

УДК 533.601.18

ВЛИЯНИЕ ДИСПЕРСИИ В НЕРАВНОВЕСНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Э.В. Прозорова

С.-Петербургский государственный университет, С.-Петербург
prozorova@niimm.spbu.ru

Аннотация

Целью работы является уточнение математической модели описания механики сплошной среды и разреженного газа. Настоящее исследование связано с формулировкой законов сохранения как условий равновесия моментов сил, в то время как обычно формулируются условия равновесия сил. Уравнения для газа найдены из модифицированного уравнения Больцмана и из феноменологической теории. Для твердого тела используются уравнения феноменологической теории, но изменяется их трактовка. Выясняется вклад перекрестных эффектов в законы сохранения механики сплошной среды, в том числе самодиффузии, термодиффузии и др., на которые указывал С. В. Валландер. Разрешен парадокс Д. Гильберта при решении уравнения Больцмана методом Чепмена-Энскога. Уточняется модель записи граничных условий для разреженного газа и для переходного режима течения вблизи движущихся поверхностей. Устанавливаются условия существования инерционного интервала А.Н. Колмогорова, исходя из предлагаемой теории. На основе модифицированной теории выводится формула Прандтля. Обсуждаются результаты численного и аналитического исследований некоторых задач пограничного слоя, взаимодействия газа набегающего потока с кристаллической поверхностью, простейших задач теории упругости.

THE EFFECT OF DISPERSION IN THE NONEQUILIBRIUM MECHANICS OF PROBLEMS CONTINUUM

The aim is to clarify the mathematical model describing the mechanics of continuous media and rarefied gas. The present study is associated with the formulation of conservation laws as conditions of equilibrium of angular momentums, while usually formulated in terms of balance of force. The equations for gas are found from the modified Boltzmann equation and the phenomenological theory. For a rigid body the equations are used of the phenomenological theory, but changed their interpretation. We elucidate the contribution of cross-effects in the conservation laws of continuum mechanics, including the self-diffusion, thermal diffusion, etc., which indicated S. Wallander. Resolved the paradox of Hilbert in the solution of the Boltzmann equation by the Chapman-Enskog method. Refined model of the boundary conditions for rarefied gas flows and transient flow near the moving surfaces. We establish conditions for the existence of the A.N. Kolmogorov inertial range, on the basis of the proposed theory. Based on the theory proposed derivation of the Prandtl formula for boundary layer. The results of numerical and analytical studies of certain problems of the boundary layer, the interaction of gas incident flow with the crystal surface, the simplest problems of elasticity theory are discussed.

Введение

Развитие механики сплошной среды при больших градиентах физических параметров является чрезвычайно важной задачей. Простые феноменологические подходы создания математической теории оказались малопригодными для описания реальных физических процессов при больших деформациях среды. Классические кинетические теории не спасают положения. В настоящее время используются условия равновесия сил, что приводит к симметричному тензору напряжений и нарушению «сплошности» среды, что при строгом рассмотрении требует выполнения дополнительных условий. Закон равновесия сил обеспечивает сохранение массы, импульса и энергии. К основополагающим законам сохранения, кроме того, относится закон сохранения момента количества движения. При классическом подходе закон сохранения момента количества движения не выстраивается, он вырождается в условие симметрии тензора напряжений. На роль момента количества движения указывали Л.Д.Ландау, С. де Гроот, П.Мазур, И.Дьярмати, И.Пригожин, Л.И.Седов, А.А.Ильюшин, А.Ю.Ишлинский, Д.Д.Ивлев и др.. Наиболее развито это направление в моментной теории упругости (Р.Д.Миндлин, В.А.Пальмов, А.Г.Горшков, Э.И.Старовойтов, А.В.Яровой, В.М.Левин, С.Е.Канаун, Э.Л.Аэро и др.). Вспомним слова П.А.Жилина: «Классическая механика в XX веке развивалась весьма интенсивно и претерпела существенные изменения. Главное изменение связано с переходом на фундамент эйлеровой механики, являющейся естественным развитием ньютоновой механики. При этом все, что было достигнуто ранее, полностью сохраняется и не требует никаких изменений. Основное отличие эйлеровой механики от ньютоновой механики заключается в более полном и последовательном учете спиновых движений. Уравнения баланса количества движения и кинетического момента становятся независимыми законами. Понятие силы сохраняется, но момент уже не полностью определяется силами, а является самостоятельной сущностью» [1]. Элементарный объем, являясь открытой системой, обменивается компонентами всех физических величин по всем направлениям. Вряд ли можно пользоваться трубками тока для описания турбулентности.

Для газа и жидкости, насколько нам известно, конкретных предложений по учету эффекта действия момента силы не было. В данной работе для газа выводится закон сохранения моментов из модифицированного уравнения Больцмана. Классическое уравнение Больцмана закон сохранения момента количества движения не выполняет. Как известно, уравнения для макропараметров могут быть получены из уравнения Больцмана методом Чепмена-Энскога. В локально-равновесную функцию распределения в методе Чепмена-Энскога входят значения макропараметров (плотности, скорости и температуры), вычисленные по нулевому приближению (из уравнений Эйлера), без дальнейшей коррекции результатов с использованием уравнений Навье-Стокса. На существование проблемы согласования макропараметров указывал Гильберт при решении уравнения Больцмана методом разложения в ряд по малому параметру. Мы предлагаем алгоритм согласования макропараметров для локально равновесной функции распределения. Влияние изменения функции распределения в течение среднего времени между столкновениями было предложено учесть Б.В.Алексеевым [2]. Обсуждаются проблемы, которые могут появиться при учете момента количества движения в элементарном объеме: изменение уравнений и граничных условий на поверхности твердого тела и на внешней границе. Условия прилипания остаются справедливыми на больших масштабах для течений ньютоновского типа. Однако хорошо известно, что для малых масштабов, когда жидкость примыкает к твердой поверхности, она может скользить, и для совсем малых размеров скольжение становится существенным; что примыкающая к телу жидкость не скользит стационарно. Как происходит это скольжение не ясно. В [3] на основании исследования методом молекулярной динамики (MD) и аналитическим методом было предложено два механизма скольжения. Оба типа скольжения, наблюдаемые в молекулярной динамике,

описываются динамической моделью, в которой каждый атом жидкости испытывает действие силы от соседних атомов жидкой границы, покрытой вышележащей жидкостью, и тормозится поверхностью. Итак, мы не располагаем теорией для описания взаимодействия газа с жидкостью и твердым телом во всем диапазоне изменения параметров. В уравнениях Навье–Стокса и пограничного слоя взаимодействуют нелинейность и диссипация. Однако известно, что кроме перечисленных факторов для ряда задач существенны дисперсионные эффекты. Классическим уравнением, для которого характерно присутствие и взаимодействие нелинейности, диссипации и дисперсии является уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса. Как известно, влияние дисперсии приводит к расщеплению исходного возмущения на отдельные гармоники. Форма сигнала изменяется. Если в уравнение движения системы уравнений Навье – Стокса ввести дополнительное слагаемое, то оно превратится в уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса. Интересно проследить за новыми эффектами, которые появляются вследствие взаимодействия нелинейности и дисперсии, нелинейности и диссипации и найти физические основы возникновения дополнительных слагаемых. Фактически этому и посвящена работа.

Порядок предлагаемых нами (для плотности и количества движения) уравнений выше чем в классическом случае, так как учитывается дисперсия. Все результаты получены для бесструктурных частиц. Для структурного газа необходимость построения уравнения для момента количества движения обосновывается еще тем, что осреднение потенциала взаимодействия молекул по углу до расчета сечения приводит к потере изменения момента в процессе столкновения. Представляется вероятным, что лучший результат получится при осреднении сечения. Повышение порядка уравнений потребовало дополнительных граничных условий. Для уравнений пограничного слоя задавались значения трения на поверхности и вертикальной компоненты скорости на внешней границе. Можно контролировать значение вихря на внешней границе. Для разреженного газа необходимо задавать дополнительные граничные условия-значение потока молекул на границе области. Часто, получив решение задачи, исследуют устойчивость решения к малым возмущениям. Учитывая порядки величин (поверхностные и объемные), теоретически можно заключить о важности вклада сил, созданных объемным воздействием момента, исходя из исследования устойчивости.

Диапазон применимости режима полностью развитого турбулентного слоя А.Н. Колмогорова чрезвычайно узок и включает условие линейного распределения профиля скорости. Новые условия существования инерционного интервала А.Н. Колмогорова устанавливаются в данной работе.

Выбор в качестве условий равновесия условий равновесия моментов приводит к новым формулировкам уравнений механики сплошной среды. Как уже отмечалось, первоначальная (классическая) формулировка законов сохранения базировалась на замкнутости элементарных объемов для обмена касательными составляющими физических переменных, что и приводило к формулировкам условий равновесия для сил. Являясь открытой системой, элементарный объем обменивается компонентами всех физических величин и во всех направлениях. Учет вращательных движений объема (результат действия момента) приводит к несимметричному тензору напряжений и дополнительному уравнению для момента количества движения, которое обычно выписывается только для ферромагнетиков или для частиц с внутренней структурой. Недостающим дополнительным звеном на наш взгляд является неполный учет изменения массы внутри объема при записи закона сохранения массы. Даже при учете действия момента внутри элементарного объема вне поля зрения остается изменение плотности за счет потоков через границу объема из-за существования градиентов плотности и температуры на границе области. В классической теории учитывается только перенос массы направленной вдоль движения скоростью потока. Градиенты остальных величин не учитываются, в том числе градиент силы (подвижность

молекулы). Именно последний эффект используется при разделении изотопов. При больших градиентах физических параметров могут сталкиваться молекулы, принадлежащие группе молекул с разными макропараметрами равновесной части функции распределения, входящей в решение Чепмена-Энскога. Значение определяется градиентами, что отвечает следующему слагаемому в интеграле столкновений. На влияние перекрестных эффектов указывал С.В.Валландер [4,5]. Вопрос о более детальной проработке уравнения неразрывности поставил В.А.Бубнов [6]. Анализ законов сохранения механики жидкости приводится в работах Т.Г.Елизаровой [7], Ю.В.Шеретова [8], В.М. Овсянникова [9]. В качестве примера в настоящей работе дается оценка вклада перекрестных эффектов на поведение ударной волны при числах Маха $M \approx 1$.

Классическая теория предсказывает существование второй вязкости, но обычно предполагают, что ее надо учитывать при работе с плотным газом и с газом, состоящим из молекул с внутренними степенями свободы. Кинетическая теория дает алгоритм вычисления для этих случаев. Объемная вязкость представляет то свойство, аналогичное сдвиговой вязкости при деформации, которое связано с диссипацией энергии в жидкости неизменной температуры из-за изменения объема с конечной скоростью. В предлагаемой теории объемная вязкость получается для бесструктурного газа, ее значение пропорционально времени между столкновениями для модели «твердые сферы». Учет момента количества движения при деформации твердого тела выполняется с использованием уравнения для моментов с вычислением из него несимметричной части тензора напряжений. Можно показать, что функционал с учетом момента количества движения для задач теории упругости имеет локальный минимум. Ранее вклад момента игнорировался на том основании, что объемная величина на порядок меньше поверхностной.

Экспериментально законы сохранения получают в интегральной форме. Перейти от интегральной формы к дифференциальной форме можно для гладких функций, что предполагает возможность стягивания объема в точку и отказа от учета каких-либо процессов внутри объема. Теоретически часто законы сохранения получают путем записи балансовых соотношений для элементарного объема, расположенного в безграничном пространстве. Для каждого закона сохранения выбирается свой элементарный объем [10].

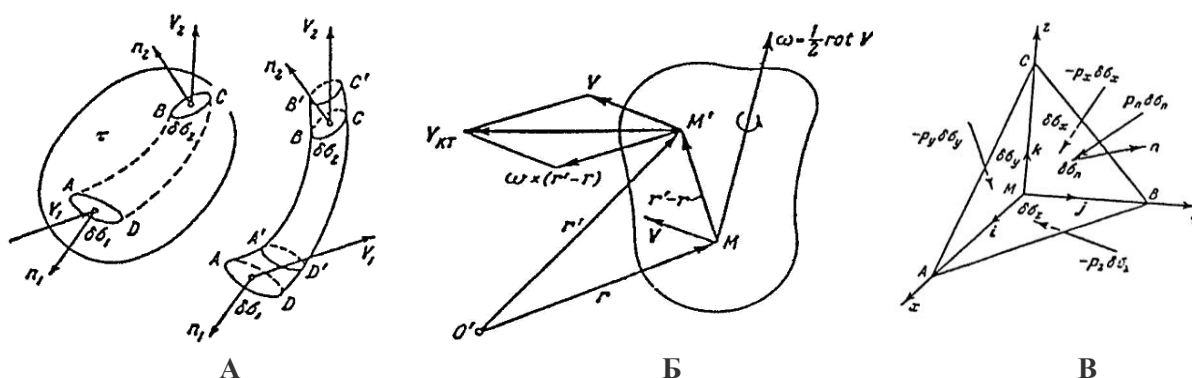


Рис.1. Элементарные объемы, используемые при построении теории.

Однако закон сохранения момента количества движения предполагает наличие конкретной системы отсчета, конкретного радиуса - вектора, идущего из начала координат к элементарному объему. В силу указанных формулировок фактически постулируется симметрия момента количества движения, в то время как для произвольного возмущения движение материальной точки является неинерциальным, а выделенный элемент представляет открытую систему. Математически наличие больших градиентов приводит к

большому остаточному члену при традиционном переходе от интегральной формулировки к дифференциальной. Под большими градиентами понимается, что на расстояниях средней длины свободного пробега массовая скорость газа изменяется на существенную долю скорости звука и соблюдаются условия применимости теории по Н.Н. Боголюбову. Физический смысл отброшенного слагаемого — момент силы, вызывающий вращение элементарного объема. При больших градиентах, как правило, ламинарное течение переходит в турбулентное. В модели Рейнольдса фактически выделяются быстрые и медленные переменные. В полученных осредненных уравнениях устанавливается связь между напряжениями Рейнольдса и осредненными параметрами течения, но ответа на вопрос о виде замыкающего соотношения еще нет. Процесс построения соотношения базируется или же на эмпирическом материале или выписываются уравнения для моментов более высокого порядка, например, для турбулентной (пульсационной) кинетической энергии. В полученные уравнения входят новые неизвестные величины, и процесс замыкания повторяется по указанному сценарию. Для инерциальной подобласти в равновесном случае получается известный закон А.Н. Колмогорова, следующий из теории размерности. Обзор существующих теорий, уточнение моделей и их анализ можно найти, например, в [10-20]. В основе всех теорий лежат уравнения Навье — Стокса. Даже если привлекается уравнение Больцмана с целью получения из него уравнений турбулентного течения, методика вывода ориентирована на обоснование модели Рейнольдса, построенной на основе уравнений Навье — Стокса. Эксперименты показывают [21], что ламинарное течение трансформируется в турбулентное в результате развития и разрушения пакета волн неустойчивости в пограничном слое. Возникновение неустойчивости сопровождается появлением немонотонных профилей скорости вблизи внешней границы пограничного слоя. Предварительные результаты решения новых уравнений указывают на колебательный характер скорости вблизи внешней границы. В силу чувствительности переходных течений к малым возмущениям и отсутствием чувствительных методов, позволяющих количественно измерять временные изменения основных динамических переменных, затруднено получение адекватных граничных условий от эксперимента к эксперименту.

Логарифмические профили для бесконечных пластины и трубы, вообще говоря, получены для изделий конечной длины, хотя и достаточно удлиненных. Теоретический профиль определен введением напряжения Рейнольдса. Распределение скорости в ламинарном потоке $u = \frac{\tau_w}{\mu}$ и $\mu \frac{du}{dy} = const = \tau_w$. Для турбулентного движения напряжениетурбулентного трения $\tau = -\overline{\rho u'v'}$ на стенке равно нулю. Уравнение Рейнольдса

$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d\tau}{dy} = 0$. Если напряжение трения задать формулой Прандтля,

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \tau_w, \quad l = \kappa y, \quad \kappa = const, \quad \text{то} \quad u = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y + C, \quad C = const.$$

Таким образом, использовано несколько предположений и решается не уравнение Навье — Стокса и не уравнение пограничного слоя, а уравнение Прандтля. Исходные уравнения не удовлетворяются ни на внешней границе, ни на поверхности.

В настоящее время для моделирования турбулентных течений широко используется подсеточная вязкость. Выбор соотношения связан как с моделью (система уравнений Рейнольдса или Навье-Стокса на крупной сетке) так и локальными свойствами разностной схемы. Наши результаты численного исследования с учетом влияния момента количества

движения и сравнение значений от вклада третьей производной для полученного автомодельного решения и по формуле Прандтля-Кармана позволяет говорить о совпадении величин на участке роста продольной скорости. Следует отметить важность поступления во внешний невязкий поток вертикальной составляющей скорости. Являясь величиной малой (порядка $1/\sqrt{Re}$), вертикальная компонента скорости в совокупности с горизонтальной при наличии градиентов может создавать «завихренность» и тем самым влиять на течение.

Важнейшим вопросом современной аэромеханики является вопрос взаимодействия газа с поверхностью летательного аппарата, но взаимодействие плохо изучено для переходных режимов течения разреженного газа. Уточняется постановка граничных условий на поверхности обтекаемого тела и модель зарождения поверхностной трещины. Предыстория предлагаемого метода для около свободно молекулярного течения связана с работами Д. Уиллиса, М. Лунца, Д. Любонского, В.С. Лю [22-24]. Уиллис считал, что вблизи твердой поверхности каждая молекула сталкивается с другой только один раз и что сталкивающиеся молекулы принадлежат к различным «классам». Другими словами, предполагается, что наиболее вероятны те столкновения, в которых участвуют молекулы невозмущенного потока, набегающего на тело, и молекулы, диффузно отразившиеся от поверхности. Для обеспечения точности предлагалось делать итерации. Отражение молекул предполагалось диффузным. Метод аналитический и в силу громоздкости и трудоемкости не получил распространения. Для слабо разреженного газа Н. Г. Паттерсоном получены скорость скольжения и температурный скачок, которые зависят не только от поперечных, но и от продольных градиентов температуры и скорости. Исходные положения включают по-прежнему функцию распределения отраженных молекул и смешанную модель (диффузно-зеркальную). Взаимодействию разреженных газов с обтекаемыми поверхностями посвящены работы Ю. А. Рыжова, Р.Г. Баранцева, Ф. Гудмана, Г. Вахмана, А.А. Пярнпуу, Г.В. Дубровского и др. [25-28]. Все предыдущие методы, кроме работ, связанных со свободномолекулярным потоком, работали с падающими и отраженными молекулами. В случае свободномолекулярного потока задавалась модель отражения молекул (диффузная, зеркальная, смешанная). В настоящее время развитые вычислительные средства и модели твердого тела позволяют надеяться на более строгое рассмотрение вопроса (А.М.Кривцов, Е.А. Иванова, Н.Ф. Морозов, А.И. Мелькер и др. [29,30]), но в них главным образом моделируются взаимодействие газа с наноструктурами и взаимодействие атомов в твердом теле.

Возможны два варианта расчетов. Один вариант связан с непосредственным расчетом с использованием модельных потенциалов взаимодействия молекул газа и модели твердого тела, второй связан с предлагаемым новым уравнением для функции распределения [31-34]. Анализ уравнения позволяет сделать некоторые общие выводы. В [34] было предложено при постановке граничных условий вместо исследования слоя Кнудсена с характерным размером порядка длины свободного пробега рассматривать слой порядка нескольких радиусов взаимодействия молекул. Задача взаимодействия газа с поверхностью вблизи обтекаемого тела имеет особенности, связанные с тем, что отношение длины свободного пробега молекул газа к расстоянию между молекулами твердого тела велико. За время взаимодействия молекулы газа с твердым телом функция распределения не меняется (10^{-13} с), но следующая взаимодействующая молекула будет принадлежать другой части функции распределения. Таким образом, процесс взаимодействия будет носить нестационарный характер. Результатом взаимодействия движущихся молекул газа с поверхностью является диффузия молекул газа вдоль поверхности с последующей частичной аккомодацией за счет набора энергии от взаимодействия с молекулами твердого тела (в случае высокой температуры поверхности). Анализ указывает на важность профилирования функции распределения падающего потока и существенное влияние коллективного потенциала поверхности на зарождение трещин и функцию распределения отраженных молекул. Влияние момента

количества движения прослеживается на конкретных примерах решения автомодельных задач пограничного слоя, неавтомодельных вариантах задач Фолкнера-Скан, простейших задач теории упругости, простейших задач взаимодействия газа с кристаллической поверхностью.

Влияние момента в феноменологических теориях

Математические постановки задач определения напряженно-деформируемого состояния в механике сплошной среды в полной постановке для газа, жидкости и твердого тела отличаются между собой уравнениями состояния. Начнем с теории упругости как самой простой, так как нет конвективной составляющей. Учет момента количества движения наиболее часто в механике твердого тела производится на основе модели братьев Е. Cosserat, F. Cosserat, но для них необходимо знать дополнительные константы, которые могут быть найдены только из эксперимента. Большинство предлагаемых в настоящее время теорий носят эвристический характер и работают в конкретной проблемной области, опираясь на эксперимент. Так, в теории трещин с учетом моментных напряжений [35]: «Как было отмечено Миндлином, на кажущуюся прочность при разрушении хрупких материалов может влиять наличие градиента деформаций. Таким образом, он возродил интерес к моментной теории упругости, берущей начало от Коссера. В этой теории энергия упругого тела зависит от градиента деформаций и градиента вращения, и, следовательно, вводится новый модуль материала, имеющий размерность силы. Отношение этого нового модуля к модулю сдвига имеет размерность квадрата длины l^2 . Эта длина l является той характеристикой материала, от которой сильно зависит степень влияния моментных напряжений (моменты на единицу площади). Если некоторый размер тела приближается к l , то моментные напряжения могут оказывать значительное влияние. Так как l , вероятно, имеет субмикроскопический размер, то влияние моментных напряжений сильно локализовано и, по-видимому, сосредоточено, например, вблизи геометрических разрывов. Следовательно, значительный физический интерес представляет исследование влияния моментных напряжений вокруг острой трещины и на теорию хрупкого разрушения». На самом деле, момент количества движения не привносит новых постоянных по сравнению с классическим вариантом теории. Следовательно, теория, учитывающая момент, не должна их содержать. Выпишем законы сохранения момента для газа и твердого тела (теории упругости).

$$\int_{\tau} \left[\vec{r} \times \left(\rho \frac{d\vec{V}}{dt} + \dot{M}\vec{V} - \rho\vec{F} - \frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} - \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} - \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \vec{P}_x - \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \vec{P}_y - \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \vec{P}_z \right] d\tau = 0 \quad (1)$$

Здесь и далее t – время, x, y, z – координаты, V, u, v – скорости, $\tilde{\nu}$ – вязкость, ρ – плотность, U_e – скорость на внешней границе.

В проекциях на координатные оси законы сохранения момента количества движения для небольших градиентов (поскольку обозначения переменных в теории упругости и теории жидкости и газе различны, заменим P_{ij} – на τ_{ij} или σ_{ij} , $\sigma_i = \sigma_{ii}$)

$$\int_{\omega} (y\sigma_{nz} - z\sigma_{ny}) d\omega = \int_{\Delta} \left\{ y \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} \right) + \tau_{yz} - \tau_{zy} \right\} d\Delta \quad (2)$$

Таким образом, степень несимметричности тензора напряжений P определяется через момент

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[x \left(\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z} \right) - y \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} \right) \right] = \Delta_{yx} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[x \left(\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} \right) \right] = \Delta_{zx}$$

Третья добавка обращается в нуль.

Итак, используем второй тип условий равновесия как условий равновесия моментов. Первый тип условий получается как частный случай. Окончательно в проекциях на координатные оси законы сохранения момента количества движения для небольших градиентов (см. рис. 1B)

$$y \left(\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z} \right) + \sigma_{zy} - \sigma_{yz} = 0$$

$$x \left(\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} \right) + \sigma_{zx} - \sigma_{xz} = 0 \quad (4)$$

$$x \left(\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z} \right) - y \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} \right) + \sigma_{yx} - \sigma_{xy} = 0$$

Дополнительная составляющая сил получается как дивергенция соответствующей разности.

$$M_x = yF_z - zF_y, M_y = xF_z - zF_x, M_z = xF_y - yF_x.$$

$$F_{Mx} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}, F_{My} = \frac{\partial M_z}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial z}, F_{Mz} = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}.$$

$$M_x = y \left(\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z} \right). \quad (5)$$

$$M_y = x \left(\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} \right).$$

$$M_z = x \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right) - y \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right).$$

$$F_{Mx} = \frac{\partial}{\partial y} \left[x \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right) - y \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial z} \left[x \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) \right] \right]$$

Из уравнения (1) для газа

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \vec{p}_x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \vec{p}_y + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \vec{p}_z + x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{P}_j) = M_l. \tag{6}$$

На наш взгляд важно, что момент работает «локально», т. е. в лагранжевых координатах и нет нестационарного оператора. Несимметрия тензоров деформаций и напряжений в механике сплошной среды с других позиций обсуждалась в [36]. Такой же результат получается из кинетической теории (см. далее).

Рассмотрим вывод уравнения неразрывности. Распределение скорости вблизи точки складывается из трех составляющих: поступательного, вращательного и деформационного. Обычно отдельно рассматриваются движения квазитвердое (поступательное плюс вращательное) и деформационное. Заключение о скорости квазитвердого движения вида $v = 1/2\omega \times (r' - r)$ справедливо при прохождении вектора скорости через ось инерции объема. Элементарный объем может или сам вращаться вокруг этой оси или быть вовлеченным во вращательное движение, а при движении жидкости или газа дополнительно сказывается дивергенция потока. В том и другом случаях, как видно из рис. 1Б,2, поток плотности через границу меняется на величину $\frac{d(\rho u)}{dr} (r' - r) + \dots$ за счет поворота элементарного объема.

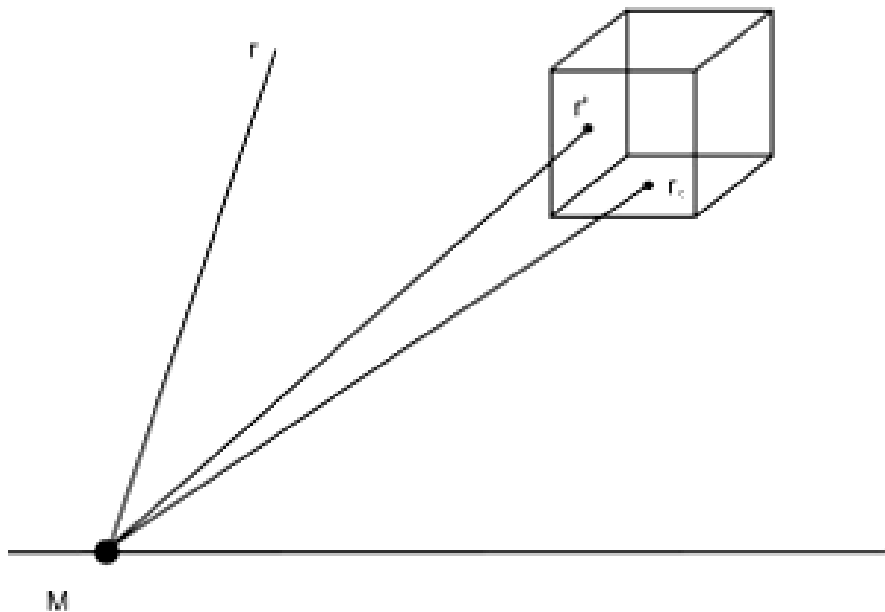


Рис.2. Влияние вращения элементарного объема

$$\int_{(s)} (\nabla \rho u (r' - r_c))_n ds = \int_{(s)} \operatorname{div} (\nabla \rho u) (r' - r_c) dv \quad (7)$$

Откуда следует, принимая во внимание малость объема и отсутствие вращения на оси инерции,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (8)$$

Дополнительные вопросы возникают при записи связи тензоров напряжений и скоростей деформаций. Обычное предположение о пропорциональности теряет силу по причине несимметричности тензора напряжений. По основному направлению соотношения сохраняются (τ_{xy}), по второму направлению требуются добавки, но они, возможно, более высокого порядка. Пока оставлены законы Ньютона и, поскольку момент не содержит новых переменных и связан с действием распределенного напряжения, коэффициент дисперсии равен обычной динамической вязкости. Остальные уравнения остаются формально прежними, но учитывается несимметричность тензора напряжений.

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \rho F_x + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z}, \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \rho F_y + \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z}, \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho F_z + \frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (9)$$

К расширению теории за счет самодиффузии и других физических процессов относятся уравнения, предложенные С.В. Валландером [4,5].

Далее E – внутренняя энергия, $E = c_v T$, где c_v – коэффициент

теплоемкости $Q_x = D_1 \frac{d\rho}{dx} + D_2 \frac{dT}{dx}$

$$Q_y = D_1 \frac{d\rho}{dy} + D_2 \frac{dT}{dy}, Q_z = D_1 \frac{d\rho}{dz} + D_2 \frac{dT}{dz}, \quad (10)$$

$$t_x = k_1 \frac{d\rho}{dx} + k_2 \frac{dT}{dx}, t_y = k_1 \frac{d\rho}{dy} + k_2 \frac{dT}{dy}, t_z = k_1 \frac{d\rho}{dz} + k_2 \frac{dT}{dz}$$

Q_x, Q_y, Q_z – потоки массы через грань, перпендикулярную координатным осям движущегося газа со скоростью V_i , ρ – плотность, D_1, D_2 – коэффициенты самодиффузии и термосамодиффузии, k_1, k_2 – коэффициенты теплопроводности, R – газовая постоянная. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z}, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \right) &= \rho \mathbf{F} + \frac{\partial \bar{\tau}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{dE}{dt} + \left(E - \frac{v^2}{2} \right) \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \right) = \\ = \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + \frac{\partial t_z}{\partial z} + \bar{\tau}_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \bar{\tau}_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \bar{\tau}_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, \\ \tau_{xx} = -R\rho T + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{dv_x}{dx}, \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{dv_x}{dy} + \frac{dv_y}{dx} \right) \end{aligned}$$

Таким образом, оказывается, что при больших градиентах необходимо более полно учитывать вклад физических законов. Для полноты изложения повторим элементы нашей работы [37].

Вывод уравнений из кинетической теории

Все газодинамические функции имеют макроскопический характер и, если мы хотим получать их из кинетической теории, то используем кинетическое уравнение для "макрофункции" – одночастичной функции распределения. Уравнение для одночастичной функции распределения получается или непосредственно как уравнение баланса частиц, или через N -частичную функцию распределения, введенную Н.Н. Боголюбовым [38], с привлечением уравнения Лиувилля. Теория позднее была развита его учениками и сотрудниками [39-43]. Уравнение Лиувилля является основным уравнением статистической механики. Вывод этого уравнения базируется на том, что движение ансамбля тождественных частиц подобно движению газа с плотностью F_N . В нем учитывается изменение состояния системы во времени и инерциальное прямолинейное движение. Из уравнения Лиувилля, используя формализм Гамильтона, выводят кинетическое уравнение в терминах классической механики, после чего переходят к получению уравнения Больцмана. Однако формализм Гамильтона правомерно использовать в случае бездиссипативной системы, когда нет зависимости от скорости, что при наличии возмущающих поверхностей или в условиях больших градиентов скоростей, температур, плотностей или других характеристик не наблюдается. Из уравнения Больцмана методом Чепмена — Энскога или каким-либо другим выводятся уравнения Навье — Стокса (Барнетта и т. д.), определяется уравнение неразрывности, совпадающее по форме с уравнением Лиувилля. Таким образом, доказываемая непротиворечивость всей теории. Предложенная первоначально теория для решения релаксационных задач экстраполирована на решение задач, связанных с динамикой газа, в том числе для решения задач о течении газа вблизи поверхности.

Ограничения схемы Н.Н. Боголюбова оговаривались самим автором и связаны с выполнением условий ослабления корреляций, существованием четырех характерных масштабов времени (соответственно, пространственных масштабов), частным классом решений для s -частичной функции распределения как функции, зависящей от времени через одночастичную функцию распределения $f_s(t) = f_s(f)$, бинарными центральными взаимодействиями, обеспечивающими закон сохранения момента количества движения, потенциалом U , быстро спадающим с расстоянием, доминированием объемных эффектов и пренебрежением влиянием границ. Потенциал взаимодействия молекул $\Phi = \Phi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$. Дополнительным неявным предположением служит слабое отклонение функции распределения от равновесного состояния. Для релаксационных задач и упругих столкновений все предположения выполняются. Исключен случай, когда характерные времена релаксации одночастичной F_1 и двухчастичной F_2 соизмеримы. Следует отметить, что для молекул с более сложным потенциалом взаимодействия, зависящим от угла, осреднение по углу производят до вычисления сечения столкновений (осреднение

потенциала). Исследований, касающихся влияния перестановки операций осреднения сечения столкновений и потенциала, нет. Здесь F – функция распределения в Γ – пространстве, f – функция распределения в фазовом γ -пространстве. Выведем уравнение для N -частичной функции распределения вблизи поверхности с учетом градиента плотности частиц. При выводе модифицированного уравнения обозначения оставим общепринятыми, т.е. r – радиус-вектор; x – координата точки; ξ – скорость точки, m – молекулярный вес, и, согласно определению функции распределения f_N , вероятность нахождения системы в точках (x_i, ξ_i) в интервалах $dx_i d\xi_i$ равна $f_N(t, x_1, \dots, x_N, \xi_1, \dots, \xi_N) dx_1, \dots, x_N d\xi_1, \dots, \xi_N$.

Вычислим изменение момента количества движения в произвольной точке $\delta L = m(r + \delta r) \times f_N(t, r + \delta r, \xi) \xi - mr \times f_N(t, r, \xi) \xi$.

Но $f_N(t, r + \delta r, \xi) = f_N(t, r, \xi) + \delta r \cdot \frac{\partial f_N}{\partial r}$. В результате изменение момента количества движения для рассматриваемого момента времени представится следующим образом

$$\delta L = m(\delta r \times f_N + r \times \delta f_N) \cdot \xi.$$

После преобразования получаем

$$\delta L = m \delta r \times \left(f_N + r \cdot \frac{\partial f_N}{\partial r} \right) \cdot \xi.$$

Вдали от стенки градиенты функции малы, и, кроме того, после раскрытия производных во втором слагаемом получаем величины разных знаков, что снижает роль момента. В случае расчета аналога начального слоя Кнудсена придется проделать процедуру разложения в ряд по времени. При учете нестационарных эффектов

$$\xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_j \frac{\partial f_N}{\partial t} \right).$$

Пока мы не будем учитывать вклад изменения скорости, считая вклад сил по-старому. В результате полная производная примет вид

$$\frac{df_N}{dt} = \frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left\{ \xi_i \cdot \left[\frac{\partial f_N}{\partial x_i} \right] + \xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left[x_j \frac{\partial f_N}{\partial x_j} \right] - \frac{X_i}{m} \frac{\partial f_N}{\partial \xi_i} \right\}. \quad (12)$$

Рассмотрим уравнения для s -частичной функции распределения (F_s)

$$\begin{aligned} \frac{1}{V^s} \frac{\partial F_s}{\partial t} = & -\frac{1}{V^s} \sum_{i=1}^s \frac{p_i}{m} \frac{\partial F_s}{\partial r_i} + \frac{1}{2V^s} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (j \neq i)}}^s \frac{\partial \Phi(|r_i - r_j|)}{\partial r_i} \frac{\partial F_s}{\partial p_i} + \\ & + \frac{1}{V^{s+1}} \sum_{i=1}^s \int \sum_{j=s+1}^N \frac{\partial \Phi(|r_i - r_j|)}{\partial r_i} \frac{\partial F_{s+1}(t, r_1, \dots, r_s, r_j, p_1, \dots, p_s, p_j)}{\partial p_i} dr_j dp_j - \\ & - \frac{1}{V^{s+1}} \sum_{j=s+1}^N \int \frac{p_j}{m} \frac{\partial F_{s+1}(t, r_1, \dots, r_s, r_j, p_1, \dots, p_s, p_j)}{\partial r_j} dr_j dp_j + \\ & + \frac{1}{V^{s+1}} \sum_{i=1}^s \int \sum_{j=s+1}^N \frac{\partial \Phi(|r_i - r_j|)}{\partial r_j} \frac{\partial F_{s+1}(t, r_1, \dots, r_s, r_j, p_1, \dots, p_s, p_j)}{\partial p_j} dr_j dp_j + \end{aligned} \quad (13)$$

$$+ \frac{1}{2V^{s+2}} \sum_{\substack{i,j=s+1 \\ (j \neq i)}}^s \int \frac{\partial \Phi(|r_i - r_j|)}{\partial r_i} \frac{\partial F_{s+2}(t, r_1, \dots, r_s, r_i, r_j, p_1, \dots, p_s, p_i, p_j)}{\partial p_i} dr_i dr_j dp_i dp_j.$$

Обычно предполагается, что при $|r_j| \rightarrow \infty \frac{\partial}{\partial r_j} F_n \rightarrow 0$, $|p_j| \rightarrow \infty \frac{\partial}{\partial p_j} F_n \rightarrow 0$.

Последние три слагаемых при указанных условиях обращаются в нуль. При отсутствии равновесия пространственная производная в нуль не обращается. Не будет она обращаться в нуль при неравновесном взаимодействии газа с поверхностью. Процентный вклад этого слагаемого будет значительным при больших характерных размерах процесса. Пока не ясно, как скажется слагаемое на граничных условиях. Полученные численно результаты по взаимодействию газа с кристаллической решеткой говорят о нарушении равновесия и что перестановка молекул при наличии градиентов формально не имеет места, но при большом количестве молекул указанные слагаемые будут величинами следующего порядка вдали от поверхности. Как известно, для структурных частиц теорема Лиувилля о сохранении фазового объема не выполняется. Представляется сомнительным выполнение гипотезы о молекулярном хаосе для молекул с внутренними степенями свободы, когда требуется несколько столкновений для достижения условия равновесия. В условиях неравновесного течения, конечно, переставлять молекулы нельзя, но используя макрохарактер одночастичной функции распределения и иерархию макроразмеров и времен можно надеяться, что разбив на конечное число групп сам элементарный объем и используя большое количество молекул внутри группы, достигнем перестановочности молекул внутри группы и переходу к классическому уравнению.

Классический вывод уравнения Больцмана состоит в записи баланса частиц через соотношение для одночастичной функции распределения

$$f(t + dt, \mathbf{r} + \mathbf{c}_i dt, \mathbf{c}_i + \mathbf{F}_i dt) d\mathbf{r} d\mathbf{c}_i = f(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i, t) d\mathbf{r} d\mathbf{c}_i + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} dt. \tag{14}$$

Часто последнее пишут в форме

$$f(t + dt, \mathbf{r} + \mathbf{c}_i dt, \mathbf{c}_i + \mathbf{F}_i dt) = f(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} dt. \tag{15}$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$, $\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \right)_{coll}$ – интегралы столкновений, записанные в различных фазовых пространствах. Внешне эти равенства идентичны, однако второе соотношение выполняется на временах взаимодействия молекул и все взаимодействия коррелированы

Для газодинамических задач характерная длина элементарного объема, для которого записано равенство (2), равная 10^{-8} см. мала, и требование большого числа частиц в элементарном объеме не выполняется для высот 120–300 км в земной атмосфере. Действительно, необходимый минимальный размер составляет 10^{-3} см. Так как $N = \pi R^2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot n$, где R – радиус цилиндра элементарного объема; τ – среднее время свободного пробега, то для статистической независимости количества частиц N должно быть не меньше 100. Тогда $\pi R^2 \cdot 10^4 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-5} = 10^2$, т.е. $R \approx 10^{-3}$ см. Кроме того, возможность уменьшения характерных размеров ограничена не только по причине ограниченности компьютерной памяти, но и пределами применимости модели [32], а также ростом погрешностей вычислений. Следовательно, теоретически возможны ситуации, когда для обеспечения выполнения статистических свойств и выбора реальных пространственных

масштабов в элементарном объеме необходимо учитывать градиенты функции распределения. Именно поэтому обычно решается уравнение Больцмана или используется метод молекулярной динамики, хотя проводить расчет по соотношению (2) легче. Уравнение Больцмана получается из первого:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c}_i \dot{\nabla}_r + \mathbf{F}_i \dot{\nabla}_{c_i} \right) f(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} dt = I.$$

Здесь $f(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i, t)$ определена таким образом, что величина $f d\mathbf{r} d\mathbf{c}_i$ равна среднему числу молекул, центры которых в момент времени t лежат в элементе объема в $d\mathbf{r}$ точки \mathbf{r} , а скорости – в интервале $d\mathbf{c}_i$ вблизи скорости \mathbf{c}_i . Для газодинамических задач градиенты наблюдаются вблизи возмущающих поверхностей, при смешении струй различной плотности и т.д. Использующиеся при измерениях приборы имеют конечные размеры и, следовательно, также работают в условиях наличия градиентов. Кроме того, размеры элементарной ячейки должны по порядку величины совпадать с аналогичными величинами для макропараметров, если в качестве цели выбран переход к макроуравнениям, так как вблизи локального равновесия, где применимо уравнение Больцмана, функция распределения определяется макропараметрами [42,43].

Градиент функции распределения в элементарном объеме создает вращение и с ним связано изменение момента количества движения. Обозначив мгновенный угол поворота элементарного объема жидкости через $\boldsymbol{\omega}_i$, получим уравнение $\boldsymbol{\omega}_i dJ_{i_a} = dL$ [44,45], где L – момент количества движения, J_{i_a} – момент инерции элементарного объема. Таким образом, обобщенный импульс следует написать в виде $\mathbf{p}_i = \mathbf{c}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \delta\mathbf{r}_i$, где \mathbf{r}_i , r_{i_a} – геометрический вектор и вектор центра тяжести элементарного объема.

В общем случае уравнение запишем в виде

$$f(t + dt, \mathbf{r} + \mathbf{p}_i dt, \mathbf{p}_i + \mathbf{F}_i dt) d\mathbf{r} d\mathbf{p}_i = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_i, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p}_i + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} dt. \quad (16)$$

Переход к уравнениям Навье-Стокса при такой записи затруднен, поэтому можно поступить следующим образом. Вычислим изменение момента количества движения L в элементарном объеме в произвольной точке (для одночастичной функции распределения). Так как при вращении тела вокруг оси \mathbf{a} с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и моментом инерции \mathbf{J}_a имеем $\mathbf{L} = \mathbf{J}_a \boldsymbol{\omega}$. С другой стороны, в силу равенства $\mathbf{p}_i = \mathbf{c}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{a_i})$.

$$\delta\mathbf{L} = (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \times f(t, \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, \mathbf{c}_i) \cdot \mathbf{c}_i - \mathbf{r} \times f(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}_i) \mathbf{c}_i.$$

Преобразуем формулу следующим образом:

$$\delta\mathbf{L} = m \delta\mathbf{r} \times \left(f + \mathbf{r} \cdot \frac{\delta f}{\delta \mathbf{r}} \right) \cdot \boldsymbol{\xi}.$$

Здесь учтены изменения момента количества движения, связанные как с изменением функции распределения внутри объема, так и с приращением момента в результате перехода в другую точку. Вообще говоря, в интеграле столкновений необходимо учитывать поворот, но им можно пренебречь в силу малости радиуса взаимодействия молекул, но требуется учесть изменение функции распределения при больших скоростях. В случае расчета начального слоя или при быстром изменении силы проделаем аналогичную процедуру разложения в ряд по времени. Тогда появится член $\frac{\partial}{\partial x_j} x_j \frac{\partial}{\partial t}$, так как роль силы выполняет

производная по времени ($\delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_a$). Момент количества движения относительно центра инерции \mathbf{r}_a равен нулю. Главный вклад дают одинаковые индексы, что связано с присутствием стенки и максимальным значением градиента функции по нормали к стенке. Новое уравнение Больцмана запишется следующим образом:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i} \right] + \mathbf{c}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \left[r_{ij} \frac{\partial f}{\partial r_{ij}} \right] - \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}_i} = I. \quad (17)$$

После вычисления моментов имеем уравнение неразрывности с новым слагаемым

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (18)$$

Остальные уравнения (движения, энергии)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho u_i u_j + P_{ij} + x_i \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i} \right) - \frac{X_i}{m} \rho = 0. \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{3}{2} RT + \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho u_j \left(\frac{3}{2} RT + \frac{1}{2} u^2 \right) + u_k P_{kj} + q_j \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x_i} x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho u_j \left(\frac{3}{2} RT + \frac{1}{2} u^2 \right) + u_k P_{kj} + q_j \right] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

К уравнениям (18, 19) добавляется уравнение момента количества движения (20), аналогичное уравнению (1). Обычно уравнение используется только для структурных частиц

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \vec{p}_x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \vec{p}_y + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \vec{p}_z + x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{P}_j) = M_I. \quad (20)$$

Повышение порядка уравнений требует дополнительных граничных условий. Для уравнений пограничного слоя могут задаваться значения трения на поверхности или вертикальной компоненты скорости на внешней границе. Желательно контролировать значение вихря на внешней границе. Отсюда возникают дополнительные требования на постановку эксперимента, так как, несмотря на малые абсолютные значения амплитуд возмущений, вызванных турбулизирующей решеткой, завихренность на внешней границе пограничного слоя конечна и меняется от эксперимента к эксперименту. Газодинамические величины определяются через функцию распределения

$$\begin{aligned} n(t, \vec{x}) = \int f(t, \vec{x}, \vec{\xi}) d\vec{\xi}, \quad \mathbf{u}(t, \vec{x}) = \frac{1}{n} \int \vec{\xi} f(t, \vec{x}, \vec{\xi}) d\vec{\xi}, \\ P_{ij} = m \int c_j c_i f(t, \vec{x}, \vec{\xi}) d\vec{\xi}, \quad q_i = \frac{m}{2} \int c^2 c_i f(t, \vec{x}, \vec{\xi}) d\vec{\xi}. \end{aligned} \quad (21)$$

Важно разрешить парадокс Гильберта, состоящий в том, что при использовании равновесной функции распределения и решения Чепмена – Энскога получаются одни и те же значения макропараметров:

$$\int \varphi(\xi) f^0 d\xi = \int \varphi(\xi) f d\xi = \beta, \quad (22)$$

где β -макропараметр,

$$f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \equiv f_0(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2kT} c^2 \right\}, \quad (c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) = (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u})^2. \quad (23)$$

$$f = f_0 \left[1 + \frac{p_{ij} m}{2pkT} c_i c_j - \frac{q_i m}{pkT} c_i \left(1 - \frac{mc^2}{5kT} \right) \right] \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{df^{(0)}}{dt} \Big|_{t=0} = f^{(0)} & \left\{ \frac{m}{kT} \left(c_i c_j - \frac{1}{3} c^2 \delta_{ij} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2T} \frac{\partial T}{\partial x_i} c_i \left[\left(\frac{m}{kT} \right) c^2 - 5 \right] + \frac{m}{kT} \left(c_i c_j - \frac{1}{3} c^2 \delta_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} x_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

Решение Чепмена-Энскога устроено так, что остается интеграл только от равновесной функции. Уравнение Больцмана (классическое и модифицированное) инвариантно относительно выбора макропараметров равновесной функции распределения: из уравнений Эйлера или уравнений Навье-Стокса. Для согласования порядков аппроксимации, следовательно, требуется брать значения, определяемые уравнениями Навье-Стокса. Структура производной дает структуру слагаемых уравнений С.В. Валландера. Следуя классическому методу, мы должны использовать значения макропараметров из уравнения Эйлера, но они определяются низшим порядком разложения решения уравнения Больцмана. Для согласования порядков аппроксимации в модифицированной теории используются дополнительные слагаемые в уравнениях Навье-Стокса, которые трактуются как воздействие силового поля. Фактически должна делаться дополнительная итерация и получаются макропараметры, определяемые из уравнений Навье-Стокса. Используя разложение (25), при вычислении интеграла столкновений получим

$$\begin{aligned} \tilde{f}' \tilde{f}'_1 - \tilde{f} \tilde{f}'_1 = f' f'_1 + \Delta t & \left\{ \boldsymbol{\xi}' \cdot \frac{\partial f'}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}') \cdot f'_1(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}'_1) + \right. \\ & \left. + f'_1(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}') \boldsymbol{\xi}'_1 \cdot \frac{\partial f'_1}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}'_1) \right\} - f f_1 - \\ - \Delta t & \left\{ \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \cdot f_1(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) + \boldsymbol{\xi}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \right\} + O(\Delta x) \end{aligned} \quad (26)$$

Для жесткого потенциала интеграл столкновений факторизуется. При анализе приходится выбирать среднее время между столкновениями несмотря на индивидуальный характер столкновений для каждой скорости сталкивающихся молекул.

Скольжение и температурный скачок

Для задач обтекания, кроме внешних граничных условий, должны быть поставлены сопряженные граничные условия на поверхности. Метод Чепмена-Энскога решения уравнения Больцмана во внутренних точках течения дает решение, асимптотически сходящееся к решению уравнения Больцмана при числах Кнудсена, стремящихся к нулю. Однако при любом сколь угодно малом числе Кнудсена вблизи границ имеется область, в которой этот ряд не представляет решения уравнения Больцмана [40]. Толщина этой области обычно считается порядка длины свободного пробега λ . Средняя длина пробега не отражает конкретные процессы взаимодействия и обратно пропорциональна относительной скорости столкновений молекул. Следовательно, сечение столкновения молекул может зависеть от

относительной скорости. Как следует из анализа, для каждой скорости молекулы имеется свой характерный масштаб и свой градиент физических величин с большим остаточным членом разложения ряда Тейлора вблизи точки вылета молекул. Обычно устанавливаются граничные условия на твердой стенке, при выполнении которых решение уравнений Навье-Стокса вне кнудсеновского слоя совпало бы с решением уравнения Больцмана с заданными условиями на поверхности. Характер взаимодействия молекул с поверхностью определяет граничное условие для функции распределения на нижней границе кнудсеновского слоя. Примем во внимание, что средняя длина пробега молекул газа существенно больше радиуса взаимодействия молекул. Выберем расстояние границы газа от поверхности порядка нескольких радиусов взаимодействия молекул газа и твердого тела (σ). Включим молекулы поверхности в число молекул ансамбля при построении N -частичной функции распределения. Будем учитывать, что длина свободного пробега молекул газа существенно больше выбранного для расчета радиуса взаимодействия молекул газа и твердого тела. В общем случае в уравнение для двухчастичной функции уравнение принимает вид на расстояниях нескольких σ

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \left\{ \xi_i \cdot \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right] + \xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left[x_j \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \right] - \frac{X_i}{m} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_i} \right\} + \mathbf{X}_{12} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} + \mathbf{X}_{21} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} + X_{22} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} = 0. \quad (27)$$

Представляется возможным искать решение аэродинамических задач для переходных режимов течения, используя решение уравнений Навье-Стокса, определяя граничное условие на внешней границе указанного тонкого слоя через функцию распределения (модифицированное решение Чепмена-Энскога) с последующим решением задачи в слое с учетом выбранной модели твердого тела. На наш взгляд такой подход позволяет проще решить внешнюю задачу обтекания и более полно учесть влияние поверхности. Для проверки метода решалась задача по определению влияния профиля функции распределения аспирантом А.А. Шадриним [46]. Исследовалась влияние несимметричности функции распределения для равновесного случая. С ростом направленной скорости движения на внешней границе тонкого слоя появляется как медленная составляющая, так и высокоэнергетическая. Поэтому возникает блуждание частиц вдоль поверхности для медленной компоненты и внедрение частиц внутрь кристалла для быстрой составляющей (рис.3). Следует отметить возможность теоретического расчета усталостных эффектов идеальной поверхности в обычных условиях. Для этого нужно вычислить с помощью равновесной функции распределения вероятное значение молекул газа с высокой энергией для заданной температуры, предварительно проведя исследование, аналогичное представленному

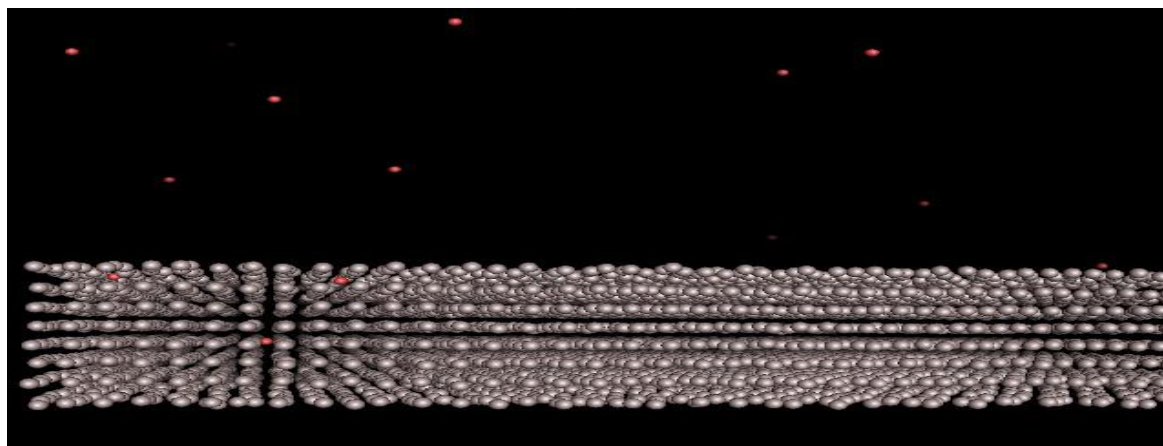


Рис.3. Результат расчета

Расчеты подтвердили отсутствие столкновений газа внутри рассматриваемого слоя.

Примеры использования теории

Для проверки теории исследовались задачи пограничного слоя и простейшие задачи теории упругости. Для пограничного слоя важным полученным результатом являлся факт усиления роли вертикальной компоненты скорости на профиль продольной скорости внутри пограничного слоя при учете в уравнении неразрывности второй производной. Возмущение вертикальной скорости может привести к образованию перегибов профиля продольной скорости, что сказывается на его устойчивости. Дополнительным важным фактором, влияющим на профиль скорости в пограничном слое, является перепад давления по продольному направлению. Для определения взаимодействия перепада давления и дисперсии численно решалась задача Фолкнера-Скан с измененным уравнением неразрывности. Анализируется устойчивость данного течения к малым возмущениям на внешней границе при различных перепадах давления. В силу повышения порядка уравнений для задания граничных условий необходимо задавать дополнительные значения функций на стенке и внешней границе. Сравняется поведение решения при различных значениях трения. Сначала несколько задач теории упругости.

Балки. Рассмотрим элементарный участок стержня длиной dx в состоянии до деформации и в состоянии после его деформации (рис. 4). Выделенного элемента стержня условия равновесия в моментах и в проекциях на ось Уприводят к соотношениям [47]

$$\begin{aligned}dM - Qdx - m dx - Ndv &= 0, \\dQ + qdx &= 0,\end{aligned}$$

или

$$M' - Q - m - Nv' = 0, \quad M' - Q - m - (Nv)' = 0, \quad Q' + q = 0.$$

В классическом варианте отсюда следует

$$-M'' = q - m' - (Nv)''.$$

С учетом момента

$$-M'' = q - m' - ((Nv)')'.$$

В данном варианте решения будут совпадать, но для балки, лежащей на фундаменте, решения отличаются.

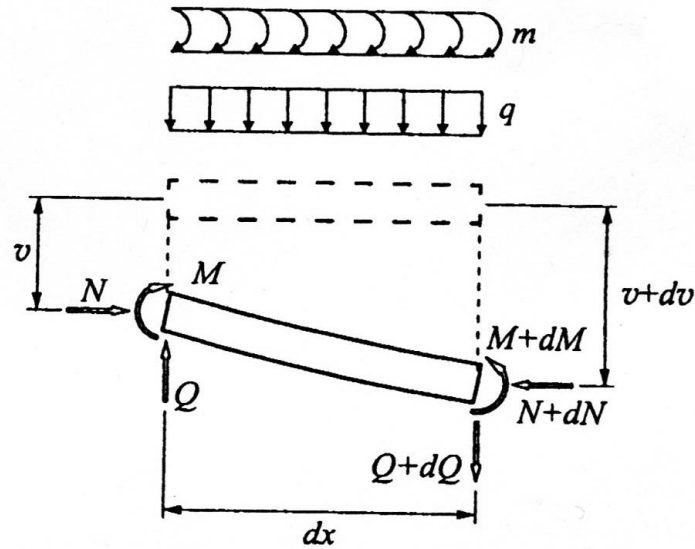


Рис. 4. Элементарный участок стержня

В случае передачи силового воздействия P (рис. 5) на стержень с помощью жесткого рычага длины l , способного поворачиваться вокруг концевых шарниров, имеем $H = \frac{P}{\cos \alpha}$. H – нормальная сила.

На конце деформируемой части стержня поперечная сила $Q = H \sin \alpha = N \operatorname{tg} \alpha$. Поскольку, $\operatorname{tg} \alpha = v(l)/a$

$$EIv'''(l) + N \left[v'(l) + \frac{v(l)}{a} \right] = 0.$$

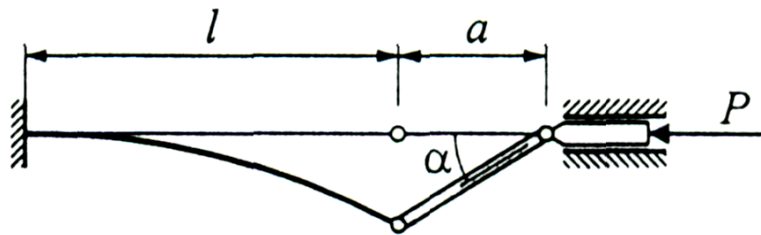


Рис. 5

Поэтому граничное условие

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_4 = 0$$

$$v'(0) = 0 \Rightarrow C_2 + kC_3 = 0$$

$$M(l) = 0 \Rightarrow v''(l) = 0 \Rightarrow C_3 \sin v + C_4 \cos v = 0.$$

$$v'''(l) + k^2 v'(l) + k^2 v(l)/a = 0 \Rightarrow C_1 + C_2(l+a) + C_3 \sin v + C_4 \cos v = 0.$$

Теперь $EIv'''(l) + (Nv)' + \frac{P}{\cos \alpha} \frac{v(l)}{Q} = 0$

Решение этого уравнения отличается от решения классического уравнения и явно появляется дополнительная сила, которая может быть причиной неустойчивости

Проблема Прандтля. Рассмотрим плоскую задачу Прандтля [48]. Рассмотрим условия существования плоского режима деформации балки.

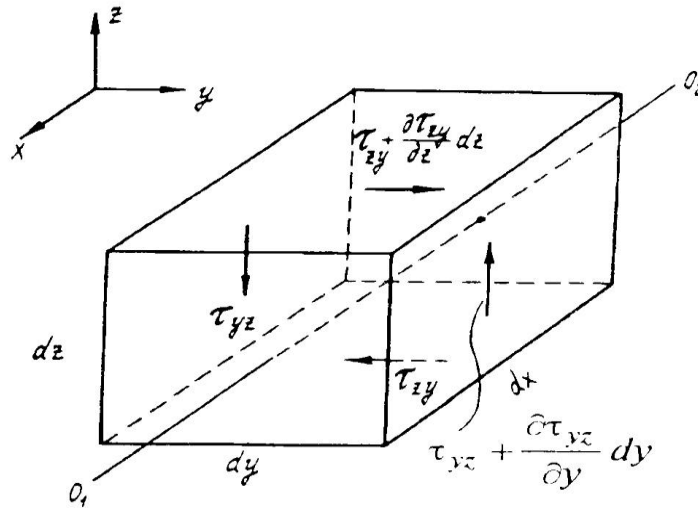


Рис. 6. Элемент объема

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[x \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) - y \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \right) \right] = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0.$$

Откуда

$$\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = k, \tag{28}$$

$$\sigma_{yx} = k_1 y, \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = k - k_1 = k_2, \quad \sigma_{xx} = k_2 x + \varphi(y), \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(x \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) - y k \right\} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + x \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0,$$

$$\partial \sigma_{yy} = f(x), \quad k_2 + k_1 - k = 0.$$

При больших градиентах второе слагаемое существенно. Как и для классической задачи Прандтля имеем решение

$$u = -ax \pm ah \sqrt{1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2} + c_1, \quad v = ay, \quad c_1 = const \tag{29}$$

Влияние момента не прослеживается.

Пограничный слой. Автономные решения

Бесконечная пластина. При рассмотрении течения жидкости около бесконечной пластины, получим

$$\frac{d}{dy} \left(\mu \frac{du}{dy} \right) + \frac{d}{dy} \left(\mu y \frac{d^2 u}{dy^2} \right) = 0.$$

$$u = 0, \quad \mu \frac{du}{dy} = \tau_w, \quad y = 0,$$

$$u = U_\infty, \quad y \rightarrow \infty.$$
(30)

Дополнительное слагаемое выделено отдельно

Интегрирование дает $\mu \frac{du}{dy} + \mu y \frac{d^2 u}{dy^2} = Const = \tau_w$.

Проинтегрируем уравнение один раз:

$$\mu \frac{du}{dy} + \mu y \frac{d^2 u}{dy^2} = const = \tau_w.$$
(31)

Постоянная в силу граничных условий равна $Const = \tau_w$. Интеграл уравнения дается формулой

$$u = C \cdot \ln y + \tau_w / \mu \cdot y + const.$$
(32)

Возможный вариант удовлетворения граничных условий на стенке состоит в том, что при $y = \frac{v}{v_*}$, где $v = \frac{\mu}{\rho}$, $v_* = \left(\frac{\tau_w}{\rho_w} \right)^{1/2}$, $C \cdot \ln y = 0$. Дальнейшее уменьшение скорости происходит до обращения ее в нуль, производная становится очень большой, но нулевые значения скорости на двух границах пристеночного слоя не дают течь в обратном направлении. Толщина "покоящейся" жидкости при числах Рейнольдса $Re = 10^6$ равна 10^{-3} см. Действительно, для воздуха при одной атмосфере при движении пластины со скоростью 300 км/час на расстоянии 0,2 м при общей длине пластины 2 м для $v = 14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $v_* = 1.59 (Re_x \approx 10^6)$. Следует отметить, что такой профиль будет всегда присутствовать внутри пограничного слоя и соответствует инерциальному интервалу (А.Н. Колмогорова). Следует отметить, что асимптотического перехода от решения для полубесконечной пластины к решению для бесконечной пластины нет. Для полубесконечной пластины трение на бесконечности стремится к нулю и при $\tau_w = 0$ можно получить длину смешения Прандтля-Кармана.

Классический вариант соответствует линейному профилю. Отсюда можно сделать заключение, что вязкость должна работать в двух областях: непосредственно вблизи поверхности и на внешней границе. С использованием оценок работы [49-54] частоты спектра здесь должны быть выше частоты развитой турбулентности. В стационарном случае количество диссипируемой энергии вблизи внешней границы будет равно количеству этой же энергии вблизи стенки. Поведение скорости u будет зависеть в основном от вертикальной компоненты скорости и возмущений продольной скорости на внешней границе.

Задача Блазиуса. Модифицированная задача Блазиуса была исследована численно и аналитически. Аналитически [55] эта задача решалась как автомодельная аналогично [56]. Здесь приводится численное решение автомодельного уравнения. Исходная постановка задачи

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (33)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

с граничными условиями

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w, \quad y = 0,$$

$$u = U_\infty, \quad y \rightarrow \infty \quad x > 0; \quad u = U_\infty, \quad x = 0.$$

Автомодельное уравнение $2\eta\psi'''' + 2\psi'' + \psi\psi'' = 0$ с граничными условиями

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0, \quad \psi''(0) = \alpha, \quad \psi'(\infty) = 1.$$

Задача была решена А.Ф. Полянским и результаты представлены на рис. 7. В нашем случае было получено значение 0.348 вместо значения 0.332 в классическом варианте.

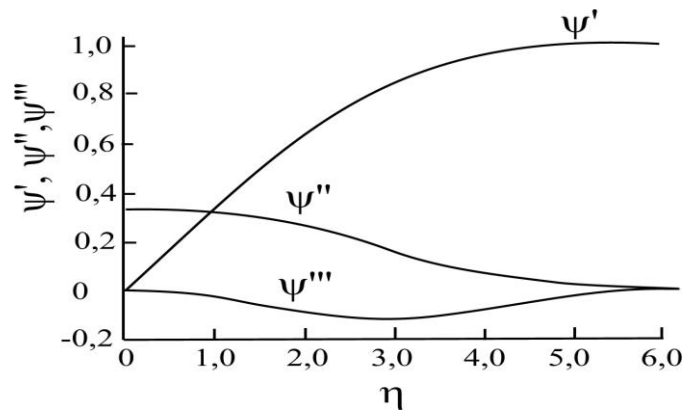


Рис.7. Задача Блазиуса

Влияние дисперсии показано ниже в задаче Фолкнера-Скан. Сравниваются результаты расчётов с учётом и без учёта дисперсии. Задача по-прежнему автомодельна и уравнение имеет вид в переменных (решалась В.А. Кононенко) [57]

$$u = cx^m \phi(\eta), \quad \eta = \sqrt{\frac{c}{\mu}} y x^{(m-1)/2}, \quad v = \sqrt{\mu c} x^{(m-1)/2} V(\eta), \quad v = \mu y,$$

$$\Phi = \psi', \quad (\eta\psi''')' + \psi'' + \frac{m+1}{2} \psi\psi'' = m(\psi'^2 - 1)$$

с краевыми условиями

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0, \quad \psi''(0) = \alpha, \quad \psi'_\infty = 1,$$

$$m = \frac{\beta}{2 - \beta}$$

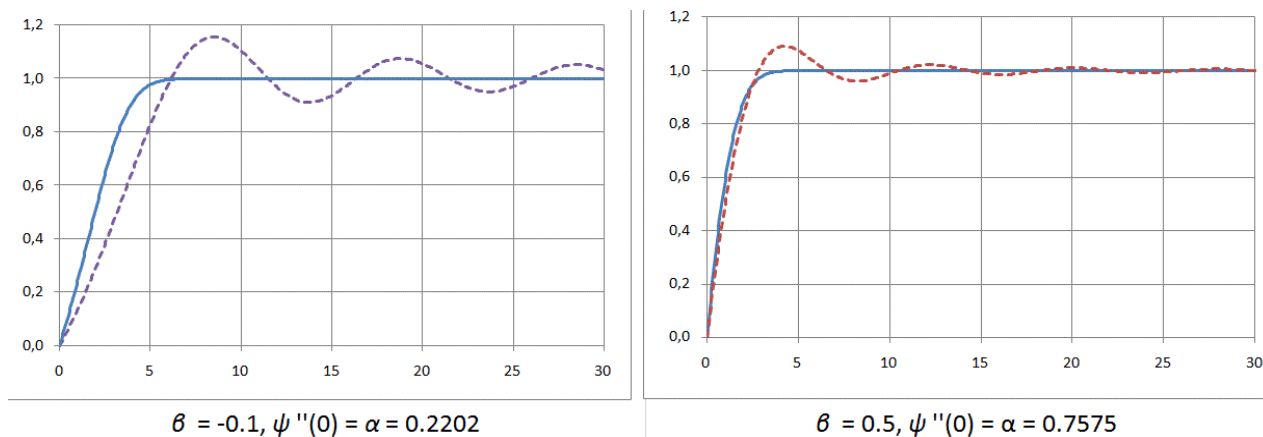


Рис. 8. Результаты расчета задачи Фолкнера-Скан

Пограничный слой. Неавтономные решения

Возмущение вертикальной скорости в пограничном слое может привести к образованию перегибов профиля продольной скорости, что сказывается на его устойчивости. Дополнительным важным фактором, влияющим на профиль скорости в пограничном слое, является перепад давления по продольному направлению. Для определения взаимодействия перепада давления и дисперсии численно в данной работе решается задача Фолкнера-Скан с измененным уравнением неразрывности. В силу повышения порядка уравнений при задании граничных условий необходимо задавать дополнительные значения функций на стенке и внешней границе.

Ниже приведены результаты А. И. Воронковой [58], полученные для полубесконечной пластины.

1. На рис.9-15 для задачи 2-го порядка вычисляются значения v на верхней границе, затем граничное v умножается на d , полученное значение выбирается в качестве v , во 2-е уравнение добавляется член 2-го порядка $(d(y*dv/dy)/dy)$ и решается новая задача с полученным граничным условием наверху

На рисунках:

Горизонтальная ось — переменная y . Вертикальная ось — соответствующая безразмерная функция.

Различные кривые соответствуют слоям, расположенным вдоль пластины.

Параметр трения $\alpha = 0.332$.

$m = 0.05$.

Безразмерный коэффициент изменения граничного условия обозначен через d .

1. $d = 0.9$

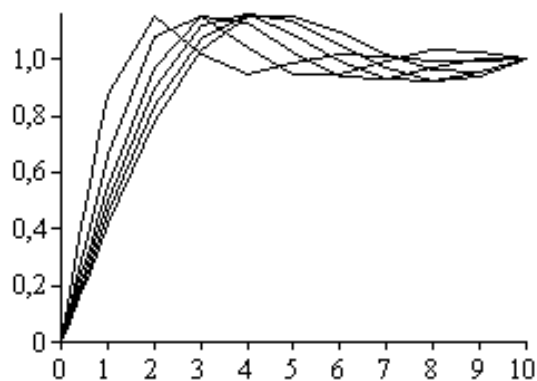


Рис. 9. Общая картина течения.

Расшифровка рис.9

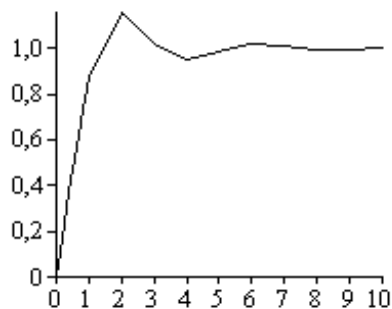


Рис.10, $x = 2$

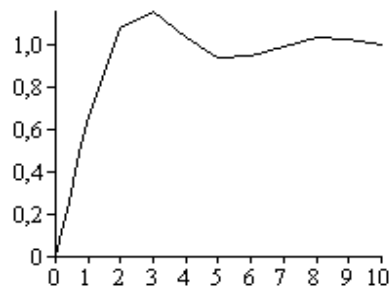


Рис.11, $x = 4$

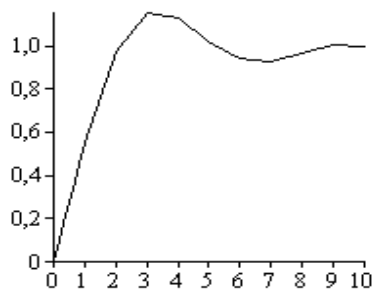


Рис. 12, $x = 6$



Рис.13, $x = 8$

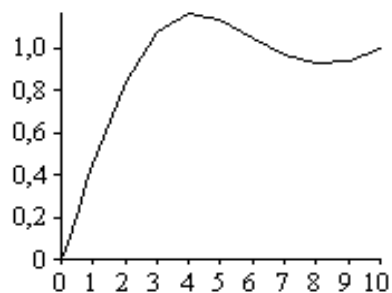


Рис.14, $x = 10$

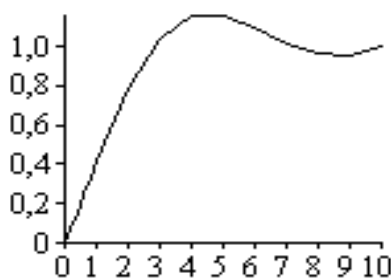


Рис. 15, $x = 12$

Для полубесконечной пластины при изменении трения на стенке сначала по закону для полубесконечной пластины и замене этого значения на постоянную величину, равную последнему значению приведены далее. Рассчитывается переходный слой, классическое уравнение неразрывности, но модифицированное уравнение движения. На рис. 16 показаны безразмерные профили скорости Φ , отношение указанного профиля к профилю Блаузиуса Φ и вертикальная составляющая скорости v для разных параметров задачи. По горизонтальной оси отложена безразмерная вертикальная координата. Остальные результаты можно найти в [55, 59]. Смена условия после 66 слоя. Рассмотрены различные значения трения. Результаты приведены для одного варианта.

Полученные результаты подтверждают важную роль вертикальной компоненты. Положительный градиент давления (ускорение) уменьшает ее влияние. Замедление потока вызывает рост влияния. Увеличение трения на стенке способствует возникновению обратного течения внутри пограничного слоя. Следует отметить слабую зависимость профиля продольной составляющей скорости от диффузионной составляющей (второй производной в уравнении неразрывности) при существенной зависимости от дисперсии (третья производная).

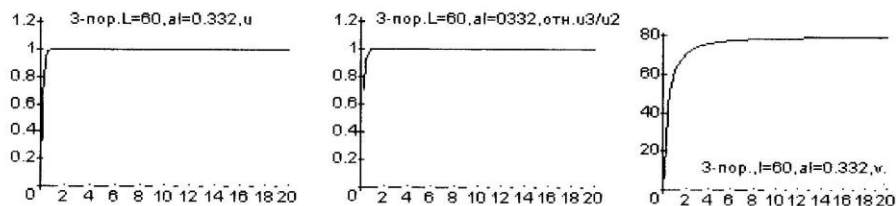
Пограничный слой. Малые времена

Новое уравнение движения и старое уравнение неразрывности при обтекании цилиндра имеют вид

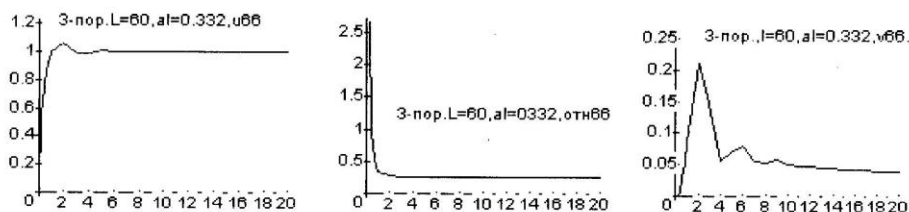
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \tilde{\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \tilde{\nu} = \frac{\mu}{\rho},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

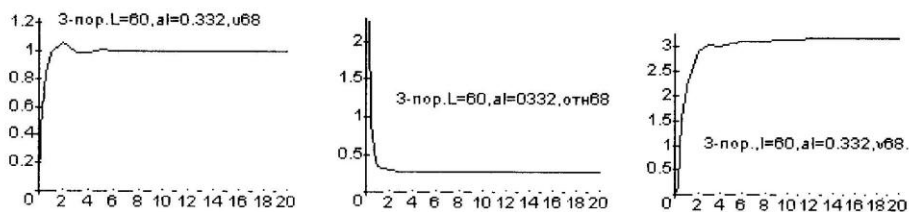
$l = 60$, точность 0.001
 $\alpha=0.332$, смена условия после 66-го слоя
 1-й слой



66-й слой



68-й слой



500-й слой

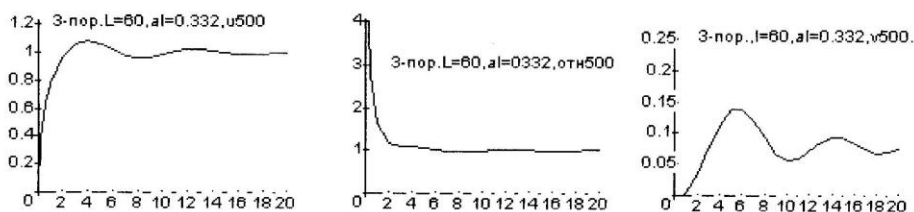


Рис.16. Распределение скоростей внутри пограничного слоя. $L = 60$, $\alpha = 0,332$.

Для малых времен пограничный слой тонок, скорость близка к U_e , μ – динамическая вязкость; ν близко к 0. Воспользуемся теорией малых возмущений. Тогда мы получим в первом приближении необходимость решения следующей задачи

$$\tilde{\nu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \tilde{\nu} \frac{\partial}{\partial y} y \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0. \tag{34}$$

После введения новой функции и новой переменной

$$u_1 = U_e(x) f_1(\eta), \quad \eta = y / 2\sqrt{\tilde{\nu}t}$$

уравнение примет вид

$$f_1'' + \frac{d}{d\eta}(\eta f_1'') + 2\eta f_1' = 0.$$

Для выяснения влияния дисперсии разложим уравнение в ряд около поверхности. Первый член ряда будет иметь вид функции вероятности

$$f_{10} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-y^2} dy. \quad (35)$$

Следовательно, решение принимает классический вид для $\eta < 0.5$.

В общем случае нестационарный оператор в уравнении движения имеет вид $\frac{\partial}{\partial x_j} x_j \frac{\partial}{\partial t}$.

Это следует из факта, что $\frac{\partial u}{\partial t}$ имеет размерность силы. Поэтому система уравнений в нестационарном случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} x_j \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \tilde{v} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \tilde{v} = \frac{\mu}{\rho}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Граничные условия остаются прежними. Вводя новую функцию и новое уравнение

$$u_1 = U_e(x) f_1(\eta), \quad \eta = y/2\sqrt{\tilde{v}t}$$

вместо системы уравнений получим уравнение

$$f_1'' + \frac{d}{d\eta}(\eta f_1'') + 2\eta f_1' + 2 \frac{d}{d\eta}(\eta^2 f_1') = 0. \quad (37)$$

Непосредственно около стенки получается линейный профиль. Дальнейшее исследование связано с численным решением стационарной задачи с модифицированным уравнением неразрывности и определением влияния граничных условий.

Перекрестные потоки через стороны элементарного объема. Предлагаемая задача о структуре фронта ударной волны, выбранная в качестве примера, интересна тем, что момент количества движения в случае однородного потока здесь не работает ($\text{rot } V = 0$). Для прямой ударной волны предложенное уточнение даст в классическом случае [60]

$$\begin{aligned} \rho u = \rho_0 D = a \\ p + \rho u^2 + w = p_0 + \rho_0 D^2 = p_{00}, \quad w = -\mu \frac{du}{dx} \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{\rho_0 D} (S + uw) = h_0 + \frac{D^2}{2} = h_{00} \\ S = -k \frac{dT}{dx}, \quad \frac{p}{\rho} = RT. \end{aligned} \quad (38)$$

Следуя теории С.В. Валландера, оставляя для простоты только самодиффузию, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\rho u}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{\mu \alpha_1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \\ \rho u \frac{du}{dx} + u \frac{d}{dx} \frac{\mu \alpha_1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{dp}{dx} - \frac{d}{dx} \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} &= 0, \\ \rho \frac{d}{dx} c_V T + \left(c_V T - \frac{u^2}{2} \right) \frac{d}{dx} \frac{\mu}{\rho} \alpha \frac{d\rho}{dx} &= \\ = \frac{4}{3} \mu \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{d}{dx} \lambda \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{\mu c_V T}{\rho} \frac{d\rho}{dx} & \end{aligned} \quad (39)$$

Для $\eta = \frac{\rho_0}{\rho}$ получаем

$$\frac{d\eta}{dx} - \frac{D\rho_0}{\mu\alpha_1} \eta + \frac{u\rho_0}{\mu\alpha_1} = 0$$

Для классического случая решение Беккера [60]

$$\frac{1-\eta}{(\eta-\eta_l)^{\eta_l}} = \frac{1-\sqrt{\eta_l}}{(\sqrt{\eta_l}-\eta_l)^{\eta_l}} \exp\left(a \frac{(M^2-1)x}{Ml_0}\right) = A \exp\left(a \frac{(M^2-1)x}{Ml_0}\right) \quad (40)$$

Оценки, выполненные с использованием решения Беккера, показывают совпадение самодиффузионного потока и направленного потока для $M = 1$, $((\mu_0 \alpha_1 d\eta)/\rho_0 dx)/(\rho_0 D_0) \approx 1$. Присутствующие всегда в экспериментах малые возмущения должны приводить к размазыванию ударной волны и отвечают, по нашему мнению, за возникновение неустойчивости.

Заключение

Обсуждаются проблемы, которые могут появиться при рассмотрении вклада момента количества движения и перекрестных эффектов для простейших задач механики сплошной среды. Устанавливается несимметричность тензора деформаций. Разрешается парадокс Гильберта. Предлагается новая методика расчета задачи обтекания для переходного режима течения. Устанавливаются причины сохранения логарифмического профиля скорости в пограничном слое. Приводятся примеры действия момента количества движения и перекрестных эффектов.

Автор благодарит участников семинара «физико-химическая кинетика в газовой динамике» МГУ за сделанные замечания.

Литература

1. Жилин П.А. Теоретическая механика. С.Петербург. Из-во СПбГПУ. 2003.
2. Алексеев Б. В. Математическая кинетика реагирующих газов. М.: Наука. 1982. 420 с.
3. Martini A, Rojin F., Snurr R.Q., Wang Q., Lichter S.. Molecular mechanisms of liquid slip. J.FluidMech.(2008), vol. 600, pp.257-269.
4. Валландер С.В. Уравнения движения вязкого газа. Доклады АН СССР, 1951, т. 78(1), с. 25-27.
5. Валландер С.В., Еловских М.П.. Теоретическая зависимость коэффициентов теплопроводности газов от температуры. Доклады АН СССР, 1951, т. 79(1).С. 37-40.
6. Bubnov V.A. Convective Heat and Mass Transfer in an Insulated Trailing Swirl. Begell House Inc. Publishers, New-York, 1998.

7. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир.2007 352с.
8. Шеретов Ю.В. Уравнения гидродинамики и пробразованияОалилея.. Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской государственный университет. 2003 . С. 187-198
9. Овсянников В.М.. Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике. М.: Спутник. N. 15, 2006; N16, 2007; N17,2008; N18, 2009.
10. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа./ – М.: Наука.1970. 904с.
11. Турбулентность. Принципы и применения. Ред. Фрост У., Моулден Т. М.: Мир, 1980, 535с.
12. Новожилов В.В. Теория плоского турбулентного течения в несжимаемой жидкости./Ленинград: Судостроение, 1977, 164с.
13. Фриш У. Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова. – М.: Физматлит, 1998. 343с.
14. Липанов А.М., Кисаров Ю.Ф., Ключников И.Г. Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков. – Екатеринбург: РАУО УрО РАН, 2001, 161с.
15. Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Четчин В.М. Турбулентность. Новые подходы. – М.: Наука, 2003, 286с.
16. Кокшинская Н.С. О системе уравнений для описания течений вязкой жидкости и газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса./ Математические модели естествознания. – М: Изд-во МГУ, 1994, с.60-65.
17. Методы расчета турбулентных течений. Пер. с англ. / Под.ред. Кольмана. – М.: Мир, 1984, 464с.
18. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Мир, 1974, 712 с.
19. Кочин Н. Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть 2./ – М.: физ-мат. 1963, 728 с.
20. Смольяков А.В. Шум турбулентных потоков. ЦНИИ им. А.Н. Крылова Санкт-Петербург. 2005. 312с.
21. Занин Б.Ю.О параметрах волн неустойчивости в пограничном слое. Инженерно-физический журнал.-1987.-т.53, N. 4. с 624-629
22. Уиллис Д. Теоретические решения некоторых проблем почти свободно-молекулярного течения. В сб. «Газодинамика разреженных газов», ИЛ, М.: 1963, стр. 385-400.
23. Паттерсон Г.Н. Молекулярное течение газов. М.: Физматгиз.1960
24. Рыжов Ю. А. Динамика разреженных газов и молекулярная газовая динамика. М.: Наука 1988
25. Взаимодействие газов с поверхностями. Сборник ст. под ред. Баранцева Р.Г. М.: Мир 1965, 228с.
26. Баранцев Р.Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука. 1975. 334с.
27. Гудман Ф, Вахман Г. Динамика рассеяния газа поверхностью.М.: Мир. 1980.423с.
28. Пярнпуу А.А.. Взаимодействие молекул газа с поверхностями. М.:ВЦАН СССР. 1974
29. IvanovaE.A.,KrivtsovA.M., MorozovN.F..Derivation of macroscopic relations of the elasticity of complex crystal lattices taking into account the moment interactions at the microlevel. Journal of Applied Mathematics and Mechanics.2007 R.71 N4. pp. 543-561.
30. МелькерА.И.. Динамика конденсированных сред. С. Петербург. Санкт-Петербургская Академия Наук по проблемам прочности. 2004, 236с
31. Черемисин Ф.Г.. Решение кинетического уравнения Больцмана для высокоскоростных течений. ЖВМ и МФ. 2006т.46,N2.С.329-343
32. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. – М.: МАКСПресс, 2004, 332с.
33. Prozorova E. V. Influence of the dispersion on boundary conditions for gas mechanics. // 12th International on new approaches to high-tech. Nano-Design, Technology, Computer Simulations (NDTCS'08) Minsk, Belarus. 2008 pp. 174-177
34. Prozorova E.V. Influence of the dispersion in nonequilibrium models for continuos mechanics. Proceedings of XXXVIII Summer School "Advanced Problems in Mechanics", Spb. 2010, pp. 568-574
35. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения. В кн. Разрушение. Ред. Г. Либовиц. М.: Мир, 1975. с.83-204

36. Ильюшин А.А. Несимметрия тензоров деформаций и напряжений в механике сплошной среды. Вест. Моск. Ун-та. Сер.1, Математика. Механика. 1996.
37. Прозорова Э.В. Влияние дисперсии в задачах аэрогидродинамики. // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. Том 5, URL <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2007-05-16-001.pdf>
38. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. – М.: Гостехиздат. 1946, 146 с.
39. Гуров К.П.. Основания кинетической теории. – М.: Наука, 1966. 350 с.
40. Коган М. Н.. Динамика разреженного газа. – М.: Наука. 1967, 440 с.
41. Климонтович Ю.Л. Кинетическая теория неидеального газа и плазмы. М.: Наука. 352 с.
42. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. – М.: Мир, 1976, 554 с.
43. Cercignani C., *Mathematical methods in kinetic theory* Macmillan. 1969.
44. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Наука, 1965, 204 с.
45. Гантмахер Ф.Р.. Лекции по аналитической механике. – М.: Физматлит. 1960, 295 с.
46. Прозорова Э.В., Шадрин А. В. Влияние профиля функции распределения на взаимодействие газа с поверхностью. Материалы IX-й международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях. (NPNJ-2012). М.: МАИ, 2012 с. 252-253.
47. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. - Том.1. М.: Склад Софт. 2009
48. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003, 702 с.
49. Elsinga G.E., Adrian R.J., Van Oudhensden B. W. and Scarano F.. Three-dimensional vortex organization in a high-Reynolds-number supersonic turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* (2010), vol.644, pp. 35-60
50. Priezjev N.V. & Trouan M.. Influence of periodic wall Roughness on slip behaviour at liquid/solid interfaces: molecular-scale simulations versus continuum predictions. *J. Fluid.Mech.* (2006), vol. 554, pp. 25-47
51. Kameda Yukio, Junga Yoshino, Takashi Ishihara Takashi. Examination of Kolmogorov's 4/5 Law by High-Resolution Direct Numerical Simulation Data of Turbulence. *Journal of the Physical Society of Japan*. Vol. 77, No. 6, 2008, 064401
52. Natrajan V.K., WU Y., Christensen K.T. Spatial signatures of retrograde spanwise vortices in wall turbulence. *J. Fluid Mech.* (2007), vol.574, pp. 155-167
53. Guala Michele, Liberzon Alexande, Tsinober Arkady, Kinzelbach Woegang. An experimental investigation on Lagrangian correlations of small-scale turbulence at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* (2007), vol.574, pp. 405-
54. Elsinga G.E., Adrian R.J., Oudhensden B. W. Van and Scarano F. Three-dimensional vortex organization in a high-Reynolds-number supersonic turbulent boundary layer. *J. FluidMech.* (2010), vol.644, pp. 35-60
55. Прозорова Э.В. Математическое моделирование процессов механики с большими градиентами. - СПб.: Изд. С.-Петербург. Ун.-та, 2005
56. Кочин Н.Е., Кибель И. А., Розе Н.В.. Теоретическая гидромеханика. Часть 2./ – М.: физ-мат. 1963, 728 с.
57. Полянский А.Ф., Прозорова Э.В.. О влиянии дисперсии в механике сплошной среды. Всероссийский семинар по аэродинамике, посвященный 90-летию со дня рождения С.В. Валладера. Тезисы докладов. С.Петербург.с. 108
58. Воронкова А.И, Прозорова Э.В. Влияние дисперсии на распространение возмущений в некоторых задачах механики. / Математическое моделирование. 2006. N.10. с. 3-9
59. Прозорова Э.В. Влияние дисперсионных эффектов в задачах аэродинамики. Математическое моделирование. N 6. 2005. с. 13-20
60. Becker R. Stosswelle und Detonation, *Zeitschr.furPhys.* N 8. Pp. 321-322

Статья поступила в редакцию 18 июня 2012 г.