

УДК 533.21

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СВЕРХЗВУКОВЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ

**А.М. Молчанов**

*Московский авиационный институт (государственный технический университет)*  
[alexmol\\_2000@mail.ru](mailto:alexmol_2000@mail.ru)

### Аннотация

Разработана численная схема для расчета сверхзвуковых турбулентных течений в постановке полной системы уравнений Навье-Стокса (Рейнольдса). При представлении конвективных потоков использовалось расщепление Steger-Warming 1-го порядка аппроксимации. Для решения системы использовался метод Гаусса-Зейделя с линейной релаксацией, предложенный МакКормаком. Проведено расчетное исследование неизобарических струй в широком диапазоне изменения значений числа Маха на срезе сопла (от 0 до 4).

### NUMERICAL METHOD FOR SUPERSONIC TURBULENT JETS

Numerical method for supersonic turbulent flows based on Navier-Stokes (Reynolds) full equation system has been developed. Steger-Warming flux vector splitting was used. Gauss-Seidel Line Relaxation (GSLR) method suggested by MacCormack was used to solve the system. Simulation of non-isobar jets in the wide range of Mach number (from 0 to 4) at the nozzle exit was carried out.

## 1 Введение

Расчету сверхзвуковых турбулентных струй посвящено немало работ (см. например, [1-3],[14],[15]). В большинстве работ используются параболизированные уравнения Навье-Стокса, либо используются стандартные программные комплексы.

В предыдущей работе автора [4] было проведено численное исследование турбулентных сверхзвуковых струй с использованием модели турбулентности, учитывающей влияние сжимаемости. Предложенная модель турбулентности позволила получить удовлетворительное совпадение результатов расчета и экспериментальных данных в широком диапазоне значений числа Маха.

В качестве средства расчета использовался программный комплекс ANSYS CFX.

Применение этого комплекса и других подобных средств CFD (FLUENT, FlowVision, Star-CD и т.п.) очень удобно для проведения расчетов более-менее стандартизированных задач, но порождает ряд проблем.

Это организационные проблемы (необходимость приобретения дорогостоящих лицензий), а также методические проблемы (сложности учета физических процессов, не предусмотренных в основной программе).

Целью данной работы является разработка численной схемы для расчета сверхзвуковых течений. Схема является неявной и безусловно устойчивой.

На основе этой схемы автором создана собственная компьютерная программа, апробированная на расчете сверхзвуковых турбулентных струй.

При разработке численного метода использовались идеи, изложенные в работах [5-8].

## 2 Система уравнений

Двумерное течение идеального газа в декартовой и цилиндрической системе координат описывается следующей системой уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\omega}{y} H = 0 \quad (2.1)$$

где

$\omega = 0$  в случае плоского течения в декартовой системе координат  $(x, y)$ ,  $\omega = 1$  в случае осесимметричного течения в цилиндрической системе координат  $(x, y)$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{yx} \\ \rho uH + q_x - u\tau_{xx} - v\tau_{yx} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho vH + q_y - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{yx} \\ \rho v^2 - \tau_{yy} + \tau_{\theta\theta} \\ \rho vH + q_y - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2\mu}{3} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\omega}{y} v \right), \\ \tau_{yy} &= \frac{2\mu}{3} \left( -\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\omega}{y} v \right), & q_x &= -\frac{\mu C_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & q_y &= -\frac{\mu C_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \\ \tau_{\theta\theta} &= \frac{2}{3} \mu \left( -\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\omega}{y} v - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\rho$  - плотность,  $u$  и  $v$  - компоненты скорости,  $E$  - полная внутренняя энергия,  $p$  - статическое давление,  $T$  - температура,  $\mu$  - эффективный коэффициент динамической вязкости,  $Pr$  - эффективное число Прандтля,  $C_p$  - удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Удельная внутренняя энергия  $e$  связана с полной соотношением:

$$e = E - \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (2.5)$$

Для идеального газа:

$$p = (\gamma - 1) e \rho, \quad (2.6)$$

где  $\gamma$  - показатель адиабаты.

### 3 Модель турбулентности

Эффективный коэффициент вязкости  $\mu$  складывается из двух частей:

$$\mu = \mu_{mol} + \mu_T \quad (3.1)$$

где  $\mu_{mol}$  - коэффициент молекулярной вязкости,  $\mu_T$  - коэффициент турбулентной вязкости.

Для расчета  $\mu_T$  использовалась модифицированная к-ε модель, учитывающая влияние высокоскоростной сжимаемости на интенсивность турбулентного смешения [4].

Общий вид уравнений этой модели:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\omega}{y} H = S, \quad (3.2)$$

где

$$U = \begin{bmatrix} \rho k \\ \rho \varepsilon \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u k - j_{Kx} \\ \rho u \varepsilon - j_{\varepsilon x} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v k - j_{Ky} \\ \rho v \varepsilon - j_{\varepsilon y} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \rho v k - j_{Ky} \\ \rho v \varepsilon - j_{\varepsilon y} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Диффузионные потоки  $K$  и  $\varepsilon$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned} j_{Kx} &= \frac{\mu}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x}; & j_{\varepsilon x} &= \frac{\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}; \\ j_{Ky} &= \frac{\mu}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial y}; & j_{\varepsilon y} &= \frac{\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Источник в правой части (3.2) в работе [4] определяется как

$$S = \begin{bmatrix} P_K - (1 + C_M M_T) \rho \varepsilon \\ C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} P_K - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{K} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

где

$$P_K = \mu \left[ 2 \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \omega \left( \frac{v}{y} \right)^2 \right\} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] - \quad (3.7)$$

производство турбулентной энергии,

$$M_T = \sqrt{2k} / a \quad (3.8)$$

турбулентное число Маха,  $a$  – местная скорость звука

Коэффициент турбулентной вязкости рассчитывается по формуле:

$$\mu_t = C_\mu \frac{\rho k^2}{\varepsilon (1 + C_M M_T)} \quad (3.9)$$

В работе использовались следующие значения констант:

$$\begin{aligned} C_{\varepsilon 1} &= 1.44; & C_{\varepsilon 2} &= 1.92; \\ C_\mu &= 0.09; & C_M &= 0.29; \\ \sigma_K &= 1.0; & \sigma_\varepsilon &= 1.3 \end{aligned} \quad (3.10)$$

#### 4 Преобразование координат

Для лучшего охвата области течения используем новую систему координат

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x), \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для струй это позволяет расширяющуюся по оси  $x$  область свести к прямоугольной расчетной области в системе  $(\xi, \eta)$ .

В новой системе координат основное уравнение (2.1) имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \eta} + \frac{\omega}{y} \bar{H} = 0, \quad (4.2)$$

где

$$\bar{F} = \frac{1}{\eta_y} F, \quad \bar{G} = \frac{1}{\xi_x} G + \frac{\eta_x}{\eta_y \xi_x} F, \quad (4.3)$$

$$\bar{U} = UJ, \quad \bar{H} = HJ, \quad (4.4)$$

$$J = \det \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right) = x_\xi y_\eta = \frac{1}{\eta_y \xi_x} \quad (4.5)$$

якобиан матрицы преобразования,

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (4.6)$$

### 5 Конечно-объемная аппроксимация

Уравнение (4.2) можно аппроксимировать в прямоугольном контрольном объеме  $(\Delta\xi, \Delta\eta)$  вокруг точки  $(i, j)$  следующим образом (см. рис.1, здесь ip – integration points – точки интегрирования):

$$\frac{\bar{U}_{i,j}^{n+1} - \bar{U}_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{\bar{F}_{i+1/2,j} - \bar{F}_{i-1/2,j}}{\Delta\xi} + \frac{\bar{G}_{i,j+1/2} - \bar{G}_{i,j-1/2}}{\Delta\eta} + \frac{\omega}{y} \bar{H}_{i,j} = 0, \quad (5.1)$$

где

$$\bar{F} = \alpha \bar{F}^{n+1} + (1 - \alpha) \bar{F}^n, \quad \bar{G} = \alpha \bar{G}^{n+1} + (1 - \alpha) \bar{G}^n, \quad \bar{H} = \alpha \bar{H}^{n+1} + (1 - \alpha) \bar{H}^n, \quad (5.2)$$

Здесь верхние индексы означают номера шага по времени; по известным значениям искомой функции на  $n$ -ом шаге с помощью (5.1) определяются неизвестные значения на  $(n + 1)$ -ом шаге.

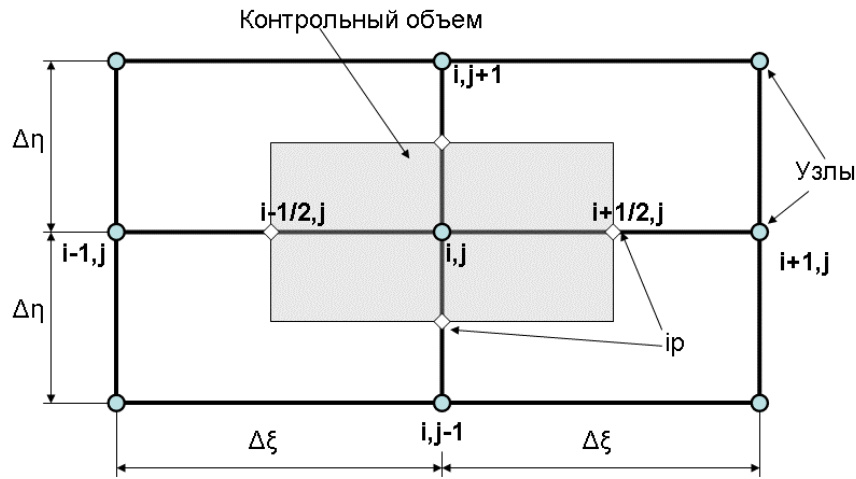


Рис.1. Контрольный объем

Из соображений безусловной устойчивости схемы числовой коэффициент

$$\alpha \geq 0.5 \quad (5.3)$$

Вектора потока целесообразно разделить на две части: конвективную и вязкую

$$\bar{F} = \bar{F}_C + \bar{F}_V, \quad \bar{G} = \bar{G}_C + \bar{G}_V, \quad \bar{H} = \bar{H}_C + \bar{H}_V \quad (5.4)$$

Линеаризуем конвективные потоки на  $(n + 1)$ -ом шаге по времени

$$\bar{F}_C^{n+1} = \bar{F}_C^n + \left( \frac{\partial \bar{F}_C}{\partial \bar{U}} \right)^n (\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^n) = \bar{F}_C^n + A^n \delta \bar{U}^{n+1}, \quad (5.5)$$

$$\bar{G}_C^{n+1} = \bar{G}_C^n + B^n \delta \bar{U}^{n+1}, \quad (5.6)$$

$$\bar{H}_C^{n+1} = \bar{H}_C^n + C^n \delta \bar{U}^{n+1} \quad (5.7)$$

где

$$A^n = \left( \frac{\partial \overline{F}_C}{\partial \overline{U}} \right)^n, \quad B^n = \left( \frac{\partial \overline{G}_C}{\partial \overline{U}} \right)^n, \quad C^n = \left( \frac{\partial \overline{H}_C}{\partial \overline{U}} \right)^n \quad (5.8)$$

Тогда формулы (5.2) для конвекции представляются в виде

$$\begin{aligned} \overline{F}_C &= \overline{F}_C^n + \alpha A^n \delta \overline{U}^{n+1}, \\ \overline{G}_C &= \overline{G}_C^n + \alpha B^n \delta \overline{U}^{n+1}, \\ \overline{H}_C &= \overline{H}_C^n + \alpha C^n \delta \overline{U}^{n+1} \end{aligned} \quad (5.9)$$

## 6 Расщепление конвективных потоков

Для более реалистичного отражения физики основных уравнений используется расщепление конвективных потоков (метод Steger-Warming [6]). Этот метод позволяет учитывать направление распространения информации в потоке.

Матрицы Якоби  $A = \frac{\partial \overline{F}_C}{\partial \overline{U}}$  и  $B = \frac{\partial \overline{G}_C}{\partial \overline{U}}$  с помощью преобразований подобия можно представить в виде

$$A = (S_\xi)^{-1} \Lambda_A S_\xi, \quad (6.1)$$

$$B = (S_\eta)^{-1} \Lambda_B S_\eta, \quad (6.2)$$

где  $\Lambda_A$  и  $\Lambda_B$  диагональные матрицы, состоящие из собственных значений соответствующих матриц  $A$  и  $B$

$$\Lambda_A = \begin{pmatrix} q_\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_\xi + a\xi_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_\xi - a\xi_x \end{pmatrix} = \xi_x \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u+a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u-a \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

$$\Lambda_B = \begin{pmatrix} q_\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_\eta + g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_\eta - g \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

$$g = a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}, \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} q_\xi &= \xi_x u, \\ q_\eta &= \eta_x u + \eta_y v \end{aligned} \quad (6.6)$$

В общем случае диагональные матрицы (6.3) и (6.4) имеют как положительные, так и отрицательные значения. Их знак определяет направление распространения информации в

потоке. Пусть  $\Lambda_{A+}, \Lambda_{A-}$  - диагональные матрицы, которые содержат положительные и отрицательные элементы матрицы  $\Lambda_A$  соответственно.

В [6] показано, что

$$\overline{F_C} = A\overline{U} \tag{6.7}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Lambda_A &= \Lambda_{A+} + \Lambda_{A-}, \quad A_+ = (S_\xi)^{-1} \Lambda_{A+} S_\xi, \quad A_- = (S_\xi)^{-1} \Lambda_{A-} S_\xi, \\ A &= A_+ + A_-, \\ \overline{F_C} &= A_+ \overline{U} + A_- \overline{U} \end{aligned} \tag{6.8}$$

где  $A_+ U$  - часть потока, идущего в точку интегрирования слева направо,

$A_- U$  - часть потока, идущего в точку интегрирования справа налево (см.рис.2)

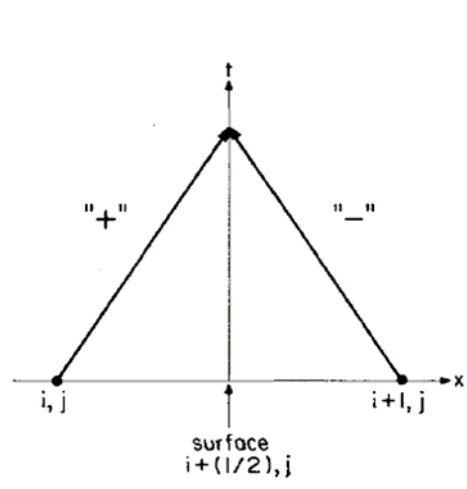


Рис.2

С учетом направления потока на поверхности, разделяющей объемы  $(i, j)$  и  $(i + 1, j)$ , получаем:

$$\overline{F_{C_{i+1/2,j}}} = A_+ \overline{U}_L + A_- \overline{U}_R \tag{6.9}$$

Аналогично:

$$\overline{G_{C_{i,j+1/2}}} = B_+ \overline{U}_S + B_- \overline{U}_N, \tag{6.10}$$

где  $B_+ \overline{U}_S$  - поток, идущий снизу,  $B_- \overline{U}_N$  - поток, идущий сверху.

Обычный метод Steger-Warming [6] имеет первый порядок аппроксимации. В этом случае

$$\begin{aligned} \overline{U}_L &= \overline{U}_{i,j}, & \overline{U}_S &= \overline{U}_{i,j}, \\ \overline{U}_R &= \overline{U}_{i+1,j}, & \overline{U}_N &= \overline{U}_{i,j+1} \end{aligned} \tag{6.11}$$

## 7 Представление вязких потоков

Используется подход, предложенный в работе [8].

Вязкие потоки зависят, как от самой функции  $\overline{U}$ , так и от ее производных:

$$\overline{F}_V = \overline{F}_V \left( \overline{U}, \frac{\partial \overline{U}}{\partial \xi}, \frac{\partial \overline{U}}{\partial \eta} \right) = \overline{F}_V (\overline{U}, \overline{U}_\xi, \overline{U}_\eta); \quad \overline{G}_V = \overline{G}_V (\overline{U}, \overline{U}_\xi, \overline{U}_\eta) \quad (7.1)$$

Введем обозначения:

$$K = \frac{\partial \overline{F}_V}{\partial \overline{U}}; \quad L = \frac{\partial \overline{F}_V}{\partial \overline{U}_\xi}; \quad N = \frac{\partial \overline{G}_V}{\partial \overline{U}_\eta}; \quad M = \frac{\partial \overline{H}_V}{\partial \overline{U}_\eta} \quad (7.2)$$

Вязкие потоки на  $(n+1)$ -ом слое можно выразить в виде

$$\begin{aligned} (\overline{F}_V)^{n+1} &= (\overline{F}_V)^n + K^n \delta \overline{U}^{n+1} + L^n \delta \overline{U}_\xi^{n+1} + \left( \frac{\partial \overline{F}_V}{\partial \overline{U}_\eta} \right)^n \delta \overline{U}_\eta^{n+1}; \\ (\overline{G}_V)^{n+1} &= (\overline{G}_V)^n + \left( \frac{\partial \overline{G}_V}{\partial \overline{U}} \right)^n \delta \overline{U}^{n+1} + \left( \frac{\partial \overline{G}_V}{\partial \overline{U}_\xi} \right)^n \delta \overline{U}_\xi^{n+1} + N^n \delta \overline{U}_\eta^{n+1} \end{aligned} \quad (7.3)$$

В [8] предполагается, что в смешанные производные невелики, и их влиянием на устойчивость в неявной части схемы можно пренебречь. Тогда вязкие потоки на  $(n+1)$ -ом слое можно выразить в виде

$$\begin{aligned} \overline{F}_V^{n+1} &= (\overline{F}_V)^n + K^n \delta \overline{U}^{n+1} + L^n \delta \overline{U}_\xi^{n+1} = \\ &= (\overline{F}_V)^n + (K^n - L_\xi^n) \delta \overline{U}^{n+1} + \frac{\partial}{\partial \xi} (L^n \delta \overline{U}^{n+1}) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Здесь предполагается локальная постоянность коэффициента вязкости, т.е. можно принять  $(K^n - L_\xi^n) \approx 0$

Таким образом,

$$\overline{F}_V^{n+1} = \overline{F}_V^n + \frac{\partial}{\partial \xi} (L^n \delta \overline{U}^{n+1}) \quad (7.5)$$

$$\overline{G}_V^{n+1} = \overline{G}_V^n + \frac{\partial}{\partial \eta} (N^n \delta \overline{U}^{n+1}) \quad (7.6)$$

$$\overline{H}_V^{n+1} = \overline{H}_V^n + \frac{\partial}{\partial \eta} (M^n \delta \overline{U}^{n+1}) \quad (7.7)$$

Формулы для матриц  $L$ ,  $N$  и  $M$  легко получаются из определения вязких потоков (2.4).

Например, матрица  $L$  имеет вид:

$$L = \frac{\partial \overline{F}_V}{\partial \overline{U}_\xi} = \frac{\partial \overline{F}_V}{\partial V_\xi} \frac{\partial V_\xi}{\partial \overline{U}_\xi} = \frac{1}{J} M_\xi \frac{\partial V}{\partial \overline{U}}, \quad (7.8)$$

где



$$M_{\xi} = -\frac{\mu_{\xi x}}{\eta_y} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}u & v & \frac{\gamma}{Pr} \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 2\alpha - E & -\frac{u}{\rho} & -\frac{v}{\rho} & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

## 8 Окончательный вид системы уравнений конечно-объемной аппроксимации

Подставляем полученные соотношения для конвективных и вязких потоков (5.9), (6.9), (6.10), (7.5)-(7.7) в аппроксимирующее уравнение (5.1) и получаем:

$$\mathbf{A}_{i,j} \delta \bar{U}_{i,j}^{n+1} + \mathbf{B}_{i,j} \delta \bar{U}_{i,j+1}^{n+1} + \mathbf{C}_{i,j} \delta \bar{U}_{i,j-1}^{n+1} + \mathbf{D}_{i,j} \delta \bar{U}_{i+1,j}^{n+1} + \mathbf{E}_{i,j} \delta \bar{U}_{i-1,j}^{n+1} = \Delta \bar{U}_{i,j}^n \quad (8.1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i,j} &= I + \\ &\alpha \Delta t \left( \frac{(A_+)^n_{i+1/2,j} - (A_-)^n_{i-1/2,j}}{\Delta \xi} + \frac{(B_+)^n_{i,j+1/2} - (B_-)^n_{i,j-1/2}}{\Delta \eta} + \frac{\omega}{y} C^n - \frac{2}{\Delta \xi^2} L^n_{i,j} - \frac{2}{\Delta \eta^2} N^n_{i,j} \right), \\ \mathbf{B}_{i,j} &= \frac{\alpha \Delta t}{\Delta \eta} \left( (B_-)^n_{i,j+1/2} + \frac{1}{\Delta \eta} N^n_{i,j+1} + \frac{\omega}{2y} M^n_{i,j+1} \right), \\ \mathbf{C}_{i,j} &= \frac{\alpha \Delta t}{\Delta \eta} \left( -(B_+)^n_{i,j-1/2} + \frac{1}{\Delta \eta} N^n_{i,j-1} - \frac{\omega}{2y} M^n_{i,j-1} \right), \\ \mathbf{D}_{i,j} &= \frac{\alpha \Delta t}{\Delta \xi} \left( (A_-)^n_{i+1/2,j} + \frac{1}{\Delta \xi} L^n_{i+1,j} \right), \quad \mathbf{E}_{i,j} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta \xi} \left( -(A_+)^n_{i-1/2,j} + \frac{1}{\Delta \xi} L^n_{i-1,j} \right), \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{U}_{i,j}^n = & -\Delta t \left[ \frac{\bar{F}_{C_{i+1/2,j}}^n - \bar{F}_{C_{i-1/2,j}}^n}{\Delta \xi} + \frac{\bar{F}_{V_{i+1/2,j}}^n - \bar{F}_{V_{i-1/2,j}}^n}{\Delta \xi} \right] \\ & -\Delta t \left[ \frac{\bar{G}_{C_{i,j+1/2}}^n - \bar{G}_{C_{i,j-1/2}}^n}{\Delta \eta} + \frac{\bar{G}_{V_{i,j+1/2}}^n - \bar{G}_{V_{i,j-1/2}}^n}{\Delta \eta} \right], \quad (8.3) \\ & -\Delta t \frac{\omega}{y} \left( \bar{H}_{C_{i,j}}^n + \bar{H}_{V_{i,j}}^n \right) \end{aligned}$$

$I$  - единичная матрица.

При представлении конвективных потоков используется первый порядок аппроксимации (6.11).

Значения векторов  $\bar{F}_{C_{i+1/2,j}}^n$ ,  $\bar{F}_{C_{i-1/2,j}}^n$ ,  $\bar{G}_{C_{i,j+1/2}}^n$ ,  $\bar{G}_{C_{i,j-1/2}}^n$  в явной части вычисляются непосредственно по формулам (6.9), (6.10).

Для неявной части используются соотношения, следующие из (6.9), (6.10), (6.7) (6.11) Например,

$$A_{i+1/2,j}^n \delta \bar{U}_{i+1/2,j}^{n+1} = (A_+)_i^n \delta \bar{U}_{i,j}^{n+1} + (A_-)_i^n \delta \bar{U}_{i+1,j}^{n+1} \quad (8.4)$$

## 9 Граничные условия

Для рассматриваемого типа задач очень важно правильное задание условий на границах расчетной области.

### 1) Ось симметрии

Для оси симметрии на нижней границе расчетной области обычно добавляют слой фиктивных объемов, который расположен ниже оси симметрии. Этот слой имеет номер ( $j = 1$ ).

Для этой точки справедливо:

$$\bar{U}_{i,1} = E_{sym} \bar{U}_{i,2}, \quad (9.1)$$

где

$$E_{sym} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

### 2) Вход

На левой границе, которая считается входом в расчетную область, задаются все газодинамические параметры, по которым рассчитывается вектор  $\bar{U}$ .

Для дозвукового входа давление не задается, а определяется аппроксимацией изнутри расчетной области с использованием инварианта Римана. В данной работе использовался

этот подход и более простой способ задания всех параметров на входе, включая давление. Отличия между двумя подходами несущественны.

### 3) Внешняя граница

Задание граничных условий подробно описано в работе [9]. Остановимся лишь вкратце на основных соотношениях.

Обозначим индексом  $\infty$  параметры внешнего потока (за пределами расчетной области), индексом  $in$  - параметры внутри расчетной области. Экстраполируем характеристики из этих областей на границу

$$\begin{aligned} \rho - \frac{p}{a_0^2} &= \rho_\infty - \frac{p_\infty}{a_0^2} \\ q_t &= q_{t,\infty} \\ -\rho_0 a_0 q_n + p &= -\rho_0 a_0 q_{n,\infty} + p_\infty \\ \rho_0 a_0 q_n + p &= \rho_0 a_0 q_{n,in} + p_{in} \end{aligned} \quad (9.3)$$

где  $q_t$  и  $q_n$  - тангенциальная и нормальная по отношению к границе составляющие скорости ( $q_n$  - направлена наружу из расчетной области).

Первые три условия (9.3) определяют экстраполяцию из внешнего потока, четвертое – изнутри расчетной области.

Для верхней границы параметры внутри расчетной области берутся в точках  $j = N_y - 1$ , где  $N_y$  - число расчетных точек по поперечной оси.

Индекс  $o$  относится к параметрам на границе на предыдущем шаге по времени.

Решая систему (9.3) относительно газодинамических параметров на внешней границе, получаем:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\rho_0 a_0}{2} (q_{n,in} - q_{n,\infty}) + \frac{1}{2} (p_{in} + p_\infty), \\ q_n &= q_{n,in} + \frac{1}{\rho_0 a_0} (p_{in} - p), \\ \rho &= \rho_\infty + \frac{p - p_\infty}{a_0^2}, \\ q_t &= q_{t,\infty} \end{aligned} \quad (9.4)$$

Связь между компонентами скоростей имеет вид:

$$\begin{aligned} q_t &= u \cos \varphi + v \sin \varphi \\ q_n &= -u \sin \varphi + v \cos \varphi \end{aligned} \quad (9.5)$$

Обратное преобразование:

$$\begin{aligned} u &= q_t \cos \varphi - q_n \sin \varphi \\ v &= q_t \sin \varphi + q_n \cos \varphi \end{aligned} \quad (9.6)$$

Здесь  $\varphi$  - угол наклона внешней границы.

4) Выход

Для сверхзвукового выхода используется простейшее соотношение

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \xi^2} = 0, \text{ т.е. } \bar{U}_{Nx} = 2 * \bar{U}_{Nx-1} - \bar{U}_{Nx-2} \quad (9.7)$$

Для дозвукового выхода применен подход подобный методу, использованному на внешней границе.

Снова обозначим индексом  $\infty$  параметры внешнего потока (за пределами расчетной области), индексом  $in$  - параметры внутри расчетной области. Экстраполируем характеристики из областей внутри расчетной области на границу:

$$\begin{aligned} \rho - \frac{P}{a_0^2} &= \rho_{in} - \frac{P_{in}}{a_0^2} \\ q_t &= q_{t,in} \\ \rho_0 a_0 q_n + p &= \rho_0 a_0 q_{n,in} + P_{in} \end{aligned} \quad (9.8)$$

Давление полагаем равным

$$p = p_\infty \quad (9.9)$$

Здесь  $q_t$  и  $q_n$  - тангенциальная и нормальная по отношению к границе составляющие скорости ( $q_n$  - направлена наружу из расчетной области).

При расположении выходной границы перпендикулярно оси  $x$  система (9.8) и (9.9) имеет решение:

$$\begin{aligned} p &= p_\infty \\ u &= u_{in} + \frac{1}{\rho_0 c_0} (p_{in} - p_\infty) \\ \rho &= \rho_{in} + \frac{p_\infty - P_{in}}{c_0^2} \\ v &= v_{in} \end{aligned} \quad (9.10)$$

Газодинамические параметры  $u_{in}, v_{in}, \rho_{in}, p_{in}$  внутри расчетной области определяются по общей формуле

$$f_{in} = 2 * f_{Nx-1} - f_{Nx-2} \quad (9.11)$$

## 10 Решение системы

Для решения системы (8.1) используется метод, предложенный в работе [7].

Это итеративный метод Гаусса-Зейделя с линейной релаксацией в комбинации с векторной прогонкой.

На одном шаге по времени используются два прохода в направлении основного движения потока (в данном случае по оси  $\xi$ ).

На следующем шаге по времени используются два прохода в направлении поперек движения потока (в данном случае – по оси  $\eta$ ).

И так на каждом шаге по очереди меняя направление проходов.  
Рассмотрим подробно первый вариант (по оси  $\xi$ ); второй - аналогичен.

Для  $k = 1, 3, \dots$  ( $k$  - номер итерации):

Проход в обратном направлении ( $i = N_x - 1, N_x - 2, \dots, 3, 2$ )

$$\mathbf{B}_{i,j} \delta \bar{U}_{i,j+1}^{(k)} + \mathbf{A}_{i,j} \delta \bar{U}_{i,j}^{(k)} + \mathbf{C}_{i,j} \delta \bar{U}_{i,j-1}^{(k)} + \mathbf{D}_{i,j} \delta \bar{U}_{i+1,j}^{(k)} + \mathbf{E}_{i,j} \delta \bar{U}_{i-1,j}^{(k-1)} = \Delta \bar{U}_{i,j}^n \quad (10.1)$$

Проход в прямом направлении  $i = 2, 3, \dots, N_{x-2}, N_{x-1}$

$$\mathbf{B}_{i,j} \delta \bar{U}_{i,j+1}^{(k+1)} + \mathbf{A}_{i,j} \delta \bar{U}_{i,j}^{(k+1)} + \mathbf{C}_{i,j} \delta \bar{U}_{i,j-1}^{(k+1)} + \mathbf{D}_{i,j} \delta \bar{U}_{i+1,j}^{(k)} + \mathbf{E}_{i,j} \delta \bar{U}_{i-1,j}^{(k+1)} = \Delta \bar{U}_{i,j}^n \quad (10.2)$$

В качестве нулевого приближения принимаем

$$\delta \bar{U}_{i,j}^{(0)} = \{0\} \quad (10.3)$$

В обоих случаях система представляет собой блочную трехдиагональную матрицу размерностью  $(N_x - 1) \times (N_y - 1)$ ; каждый блок сам по себе является матрицей  $4 \times 4$ .

Для замыкания системы используются граничные условия. Реально используется только условие на оси симметрии

$$\delta \bar{U}_{i,1} = E_{sym} \delta \bar{U}_{i,2} \quad (10.4)$$

На входе, выходе и на внешней границе при решении систем (10.2), (10.3) полагаем:

$$\delta \bar{U} = \{0\} \quad (10.5)$$

Системы, имеющие блочные трехдиагональные матрицы, легко решаются методом векторной прогонки.

В данной работе использовалось 2 итерации на каждом шаге по времени.

## 11 Метод решения системы уравнений для турбулентных характеристик ( $k, \varepsilon$ )

Система уравнений (3.2) решается аналогично системе (2.1).

Единственной особенностью является наличие источника  $S$  в правой части системы.

Представляем этот источник обычным образом:

$$\bar{S} = \bar{S}^n + \alpha \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{U}} \right)^n \delta \bar{U}^{n+1} \quad (11.1)$$

В результате в формуле для  $\mathbf{A}_{i,j}$  в уравнении (8.1) появляется дополнительный член

$$\left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{U}} \right)_{i,j}^n$$

Система (3.2) решается на каждом шаге интегрирования после системы (2.1), т.е. эти системы решаются отдельно, а не совместно.

## 12 Результаты расчета

Для апробации изложенного численного метода был проведен ряд тестовых расчетов, которые сопоставлялись с экспериментальными данными. При выборе последних учитывалась достоверность данных (подробное описание экспериментальной установки и условия проведения эксперимента), а также возможность охватить как можно больший диапазон изменения параметров.

**Тест 1.** Полностью расширенная воздушная струя с равными температурами на срезе сопла и в окружающем пространстве [10].

Проведен расчет струй с числом Маха на срезе сопла  $M_a = 0.28$  и  $M_a = 1.37$ , с давлением на срезе равным давлению окружающего пространства, т.е.  $p_a = p_e$ .

Струя нагревалась таким образом, чтобы получить температуру на срезе сопла равной температуре окружающего пространства  $T_a = T_e = 288[K]$ .

Использовалось профилированное сопло с углом полуоткрытия на выходе равным нулю ( $\theta_a = 0^\circ$ ). Радиус срез сопла  $R_a = 25.5mm$ . Рабочее тело – воздух.

На рисунках 3,4 представлены результаты расчета и сравнение с экспериментом.

Видно, начальная интенсивность турбулентности на срезе сопла сильно влияет на длину начального участка струи.

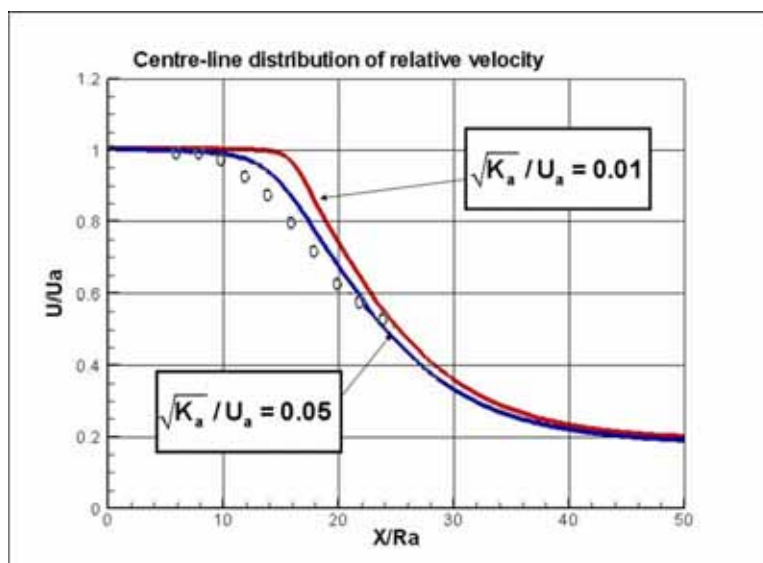


Рис.3. Тест 1. Распределение скорости вдоль оси струи при  $M_a = 0.28$ . Линии – результаты расчета при различных значениях интенсивности турбулентности на срезе сопла; кружки – эксперимент [10].

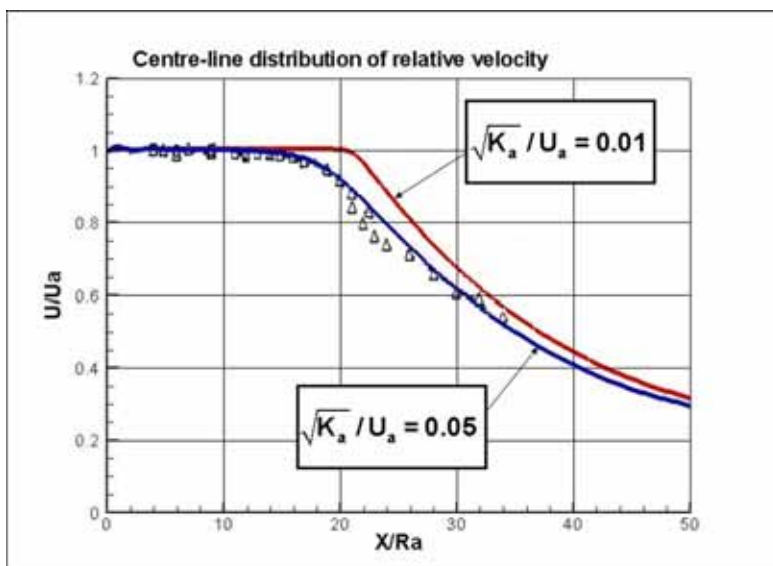


Рис.4. Тест 1. Распределение скорости вдоль оси струи при  $M_a = 1.37$ . Линии – результаты расчета при различных значениях интенсивности турбулентности на срезе сопла; треугольники – эксперимент [10].

**Тест 2.** Полностью расширенная холодная струя.

Проведен расчет струй с числом Маха на срезе сопла  $M_a = 2.2$  и  $M_a = 3$ , с давлением на срезе равным давлению окружающего пространства, т.е.  $p_a = p_e$ .

Температура торможения в струе равна температуре окружающего пространства  $T_{o,a} = T_e = 300[K]$ . Радиус среза сопла задавался равным  $R_a = 12.79mm$ . Рабочее тело - холодный воздух.

На рисунках 5-7 показаны результаты расчета этих вариантов и экспериментальные данные из [11] ( $M_a = 2.2$ ) и [12] ( $M_a = 3$ )

В обоих расчетах использовалось значение интенсивности турбулентности на срезе сопла  $\sqrt{K_a} / U_a = 0.01$

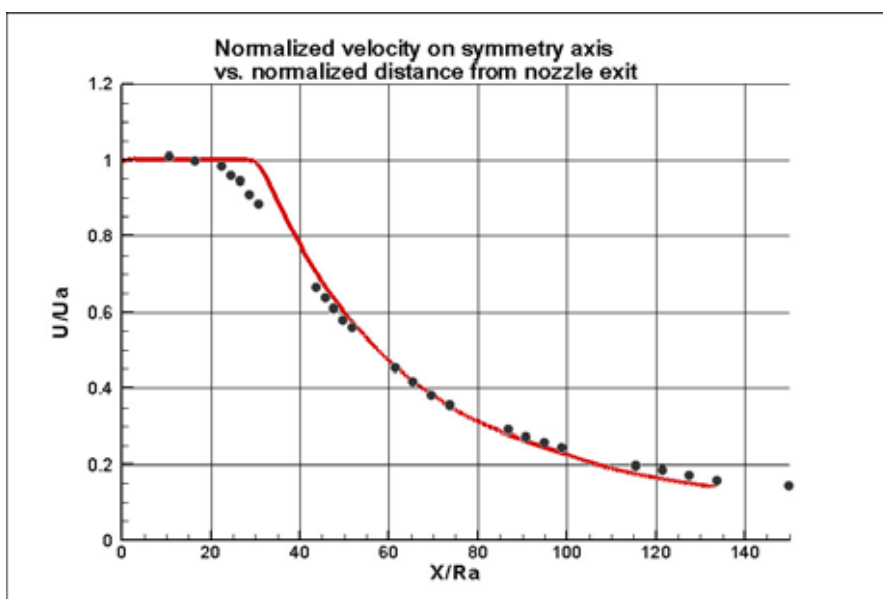


Рис.5. Тест 2. Распределение скорости вдоль оси холодной струи при  $M_a = 2.22$ . Линии – результаты расчета; кружки – эксперимент [11].

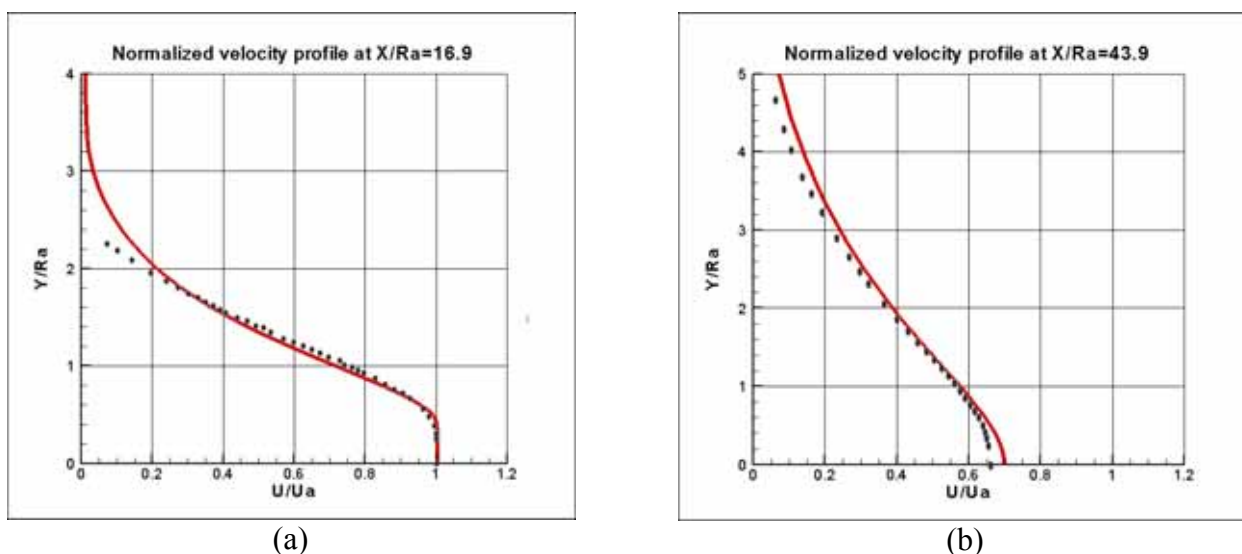


Рис.6. Тест 2. Поперечные профили скорости в различных сечениях холодной струи при  $M_a = 2.22$ . (a) -  $X/R_a = 16.9$ , (b) -  $X/R_a = 16.9$   
 Линии – результаты расчета; кружки – эксперимент [11].

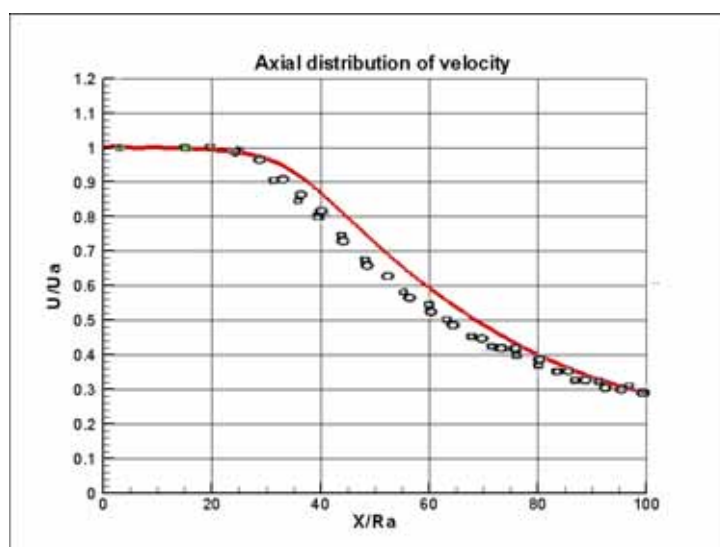


Рис.7. Тест 2. Распределение скорости вдоль оси холодной струи при  $M_a = 3$ . Линии – результаты расчета; кружки – эксперимент [12].

### Тест 3. Недорасширенная нагретая струя.

На рисунках 8-10 показаны результаты расчета струи с числом Маха на срезе сопла  $M_a = 1.95$  и степенью нерасчетности  $p_a/p_e = 1.21$ . Температура торможения струи на  $380[\text{K}]$  выше температуры окружающего пространства. Рабочее тело – воздух. Радиус среза сопла задавался равным  $R_a = 20\text{mm}$ .

Сопоставление показывает, что в расчетах получается заниженная амплитуда колебаний скорости и температуры на начальном участке струи. Вероятно, это связано с тем, что в расчетах используется первый порядок аппроксимации при расщеплении конвективного потока (разности вверх по потоку).



На основном участке струи наблюдается хорошее совпадение результатов расчета с экспериментальными данными.

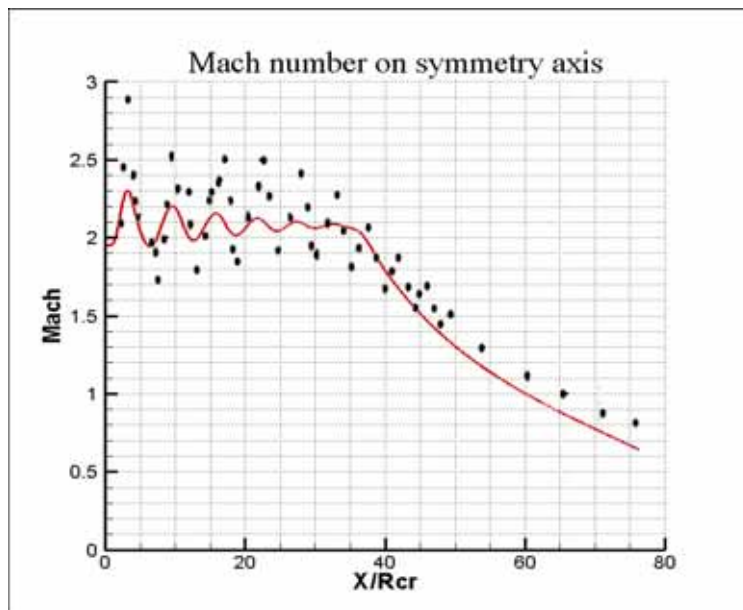


Рис.8. Тест 3. Распределение числа Маха вдоль оси недорасширенной нагретой струи при  $M_a = 1.95$  и  $p_a / p_e = 1.21$ . Линии – результаты расчета; кружки – эксперимент [13].

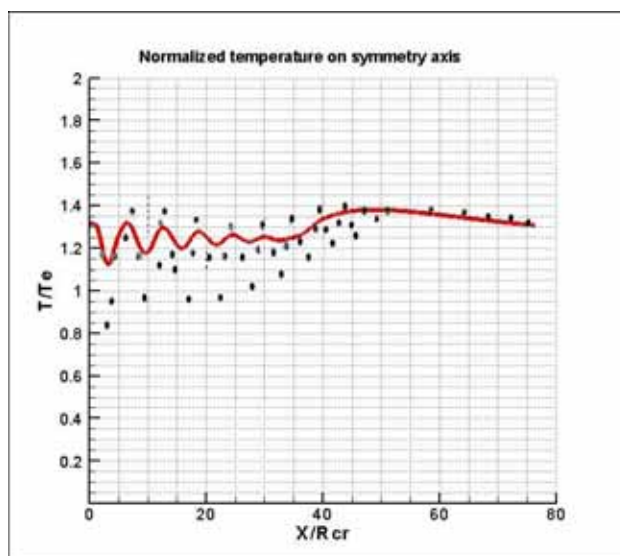


Рис.9. Тест 3. Распределение нормированной температуры ( $T/T_e$ ) вдоль оси недорасширенной нагретой струи при  $M_a = 1.95$  и  $p_a / p_e = 1.21$ . Линии – результаты расчета; кружки – эксперимент [13].

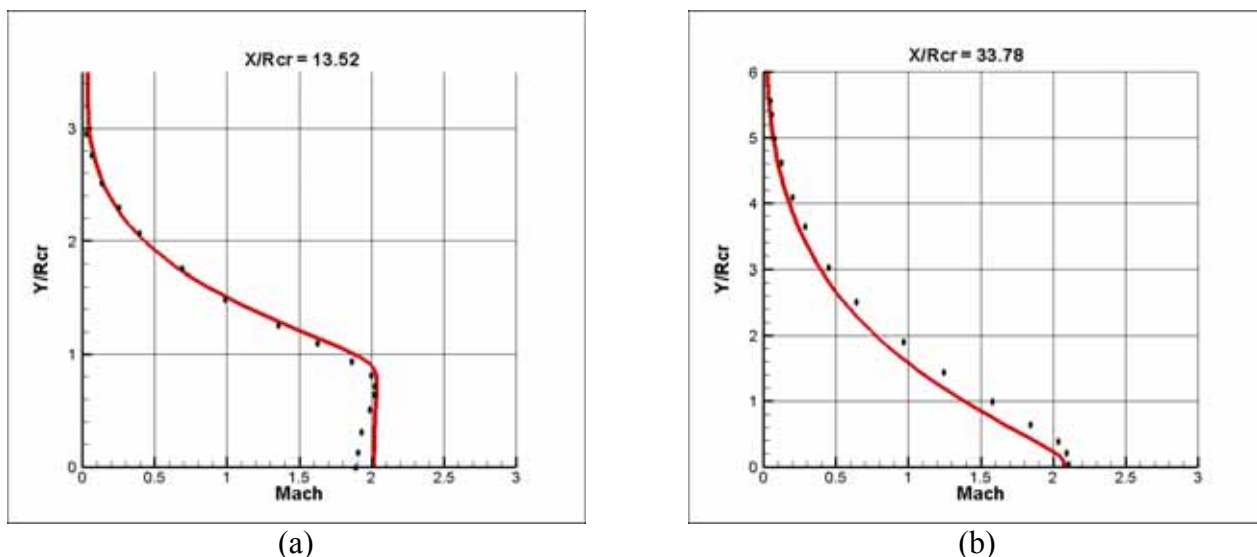


Рис.10. Тест 3. Поперечные числа Маха в различных сечениях недорасширенной нагретой струи при  $M_a = 1.95$  и  $p_a / p_e = 1.21$ . (a) -  $X / R_{cr} = 13.52$ , (b) -  $X / R_{cr} = 33.78$ ,  
 Линии – результаты расчета; кружки – эксперимент [13].

**Тест 4. Недорасширенная холодная струя.**

На рисунках 11, 12 показаны результаты расчета струи с числом Маха на срезе сопла  $M_a = 3.3$  и степенью нерасчетности  $p_a / p_e = 1.5$ . Температура торможения струи равна температуре окружающего пространства.

Угол полураскрытия сопла на срезе  $\theta_a = 10^\circ$ . Рабочее тело – холодный воздух. Радиус среза сопла  $R_a = 26.85mm$ .

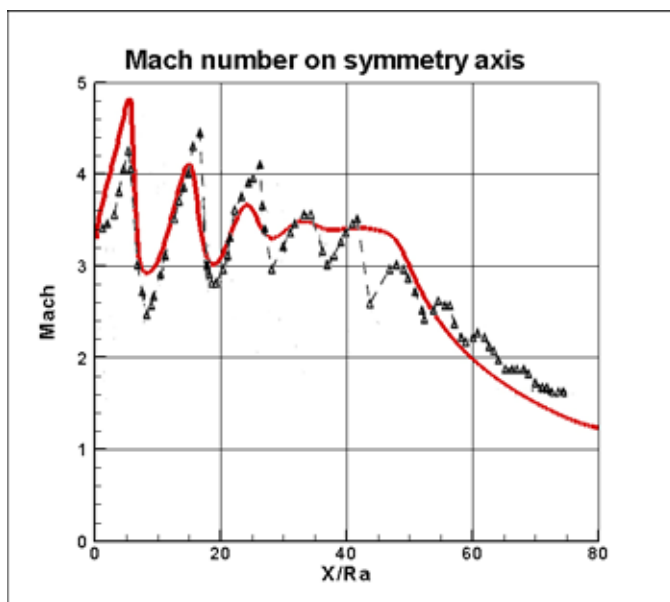


Рис.11. Тест 4. Распределение числа Маха вдоль оси недорасширенной холодной струи при  $M_a = 3.3$  и  $p_a / p_e = 1.5$ . Линии – результаты расчета; кружки – эксперимент [14].

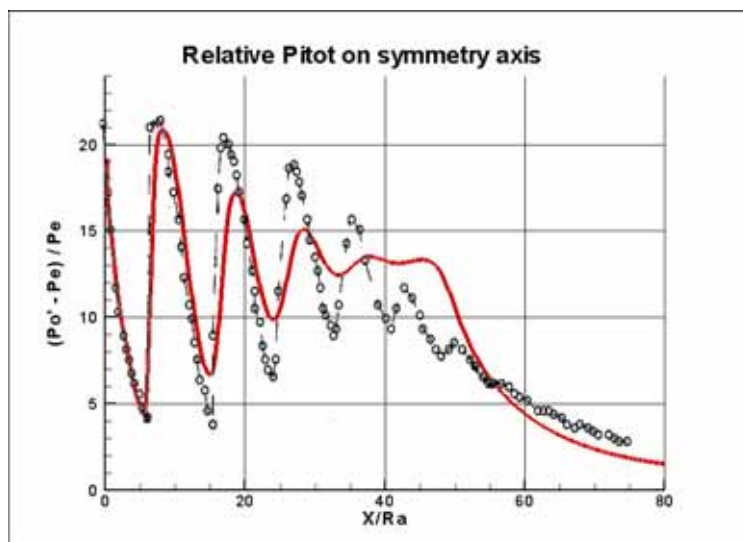


Рис.12. Тест 4. Распределение относительного значения давления Пито вдоль оси недорасширенной холодной струи при  $M_a = 3.3$  и  $p_a / p_e = 1.5$ . Линии – результаты расчета; кружки – эксперимент [14].

**Тест 5.** Перерасширенная холодная струя.

На рисунках 13, 14 показаны результаты расчета струи с числом Маха на срезе сопла  $M_a = 3.3$  и степенью нерасчетности  $p_a / p_e = 0.5$ . Температура торможения струи равна температуре окружающего пространства.

Угол полураскрытия сопла на срезе  $\theta_a = 10^\circ$ . Рабочее тело – холодный воздух. Радиус среза сопла  $R_a = 40.5mm$ .

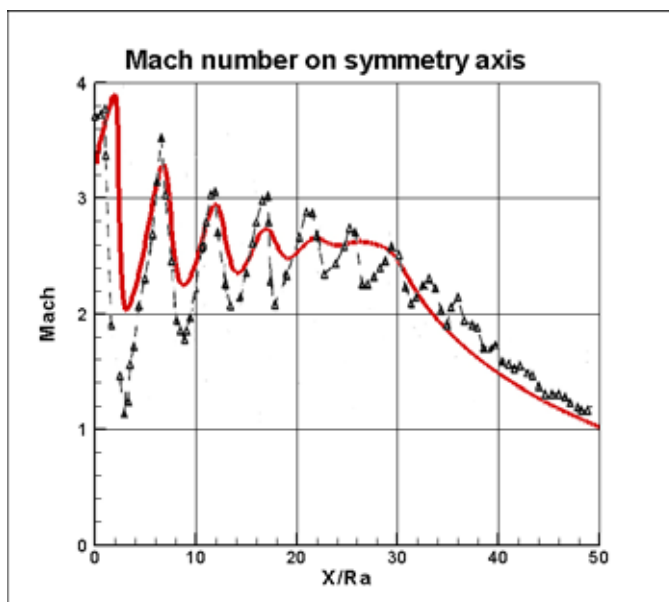


Рис.13. Тест 5. Распределение числа Маха вдоль оси недорасширенной холодной струи при  $M_a = 3.3$  и  $p_a / p_e = 0.5$ . Линии – результаты расчета; кружки – эксперимент [14].

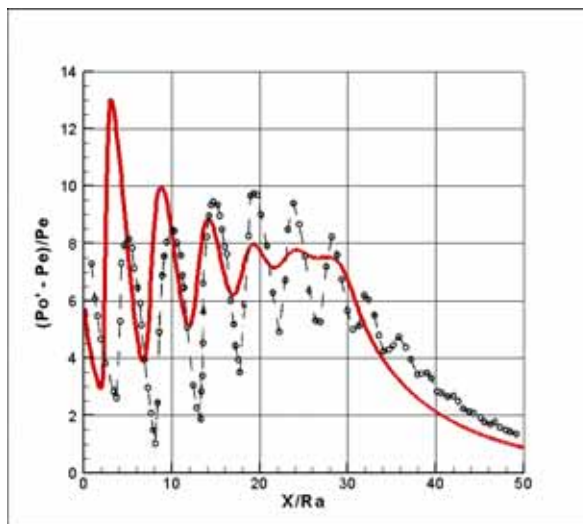


Рис.14. Тест 5. Распределение относительного значения давления Пито вдоль оси недорасширенной холодной струи при  $M_a = 3.3$  и  $p_a / p_e = 0.5$ . Линии – результаты расчета; кружки – эксперимент [14].

**Тест 6. Перерасширенная горячая струя.**

На рисунке 15 показаны результаты расчета струи с числом Маха на срезе сопла  $M_a = 4$  и степенью нерасчетности  $p_a / p_e = 0.65$ . Температура торможения струи  $T_0 = 2860K$ . Радиус срез сопла  $R_a = 50mm$ .

В расчетах в качестве рабочего тела струи использовался идеальный газ с показателем адиабаты  $\gamma = 1.26$  и молекулярной массой равной  $26.75 \frac{kg}{kmol}$ . Окружающая среда – воздух при температуре  $T_e = 288[K]$ .

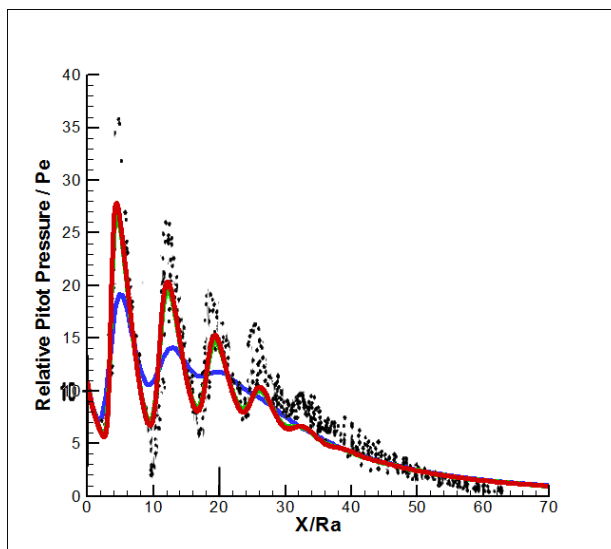


Рис.15. Тест 6. Распределение относительного значения давления Пито вдоль оси недорасширенной горячей струи при  $M_a = 4$  и  $p_a / p_e = 0.65$ . Линии – результаты расчета; кружки – эксперимент [15]. Синяя линия – сетка 201x61; зеленая – 601x101; красная – 901x121

Анализ результатов показывает, что при использовании грубой сетки (201x61) происходит сильное «размытие» волновой структуры на начальном участке струи. Расчеты с использованием сеток (601x101) и (901x121) практически совпадают.

**Тест 7. Полностью расширенная холодная струя, истекающая в спутный поток.**

На рисунках 16-17 показаны результаты расчета струи с числом Маха на срезе сопла  $M_a = 0.94$  с давлением на срезе равным давлению спутного потока пространства, т.е.  $p_a = p_e$ .

Число Маха спутного потока равно  $M_e = 1.3$ . Температура торможения в струе равна температуре спутного потока  $T_{o,a} = T_e = 300[K]$ .

Рабочее тело – воздух. Радиус срез сопла задавался равным  $R_a = 20mm$ .

Расчеты проводились при различных степенях интенсивностях турбулентности внешнего потока ( $\sqrt{K_e} / U_e = 0.01 \div 0.05$ ). Анализ показывает, что этот параметр очень сильно влияет на интенсивность турбулентного смешения.

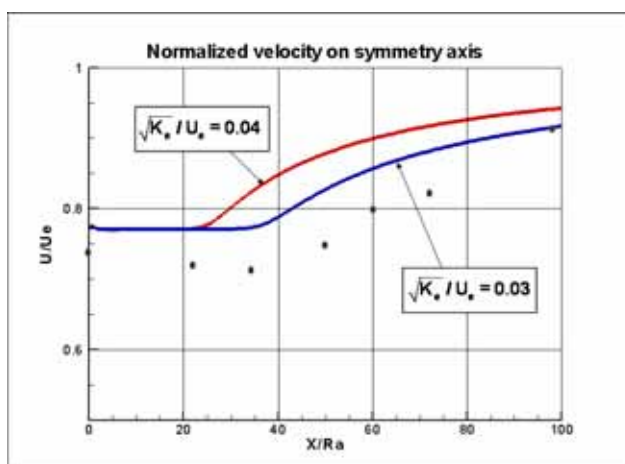


Рис.16. Тест 7. Распределение относительной скорости  $U/U_e$  вдоль оси спутной холодной струи при  $M_a = 0.94$ ,  $p_a = p_e$  и  $M_e = 1.3$ . Линии – результаты расчета; кружки – эксперимент [16].

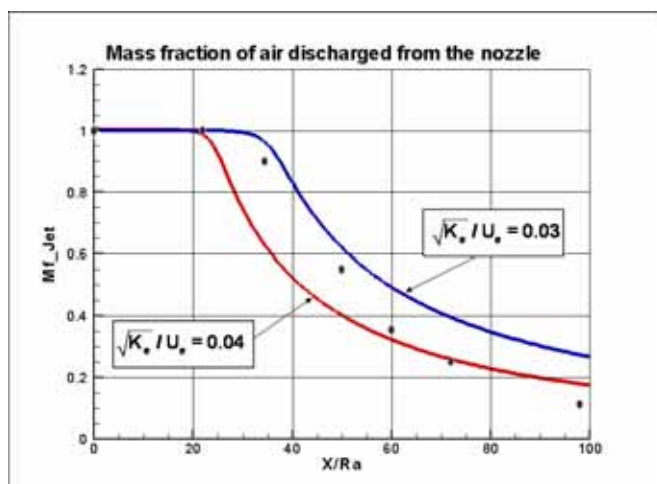


Рис.17. Тест 7. Распределение массовой концентрации воздуха, вытекающего из центрального сопла оси спутной холодной струи при  $M_a = 0.94$ ,  $p_a = p_e$  и  $M_e = 1.3$ . Линии – результаты расчета; кружки – эксперимент [16].

**Тест 8. Сильно недорасширенная горячая звуковая струя**

На рисунке 18 показаны результаты расчета струи со следующими параметрами:

Число Маха на срезе сопла  $M_a = 1$ , температура торможения  $T_0 = 1970K$ , давление торможения  $p_0 = 26.8 \cdot 10^5 Pa$ . Степень нерасчетности  $p_a / p_e = 14.16$ . Радиус среза сопла  $R_a = 12.5mm$ . В расчетах в качестве рабочего тела струи использовался идеальный газ с показателем адиабаты  $\gamma = 1.33$  и молекулярной массой равной  $25 \frac{kg}{kmol}$ . Окружающая среда – воздух при температуре  $T_e = 288[K]$ .

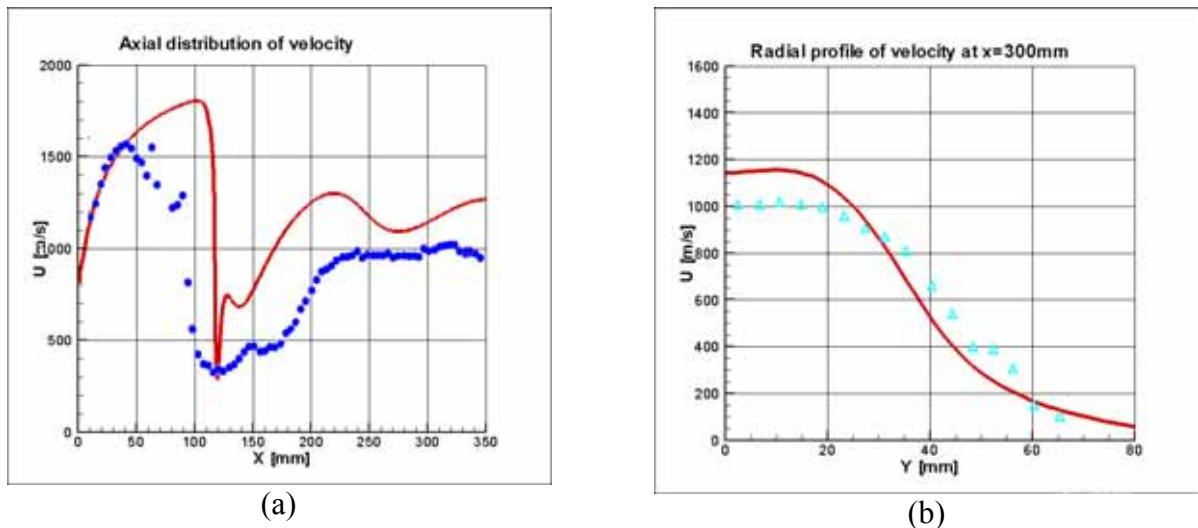


Рис.18. Тест 8. Распределение скорости в горячей сильно недорасширенной струе при  $M_a = 1$  и  $p_a / p_e = 14.16$ . (a) – распределение скорости вдоль оси струи, (b) – поперечный профиль при  $X = 300mm$

Линии – результаты расчета; кружки и треугольники– эксперимент [17].

Для всех расчетов использовались сетки от (201 x 61) до (1001 x 201) узлов. Время расчета одного варианта на компьютере Intel® Core™2 Duo CPU E4500 @2.2GHz, 1.99GB составляло от ~1 мин. до 15 минут.

### 13 Скорость сходимости решения

Для оценки скорости сходимости использовались невязки, рассчитанные по плотности. Средняя невязка задана формулой:

$$Res^n = \tau_0 \sqrt{\frac{1}{(N_x - 1)(N_y - 1)} \sum_{i,j=2,2}^{(N_x-1),(N_y-1)} \left( \frac{\Delta \rho_{i,j}^n}{\Delta t \cdot \rho_{i,j}^n} \right)^2}, \quad (13.1)$$

где суммирование осуществляется по внутренним узлам сетки:

$$i = 2, \dots, (N_x - 1); \quad j = 2, \dots, (N_y - 1)$$

$\tau_0$  - характерное газодинамическое время течения ( в данном случае берется:

$$\tau_0 = R_a / u_a )$$

Максимальная невязка равна:

$$Res_m^n = \tau_0 \max_{i,j} \left( \left| \frac{\Delta \rho_{i,j}^n}{\Delta t \cdot \rho_{i,j}^n} \right| \right) \quad (13.2)$$

На рисунке 19 представлено изменение числа Куранта-Фридрихса-Леви, средней невязки и максимальной невязки в зависимости от номера итерации для теста 6.

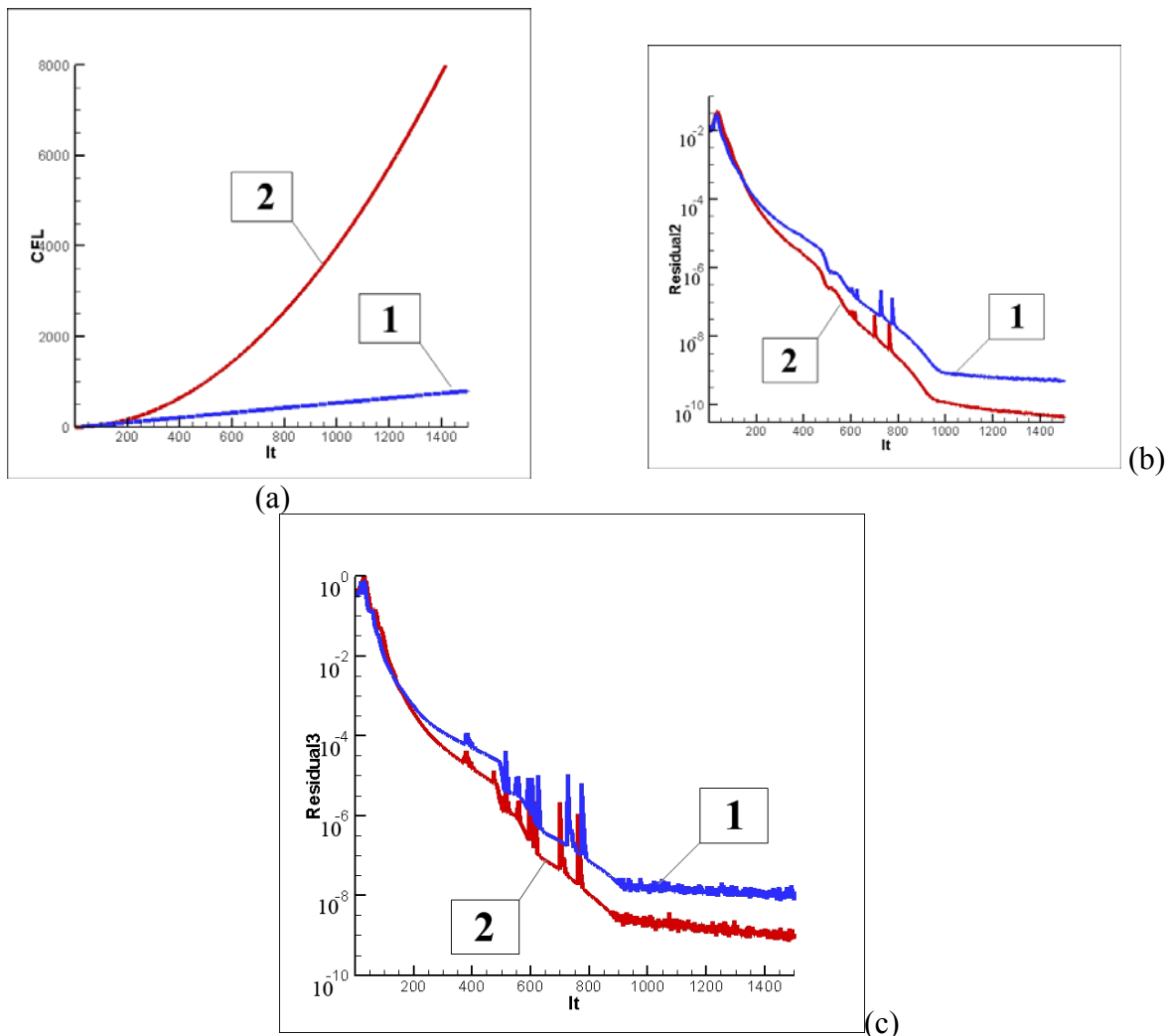


Рис.18. Тест 6. Изменение числа Куранта-Фридрихса-Леви (а), средней невязки (б) и максимальной невязки (с) в зависимости от номера итерации

В первом случае число CFL меняется по линейному закону в зависимости от номера итерации, во втором – по квадратичному. В обоих случаях невязка выходит на пологий участок после примерно 900 итераций. На самом деле, для получения хорошей точности расчета достаточно ~600 итераций.

## 14 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана численная схема для расчета сверхзвуковых турбулентных течений в постановке полной системы уравнений Навье-Стокса (Рейнольдса).

Схема является неявной и безусловно устойчивой.

Проведено расчетное исследование неизобарических струй в широком диапазоне изменения значений числа Маха на срезе сопла (от 0 до 4).

Сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными показало в общем удовлетворительное совпадение.

Показано существенное влияние начальной интенсивности турбулентности на параметры струй.

К слабым местам метода следует отнести первый порядок аппроксимации конвективных членов, что привело к «размытию» волновой структуры на начальном участке струи.

Также трудно считать удовлетворительными результаты расчета течения в районе диска Маха.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Fairweather M., Ranson K.R. Prediction of underexpanded jets using compressibility-corrected, two-equation turbulence models. *Progress in Computational Fluid Dynamics*, Vol. 6, Nos. 1/2/3, 2006.
2. An Evaluation of Parameters Influencing Jet. Mixing Using the WIND Navier-Stokes Code. NASA/TM—2002-211727. August 2002. pp.1-23
3. Калтаев А. Ж., Найманова А. Ж. Об одном численном методе расчета сверхзвуковых пространственных струй. *Матем. моделирование*, 2002, 14:12, 105–116
4. Молчанов А.М. Расчет сверхзвуковых неизобарических струй с поправками на сжимаемость в модели турбулентности. // *Вестник Московского авиационного института*, 2009г., т.16, №1, стр. 38-48.
5. MacCormack R.W. A New Implicit Algorithm for Fluid Flow. *Proc. // AIAA 13th CFD Conference, Snowmass, Colorado*, pp.112-119, 1997.
6. Steger J. and Warming R.F. Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamics Equations with Application to Finite Difference Methods. // *NASA TN-78605*, 1979.
7. MacCormack R.W. Current Status of Numerical Solutions of the Navier-Stokes equations. // *AIAA Paper No. 85-0032*, 1985.
8. Tysinger T., and Caughey D. Implicit Multigrid Algorithm for the Navier–Stokes Equations. // *AIAA Paper 91-0242*, Jan. 1991.
9. Schmidt W., Jameson A. Euler Solvers as an Analysis Tool for Aircraft Aerodynamics. // *Advances in Computational Transonics*, edited by W. G. Habashi, Pineridge, 1985, pp. 371-404.
10. Lau J.C., Morris P.J., Fisher M.J. Measurements in subsonic and supersonic free jets using a laser velocimeter. // *J. Fluid Mech.*, 1979, vol. 63, part 1, pp. 1-27
11. J.M. Eggers. Velocity profiles and eddy viscosity distributions downstream of a Mach 2.22 nozzle exhausting to quiescent air. // *NASA TN D-3601*, 1966.
12. Теория турбулентных струй. Под ред. Г.Н.Абрамовича. М. Наука, 1984, 720 с.
13. Keysar L., Degani D. Numerical Investigation of Axisymmetric Compressible Turbulent Jets. // *AIAA Paper 2004-1107*, p.1-25.
14. Сафронов А.В., Хотулев В.А. Результаты экспериментальных исследований сверхзвуковых холодных и горячих струйных течений, истекающих в затопленное пространство. // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2008 год, том 6. [www.chemphys.edu.ru/article/129/](http://www.chemphys.edu.ru/article/129/)
15. Сафронов А.В. Метод расчета струй продуктов сгорания при старте. // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2006 год, том 4. [www.chemphys.edu.ru/media/files/2006-10-23-001.pdf](http://www.chemphys.edu.ru/media/files/2006-10-23-001.pdf)
16. Eggers J.M., Torrence M.G. An experimental investigation of the mixing of compressible air jets in a coaxial configuration. // *NASA TN D-5315*, July 1969.
17. Chauveau C., Davidenko D.M., Sarh B., Gökalp I., Avrashkov V, Fabre C. PIV Measurements in an Underexpanded Hot Free Jet. // *13th Int Symp on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*.Lisbon, Portugal, 26-29 June, 2006. Paper No 1161.

Статья поступила в редакцию 16 июля 2009 г.