  $\overline{F} = 16$  являются “модельными”. В этом случае результаты экспериментов можно сравнивать, если для “натурных” экспериментов принять значение коэффициента  $A_1=1$ , а полученные в “модельных” экспериментах данные умножить на значение  $A_1$ , определяемое по (10) и равное ~4.

Результаты сравнения “модельных” и “натурных” результатов приведены на рис. 15 и 16.

Видно, что “модельные” и “натурные” профили в пределах точности определения самих величин  $P_0^I$  совпадают друг с другом, в том числе и в слое смешения у границы струи

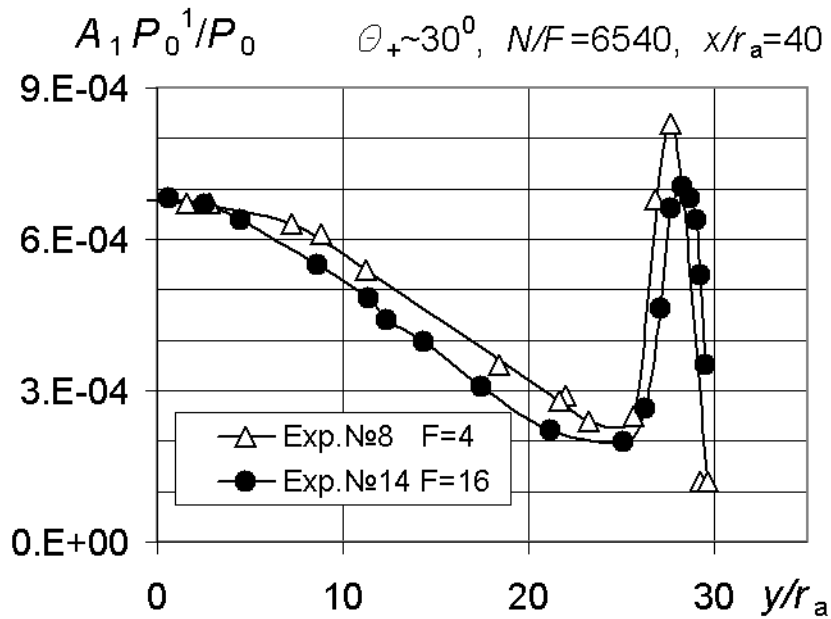


Рис. 15

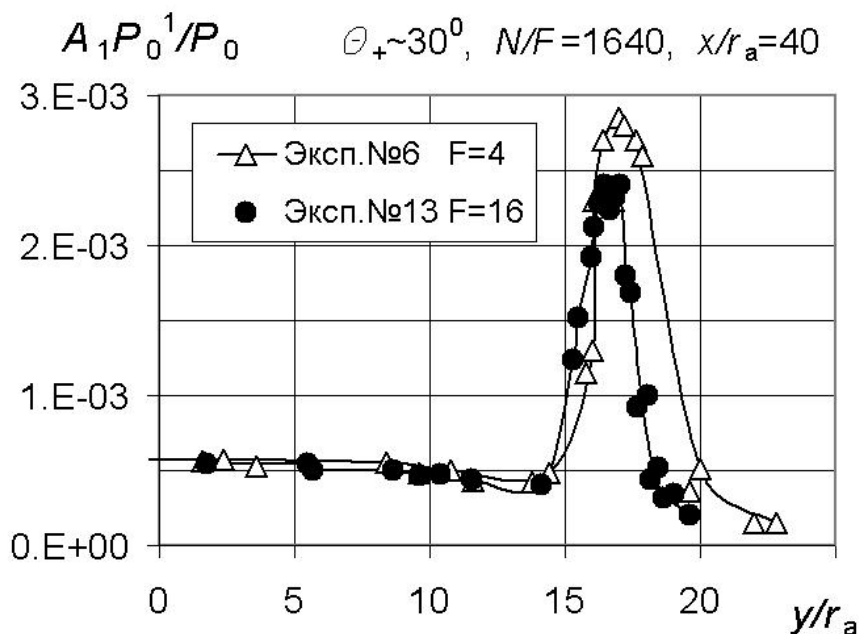


Рис. 16

Корректность предлагаемой методики моделирования силового воздействия натурной струи подтверждается результатами исследований Е.А. Лейтеса [15], а именно рассмотренным частным случаем использования воздуха для моделирования силового воздействия на пластину натурной струи, имеющей параметры  $M_{a-нат} = 3, \gamma_{нат} = 1.2, \bar{F}_{нат} = 6.8$ .

Выполнение условия  $\theta_{+mod} = \theta_{+нат}$  при  $\gamma_{mod} = 1.4$ , определяет число Маха модельного сопла  $M_{a-mod} = 1.65, \bar{F}_{mod} = 1.3$ .

Координата положения максимума давления на пластине, расположенной параллельно оси сопла на расстоянии  $h$ , определяется формулой  $x_m = 0.5 \cdot h \cdot [\bar{J} / (1 - \bar{J})]^{0.5}$  [15], т.е. в случае равенства  $\theta_{+mod} = \theta_{+нат}$  ( $\bar{J} = idem$ ) имеет место подобие в модельном и натурном распределениях давления по пластине.

Коэффициент пересчета  $A_1$  определяется по (10) и в данном случае,  $A_1 = 0.23$ .

С другой стороны, в соответствии с результатами [15] величина максимума давления определяется из выражения

$$\frac{P_m}{P_0} = \frac{P_a}{P_0} \cdot \frac{(1 + \gamma \cdot M_a^2) \cdot (1 - \bar{J})}{\bar{h}^2} \tag{13}$$

Использование этого выражения при  $\bar{h} = h/r_a = const$  дает значение коэффициента пересчета  $A_1 = (P_m/P_0)_{нат} / (P_m/P_0)_{mod} = 0.235$ . Т.е. и в этом случае имеет место хорошее согласование между аналитическим и экспериментальными значениями коэффициента пересчета, что указывает на достоверность предложенного метода моделирования и пересчета его результатов для рассматриваемого случая взаимодействия струи с поверхностью.

#### 4 Практическая реализация метода

В качестве примера рассмотрим результаты огневых испытаний натурального двигателя и соответствующих модельных экспериментов.

**Натурный двигатель.** Исследования с натурным двигателем проводились на специализированном вакуумном стенде (СВС), состоящем из газгольдера объемом  $\sim 10^4 \text{ м}^3$ , насос-



ной станции и рабочего участка в котором располагается стапель с двигателем и диагностическое оборудование (рис. 17).

При подготовке установки к пуску насосная станция создавала в газгольдере разрежение на уровне 40-50 мм рт. ст. Стапель выполнен в виде цилиндрической обечайки с внутренним диаметром  $\sim 3$  м и длиной  $\sim 4.5$  м. Внутри стапеля на торцевой крышке устанавливался испытываемый двигатель. В цилиндрической части стапеля размещались панель с образцами тепловой защиты и диагностическая рама.

Двигатель имеет общую камеру сгорания на два сопла, оси которых перпендикулярны ее оси и параллельны между собой.

Диаметр выходного сечения сопла равен  $\sim 200$  мм, отношение площадей выходного и критического сечений  $\bar{F} = (d_a/d_*)^2 = 10.6$ . Значение характерного угла расширения струи  $\theta_+$ , определенное по параметрам газа на срезе сопла, было равно  $\theta_+ = 30^\circ$ .

На панели и на раме размещались средства диагностики струи (образцы ТЗП, приемники полного давления, калориметры).

Для измерений давления использовались датчики типа ИКД-6-ТДа и МДД. Количество измеряемых параметров давления на раме составляло  $\sim 30$  единиц. Приемники давления устанавливались на горизонтальных планках и стойках рамы.

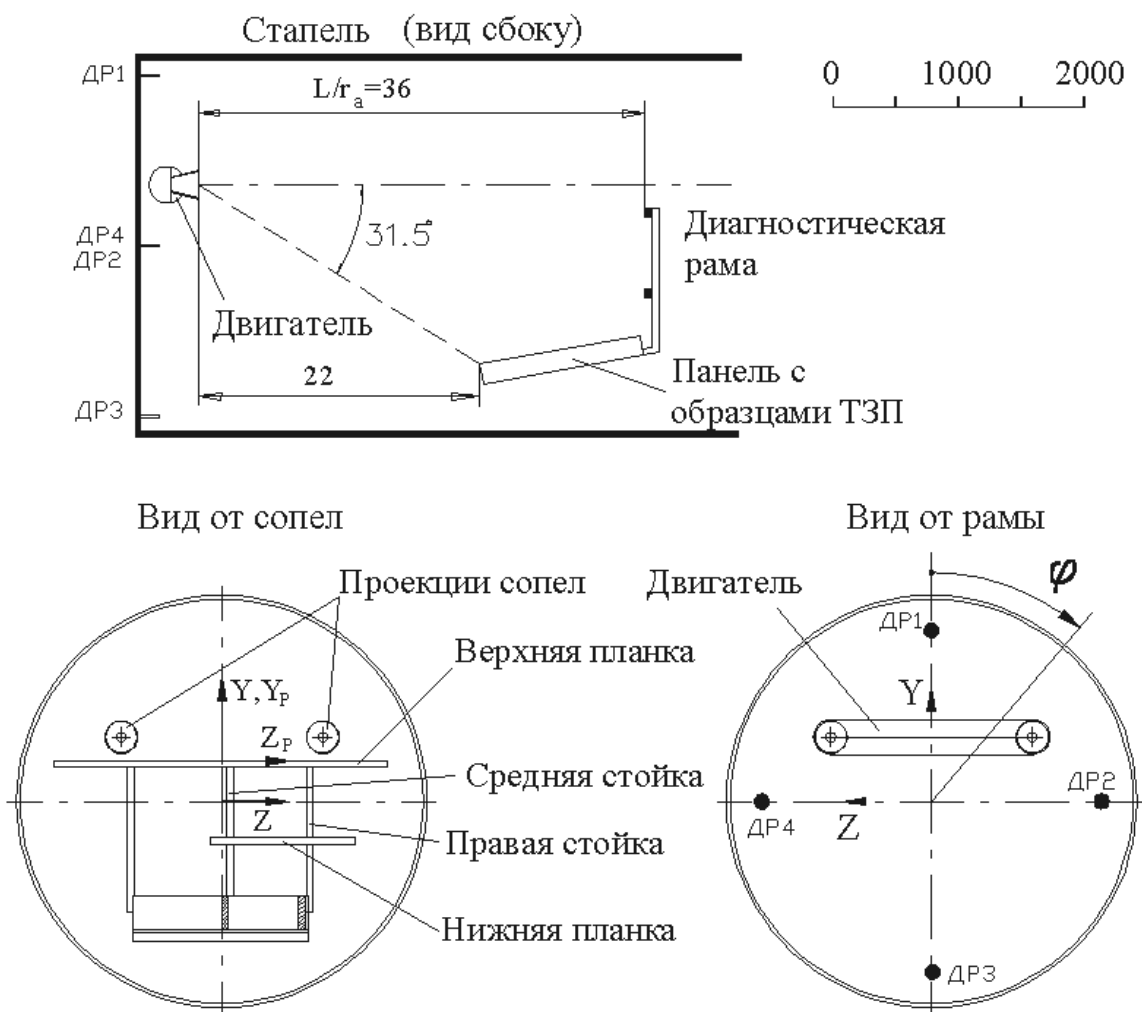


Рис. 17. Установка оборудования в стапеле

Фоновое давление в пространстве ступеля измерялось в 4-х точках (параметры ДР1-ДР4) на крышке ступеля через трубки длиной 200мм. Инерционность используемой системы "приемник давления – соединительная трубка - датчик давления" составляла  $\sim 0.06$  с.

Время работы двигателей составляло  $\sim 1$  с. Характерный профиль изменения давления в камере сгорания двигателей приведен на рис. рис. 18.

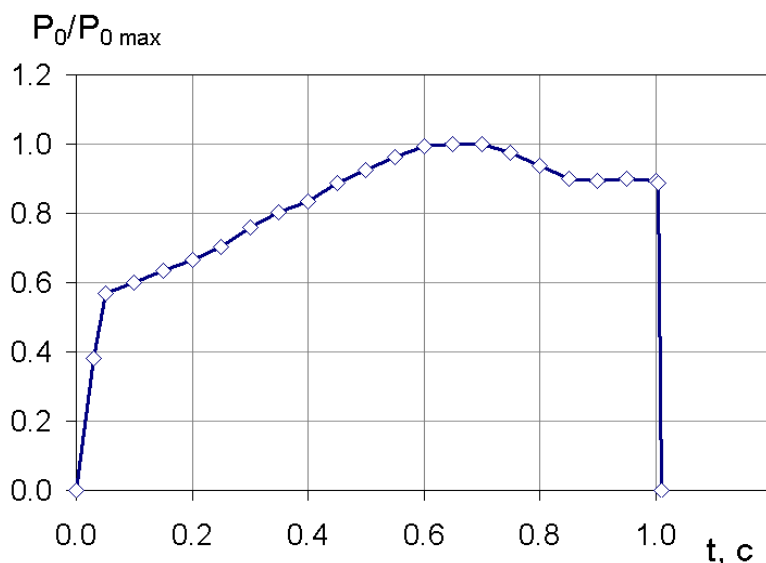


Рис. 18. Изменение по времени работы давления в камере сгорания двигателя

Характер изменения фонового давления  $P_0^I$  в объеме ступеля около торцевой крышки показан на рис. 19. Здесь видно, установившийся режим течения в полости ступеля реализуется через  $\sim 0.4$  с после запуска двигателя до конца его работы. В этот период значения фонового давления, измеренные датчиками ДР1-ДР4, остаются практически постоянными, а изменение давления в различных частях диагностической рамы (см. рис. 20) хорошо согласуется с профилем изменения давления в камере сгорания двигателя (рис. 19).

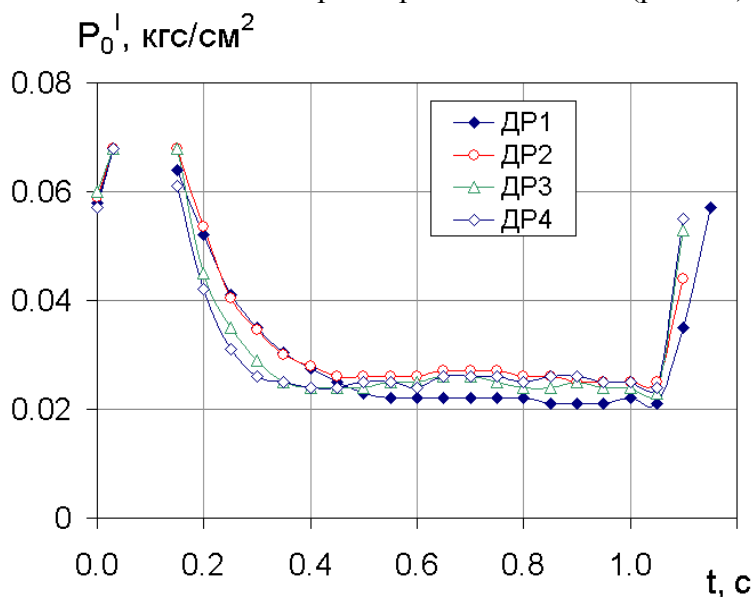


Рис. 19

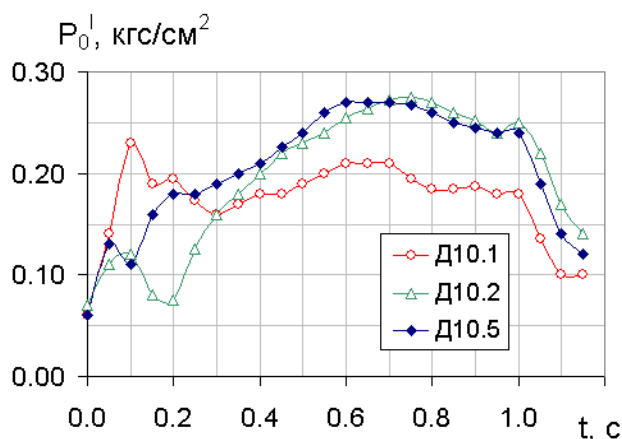


Рис. 20. Изменение давления в различных зонах диагностической рамы

Перепад давления по отношению к фоновому давлению у крышки стапеля  $P_0^I / P_0$  на установившемся режиме работы двигателя соответствовал диапазону значений  $N=6600-9400$ . Значение параметра  $R_L$  достигало уровня  $7 \cdot 10^4$  (турбулентный режим течения в соплах и в слое смешения на границе струи).

Отметим, что режим истечения струй по значению параметра  $Re_*$  в данных испытаниях сильно отличаются в большую сторону от условий, реализующихся при работе ЖРД малой тяги (ЖРДМТ) на КА.

На рис. 21 приведены данные по изменению давления на горизонтальной планке диагностической рамы при работе двигателя.

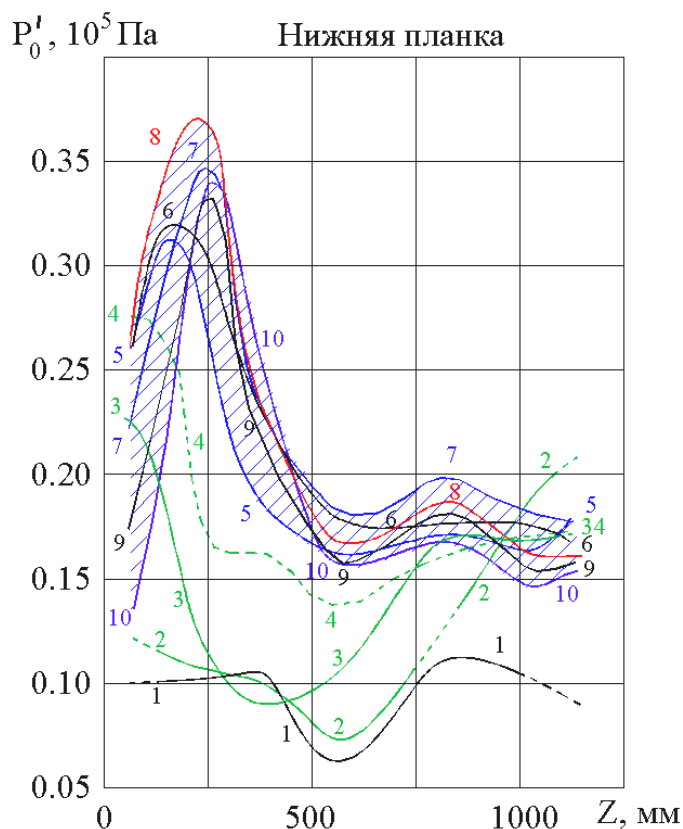


Рис. 21. Профили полного давления в сечении диагностической рамы в струе в зависимости от времени после запуска двигателя

Цифры 1, 2, 3...10 соответствуют значениям времени работы двигателя 0.1, 0.2, 0.3...1.0 с. Здесь видно, что установившийся режим течения в объеме стапеля реализуется через 0.5 с после запуска двигателя. Штриховкой на рис. 21 показан диапазон изменения давления по длине планки в режиме установившегося течения.

Для выявления структуры течения струи двигателя в полости стапеля были проведены модельные исследования на установке ВИКИНГ ИТ СО РАН. Проведение таких исследований было во многом обусловлено необходимостью правильной интерпретации результатов исследования теплового и эрозионного воздействия струи натурального двигателя на испытанные теплозащитные материалы.

**Модельные эксперименты.** Модель масштаба  $\sim 1:50$  имитировала стапель стенда СВС и представляла собой двухсопловой блок, установленный внутри полого цилиндра на фланце форкамеры. В цилиндре крепилась прямоугольная пластина, воспроизводящая панель, на которой на стенде ВС устанавливались образцы материалов.

В качестве модельного газа использовался  $\text{CO}_2$ . В экспериментах использовались сопла с  $\bar{F}=10.2$  ( $T_0=380$  К) и  $\bar{F}=16$  ( $T_0=300$  К). В обоих случаях, как и для натурального двигателя, значения характерных углов расширения струй  $\theta_+$  составляли  $\sim 30^\circ$ , что достигалось подбором параметров  $P_0$ ,  $T_0$ . Эксперименты с соплами  $\bar{F}=10.2$  ( $T_0=380$  К) проведены для визуализации течения на стенках стапеля.

Проведена диагностика структуры поля течения внутри цилиндра посредством измерения давления  $P_0'$  трубкой Пито в продольных  $\bar{X}=\text{const}$ . и поперечных  $\bar{X}=\text{const}$ ,  $\bar{Y}=\text{const}$  и  $\bar{Z}=\text{const}$  сечениях. Регистрировались величины давлений в барокамере  $P_k$  и фоновое давление  $P_u$  в полости цилиндра под соплами.

Вакуумная станция установки работала в режиме механической откачки газа, позволяющем при расходе рабочего газа 5-8 г/сек поддерживать фоновое давление в барокамере от 0.4 до 8 мм рт. ст.

Проведено исследование влияния внешнего давления  $P_k$  на величину давления в полости цилиндра  $P_u$  (рис. 22) и на характер изменения профилей давления в поперечных сечениях цилиндра (рис. 23).

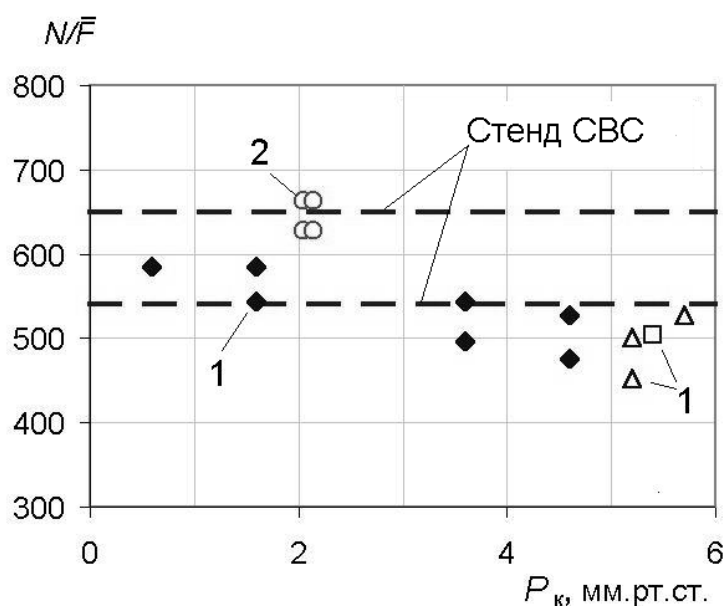


Рис. 22. Изменение параметра  $N/\bar{F}$  в стапеле в зависимости от давления в барокамере. 1 – модель с соплами  $\bar{F}=16$ ; 2 – модель с соплами  $\bar{F}=10.2$ .

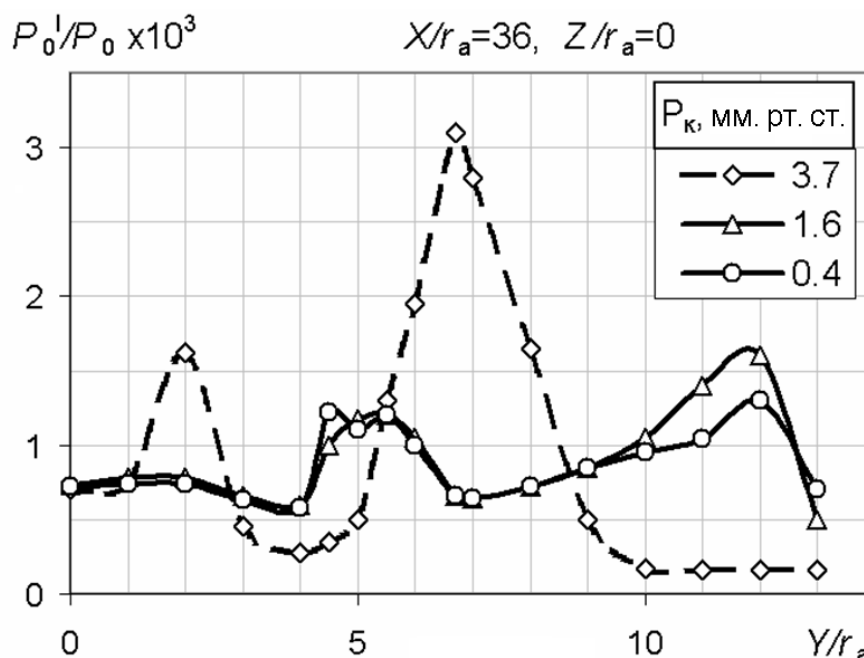


Рис. 23. Изменение динамического давления струи в выходном сечении стапеля в зависимости от давления в барокамере (ВИКИНГ).

При  $P_k < 3$  мм рт. ст. величина  $P_u$  становится инвариантной по величинам фонового давления  $P_k$ . При этом давлении реализуется запирание течения на выходе из цилиндра, а внутри него режим течения уже не зависит от  $P_k$ .

Автомодельность в поперечных профилях давлений  $P_0'$  имеет место при величинах  $P_k \leq 1.6$  мм рт.

При этом значения параметра  $N/\bar{F}$ , определенные по  $N = P_0/P_u$ , совпадают с диапазоном значений  $N/\bar{F} = 540-650$ , реализованных в установке СВС (рис. 22, табл. 3).

Таблица 3

Параметр	Стенд СВС, натуральный двигатель	Модели в установке ВИКИНГ	
$\bar{F}$	10.6	16 (1)	10.2 (2)
$\theta_+$ , град.	30	29.8	30.7
$N/\bar{F}$	540-650	555-585	626-663
$A_1$	1.0	1.51	0.96

В каждом сечении поля течения  $\bar{X} = 10-36$  получены по 8-10 профилей давления  $P_0'(Y)$  и  $P_0'(Z)$ . Кроме этого были получены профили изменения давления вдоль линий, параллельных продольной оси цилиндра в вертикальных и горизонтальных плоскостях, проходящих через оси сопел и вертикальной плоскости симметрии.

Это позволило воспроизвести положение изобар в сечениях цилиндра и определить волновую структуру и характерные области поля течения, рис. 24.

Скачки уплотнения типа 3 и 4 пересекаются на расстоянии  $\bar{X} \sim 33$ . Поэтому в сечении  $\bar{X} = 36$  отсутствуют “вакуумные” ядра струй 1, которые есть в сечении  $\bar{X} = 29$ .

Дополняют картину течения струй, реализующуюся в полости стапеля результаты визуализации линий тока газа на стенке цилиндра, рис. 25 и 26, где приведена развертка его внутренней поверхности по азимутальному углу  $\varphi$  (рис. 17).

В верхней части цилиндра ( $\varphi = 0$ ) линия следа границы струи пересекается с таким же следом от взаимодействия струй соседнего сопла со стенкой, при этом вниз по течению образующая  $\varphi = 0$  становится линией интенсивного растекания газа. В нижней части цилиндра линия следа по касательной подходит к образующей цилиндра с угловой координатой  $\varphi = 145^\circ$ . След от взаимодействия висячего скачка с поверхностью является линией растекания потока. Часть газа, попадающая внутрь подковообразной линии (зона А), двигается к выходу из цилиндра.

В зоне течения В (в верхней по высоте части цилиндра) наблюдается формирование сильного возвратного течения, направленного к передней стенке рабочей камеры (стапеля). Похожий характер течения имеется в нижней части стапеля (зона С). Отличие заключается в размерах указанных зон течения. Кроме того, в зоне В граничной точкой возвратного течения на образующей  $\varphi = 0$  является точка пересечения двух следов висячих скачков, а в зоне С такой границей служит передний к соплам край панели.

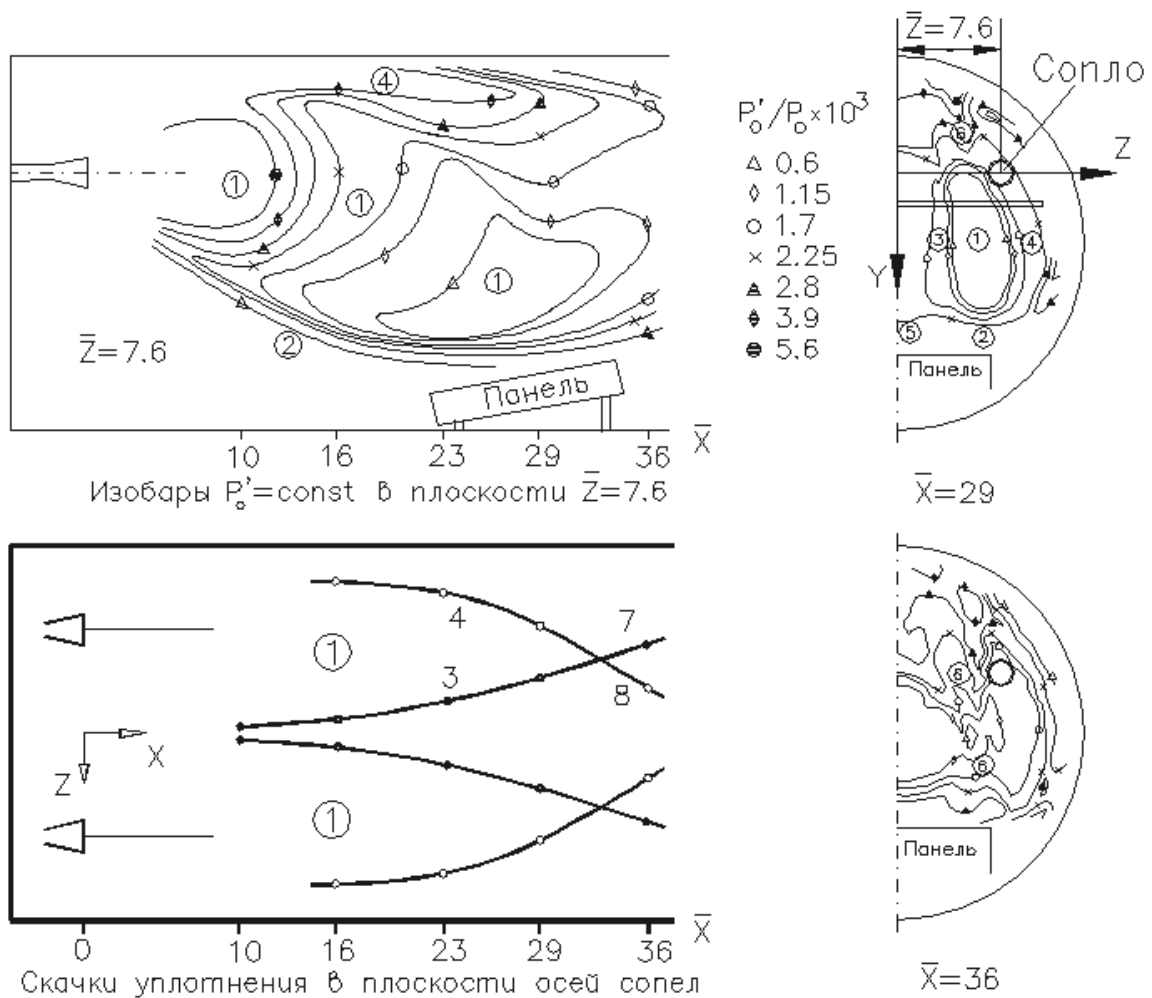


Рис. 24. 1 - “вакуумное” ядро струи; 2 - висячий скачок; 3 - косой скачок (взаимодействие “струя - струя”); 4- косые скачки (взаимодействие “струя - стенка”); 5 и 6 - зоны высокого давления, 7, 8 – интерференционные скачки

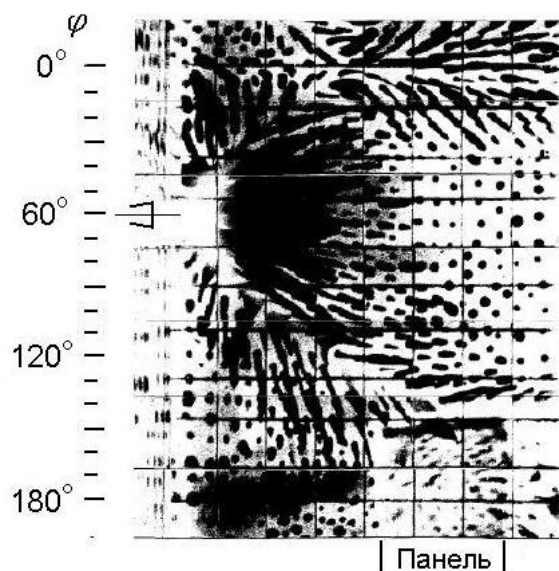


Рис. 25. Следы движения капель битума на стенке цилиндра (модель стапеля)

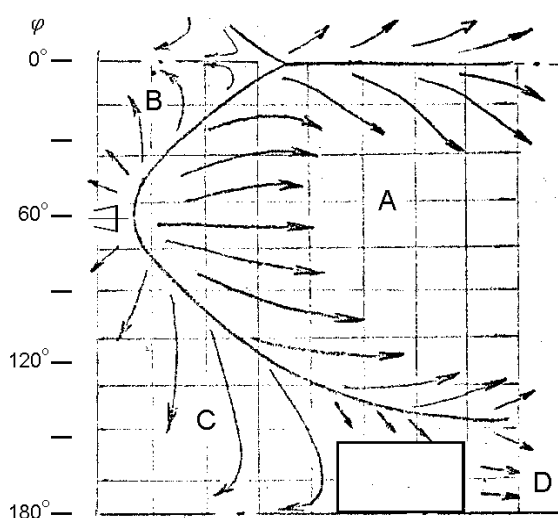


Рис. 26. Графическая интерпретация данных рис. 25

**Анализ результатов испытаний натурного двигателя с использованием данных, полученных в модельных экспериментах. Пересчет результатов модельных экспериментов на условия работы натурного двигателя на стенде СВС.** Условия испытаний натуральных двигателей были воспроизведены на моделях по значениям характерных углов полей течений струй  $\theta_+$  и по параметру моделирования геометрии недорасширенной струи  $N/\bar{F}$ .

Еще раз вернемся к вопросу о пересчете результатов измерений давления  $P_0'$  на моделях для условий работы натуральных двигателей.

В первую очередь остановимся на соотношении между собой результатов измерений, полученных в установке ВИКИНГ на моделях с соплами  $\bar{F}=16$  и  $\bar{F}=10.2$ , считая, что первая является "моделью", а вторая - "натурой".

На рис. 27 и 28 показано сравнение результатов измерений динамических давлений в "модельной" и "натурной" струях вдоль горизонтальных и вертикальных линий в поперечных сечениях модели стапеля, представленных в виде  $A_1 \cdot P_0'/P_0$ . Для "модели" значение коэффициента пересчета  $A_1=1.65=1.51/0.96$ , для "натуры" -  $A_1=1$  (табл. 3).

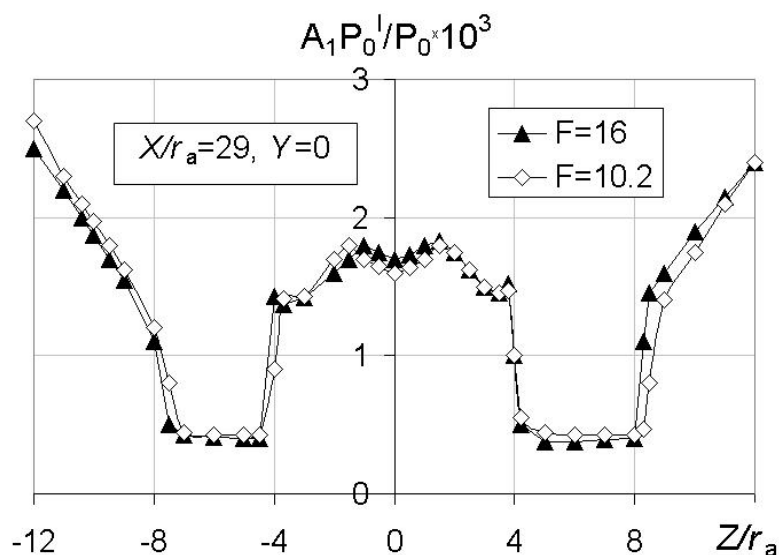


Рис. 27. Сравнение результатов исследований модельной ( $\bar{F}=16$ ) и «натурной» ( $\bar{F}=10.2$ ) струй в плоскости

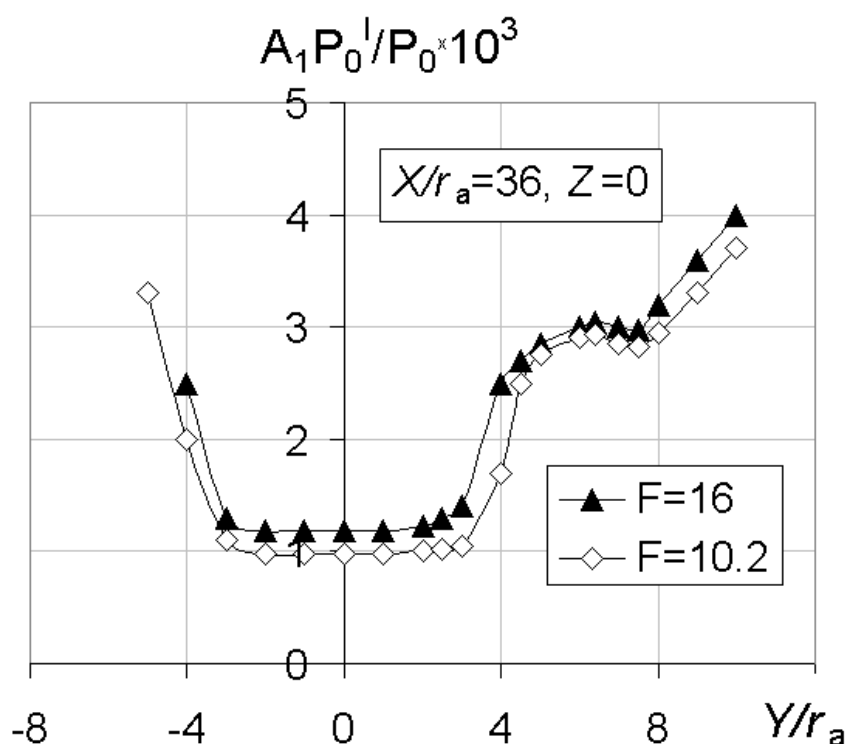


Рис. 28. Сравнение результатов исследований модельной ( $\bar{F}=16$ ) и «натурной» ( $\bar{F}=10.2$ ) струй

Можно отметить хорошее согласование между «натурными» и пересчитанными «модельными» результатами экспериментов по величинам давлений и по структуре течения.

Значения коэффициентов пересчета результатов модельных экспериментов на условие работы натурального агрегата в установке СВС, приведены в табл. 3.

Сравнение результатов экспериментов, полученных для модели с соплами  $\bar{F}=10.2$  (ВИКИНГ), пересчитанных умножением на коэффициент  $A_1=0.96$  из табл. 3, с результатами испытаний натуральных двигателей (Стенд СВС) показано на рис. 29 и 30.



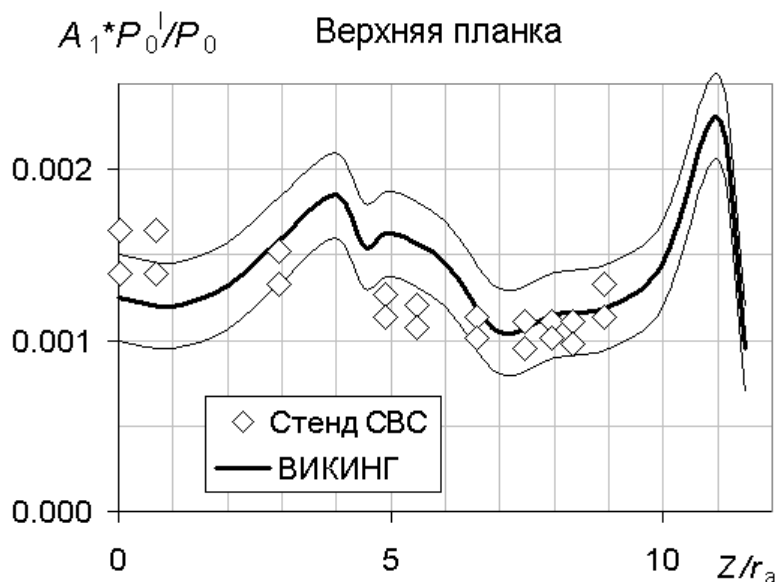


Рис. 29. Сравнение результатов экспериментов в сечении  $X/r_a=36$ .

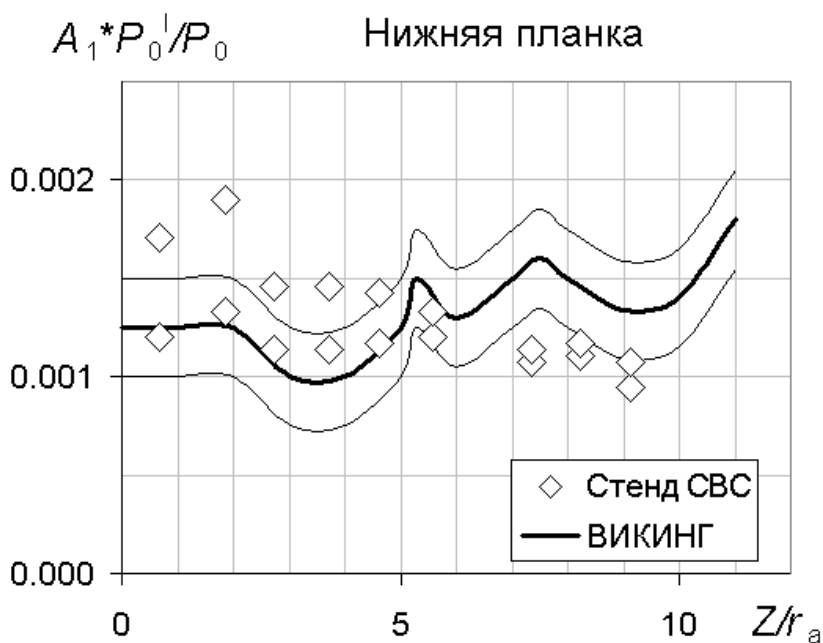


Рис. 30. Сравнение результатов экспериментов в сечении  $X/r_a=36$ .

По этим данным можно заключить, что даже при наличии сложной пространственной структуры поля течения, которая реализуется при пересечении в центральной зоне сечения  $X/r_a=36$  нескольких скачков уплотнения, здесь имеет место удовлетворительная корреляция результатов натуральных и модельных испытаний в пределах точности их определения.

В целом изложенные выше результаты теоретического анализа и обобщения экспериментальных данных подтверждают правомерность и достоверность предложенного метода моделирования параметров течения, геометрии и силового воздействия натуральных струй. При выполнении основных условий моделирования по параметрам  $\theta_+(\bar{J})$  и  $N/\bar{F}$  погрешность

воспроизведения натуральных значений динамического давления на масштабных моделях (с пересчетом результатов модельных экспериментов) составляет ~30%.

### Заключение

Проведены теоретические, численные и экспериментальные исследования параметров течения в струях идеального и реальных газов, истекающих из сверхзвуковых сопел в затопленное пространство. Показано, что параметром подобия для данного класса струй является значение относительного импульса газа на срезе сопла и значение параметра  $N/\bar{F}$ , характеризующего полный перепад давления, отнесенного к степени расширения сопла.

Воспроизведение в модельных экспериментах пространственных распределений основных газодинамических параметров натурной одиночной или составной струи, расширяющихся из сопел в вакуум или в затопленное пространство с большой степенью нерасчетности, может быть достигнуто при равенстве для натурной и модельной струи характерных углов расширения  $\theta_+$  и условий истечения по параметру  $N/\bar{F}$ .

### Литература

1. Дулов В.Г., Лукьянов Г.А. Газодинамика процессов истечения. – Новосибирск: Наука, 1984. – 234 с.
2. Авдуевский В.С., Ашратов Э.А., Иванов А.В., Пирумов У.Г. Сверхзвуковые неизобарические струи газа. – М.: Машиностроение, 1985. – 248 с.
3. Авдуевский В.С., Ашратов Э.А., Иванов А.В., Пирумов У.Г. Газодинамика сверхзвуковых неизобарических струй. – М.: Машиностроение, 1989. – 320 с.
4. Ребров А.К. О газодинамической структуре высоконапорных струй низкой плотности // Проблемы теплофизики и физической гидрогазодинамики. – Новосибирск: Наука, 1974. – С. 262-276.
5. Лукьянов Г.А. Сверхзвуковые газовые струи (обзор экспериментальных и теоретических исследований) // Сверхзвуковые газовые струи. – Новосибирск: Наука, 1983. – С. 3-21.
6. Герасимов Ю.И., Ярыгин В.Н. Истечение струй идеального и реальных газов из осесимметричных сопел. Вопросы подобия. 1. Истечение струй в вакуум // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2012. Том 1. <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2012-12-10-003.pdf>.
7. Аверенкова Г.И., Ашратов Э.А., Волконская Т.Г., и др. Сверхзвуковые струи идеального газа. Часть II. Истечение струй в затопленное пространство. Труды ВЦ МГУ, Изд. МГУ, 1971.
8. Мурзинов И.Н. Параметры подобия при истечении сильно недорасширенных струй в затопленное пространство. Изв. АН СССР, МЖТ, N4, 1971.
9. Гусев В.Н., Климова Т.В. К подобию сверхзвуковых струйных течений. Ученые записки ЦАГИ, т.3, N6, 1972.
10. Шелухин Н.Н. Параметры подобия формы недорасширенной струи при истечении в затопленное пространство. Ученые записки ЦАГИ, т.Х, N2, 1979.
11. Дьяконов Ю.Н., Усков В.И. Расчет сверхзвуковых струй идеального газа методом сеток. Сб. тр. НИИ механики МГУ "Аэродинамика больших скоростей, N5, 1970.
12. Latvala E.K, Anderson T.P., Experimental Determination of Jet Spending from Supersonic Nozzles at High Altitudes. AEDC-TN-58-98 (Jan, 1959), ASTIA Document No. AD-208546.
13. Ребров А.К., Чекмарев С.Ф., Шарафутдинов Р.Г. Влияние разреженности на структуру свободной струи азота. ПМТФ, N1, 1971.
14. Жохов В.А., Хомутский А.А. Атлас сверхзвуковых течений свободно расширяющегося идеального газа, истекающего из осесимметричного сопла. Труды ЦАГИ, вып.1224, 1970.
15. Лейтес Е.А. Исследование течения в области взаимодействия двух и четырех струй. Тр. ЦАГИ, вып. 1575, 1974.

Статья поступила в редакцию 1 ноября 2012 г.