О ВЛИЯНИИ УЧЕТА ИЗМЕНЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН НА ДИНАМИКУ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

О.Н. Хатунцева

РКК "Энергия" им. С.П. Королева, г. Королев

Аннотация

Учет изменения плотности вероятности случайных величин позволил получить уравнение, связывающее значения плотности вероятности реализации исследуемого параметра и ее производной в разные моменты времени. Соотношение получено в предположении, что реализованное значение на предыдущем шаге становится средним значением на шаге текущем.

ON IMPACT OF PROBABILITY DENSITY VARIATION OF RANDOM VARIABLES ON STOCHASTIC PROCESS DYNAMICS

O.N. Khatuntseva

RSC "Energia" named by after S.P. Korolev, Russia, Korolev

The expansion of the space of variables: $(t,q) \to (t,q;\varphi)$ and analysis of a continuously changing probability density $\varphi = \varphi(t,q)$ in this space enabled to obtain the relationship that implicitly defines the probability density of realization of the considered parameter at the assigned moment. The relationship is obtained under assumption that the value realized at the previous step becomes the average value at the current step.

The algorithm for this equation solving in assumption of the normal (Gaussian) distribution with varying from step to the step average value and dispersion of the considered parameter.

Большинство физических процессов могут считаться детерминированными в некотором приближении. Однако при более детальном рассмотрении проявляют черты случайных – стохастических процессов. Детализация исследования процесса определяется временным или пространственным масштабом усреднения параметров, характеризующих этот процесс. В дальнейшем такой масштаб будем называть масштабом рассмотрения системы.

Экономические и социальные процессы являются стохастическими практически на всех масштабах рассмотрения.

Процессы, происходящие при движении жидкости и газа, имеют упорядоченные – детерминированные черты в широком диапазоне масштабов рассмотрения при малых числах Рейнольдса и становятся стохастическими на всех масштабах рассмотрения при числах Рейнольдса, превышающих некоторое критическое значение. Описанию стохастических процессов в гидродинамике посвящено большое количество работ (см., например, [1]–[3]).

Существующие способы описания стохастических процессов с помощью дифференциальных уравнений можно разделить на три основных класса.

Во-первых – это уравнение Фоккера – Планка, которое представляет собой уравнение в частных производных и описывает эволюцию плотности вероятности во времени. Использование этого уравнения ограничено случаями, когда средние изменения случайных величин малы по сравнению с их характерными значениями.

Во-вторых, это соотношения в форме уравнений Ланжевена, которые состоят из обычного нестохастического дифференциального уравнения и дополнительной части, описывающей случайный процесс. В зависимости от способа задания плотности вероятности случайных величин выделяют гауссовы, пуассоновские и др. процессы [4]. То, что объединяет все эти способы описания – неизменная, раз и навсегда заданная (в каждом случае своя), функция плотности вероятности случайных величин. Реализация случайной величины (в соответствии с заданной плотностью вероятности) в рассматриваемый момент времени никак не влияет на функцию плотности вероятности в следующий момент времени – между ними не существует обратной связи. Такое приближение при описании динамических систем можно считать обоснованным в тех случаях, когда рассматриваемые системы находятся вблизи положения равновесия. Однако вдали от равновесного состояния, когда вступают в силу коллективные явления взаимодействия подсистем на разных масштабах, необходимо учитывать влияние реализованных случайных величин на изменение плотности вероятности их реализации в следующие моменты времени.

Третья форма стохастических дифференциальных уравнений напоминает уравнения Ланжевена, но записанных с использованием стохастических дифференциалов.

В данной работе будут рассмотрены стохастические процессы, в которых плотность вероятности случайной величины является функцией времени. Ставится задача отыскания соотношений, связывающих значение прогнозируемой случайной величины с плотностью вероятности ее реализации в разные моменты времени для систем, находящихся вдали от положения равновесия.

Рассмотрим временной процесс, являющийся марковским и описываемый реализуемыми в фиксируемые моменты времени t_i ($i = 0,1,2,...,k-1,k$) параметрами $\tilde{q}_i = \tilde{q}(t_i)$. Причем множество реализованных значений $\tilde{Q}(\tilde{q})=\{\tilde{q}\}$ является подмножеством множества $Q(q)=\{q\}$ всех возможных значений исследуемого параметра q : $\tilde{Q}(\tilde{q})\subset Q(q)$.

Процесс называется марковским, если рассматриваемая система – система с короткой “памятью”, которая на каждом последующем шаге “помнит” состояние только в предыдущий момент и “забывает” предысторию всех более ранних моментов времени. Однако это традиционное для марковских процессов положение будем относить только к описанию процесса на плоскости (t,q). Построим расширенное пространство переменных $(t,q;\varphi)$, в котором плоскость (t,q) является проекцией пространства $(t,q;\varphi)$ (рис.1). Будем искать в пространстве $(t,q;\varphi)$ такие зависимости $\varphi=\varphi(t,q)$, которые связывают между собой значения реализованных величин $\tilde{q}$ в различные моменты времени.

Предположим, что в каждый фиксируемый момент времени t_i, существует нормированная функция $\varphi(t_i,q)=\varphi_i(q)$: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_i(q)\mathrm{d}q=1$, которая описывает вероятность реализации значения $\tilde{q}_i$. В точке t_i реализованный параметр $\tilde{q}_i$ представим в виде

$$\tilde{q}_i=\langle q\rangle_i+(\Delta q)_i, \tag{1}$$

где $(\Delta q)_i$ ($\Delta q\in C^1(R)$) – отличие реализованного в момент времени t_i, значения $\tilde{q}_i$ от среднего значения возможных реализаций величин q :

$$\langle q\rangle_i=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}q\varphi_i(q)\mathrm{d}q \tag{2}$$

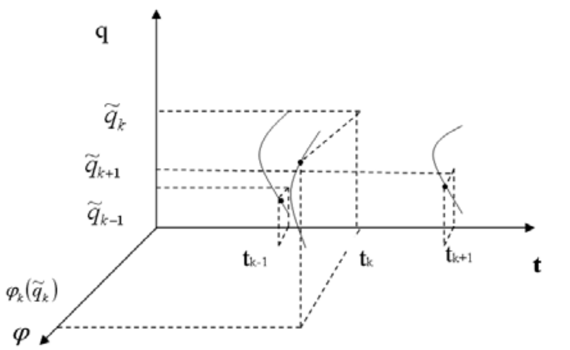

Рис.1

Будем рассматривать такие системы, в которых реализация на текущем шаге значения $\tilde{q}$ ведет на следующем шаге к такому изменению функции $\varphi(q)$ и, соответственно, среднего значения $\langle q\rangle$, что это среднее значение “стремится” сравняться по величине с реализованным значением $\tilde{q}$. После такой “перестройки” функции, на следующем шаге вновь реализуется одно из возможных значений параметра $\tilde{q}$, и все повторяется заново. Из-за этого функция $\varphi(q)$ претерпевает непрерывное изменение во времени. Для выполнения такого условия применительно к физическим системам, существенным является их отдаленность от равновесного термодинамического состояния.

Для таких систем найдем зависимость, связывающую реализуемое значение $\tilde{q}_k$ в момент времени t_k, с реализованным в момент времени t_{k-1} значением $\tilde{q}_{k-1}$ и функциями $\varphi_{k-1}(q)$, $\varphi_k(q)$.

Описывая исследуемый процесс в пространстве $(t,q;\varphi)$, заменим в выражениях (1)-(2) параметры, реализуемые в фиксированные моменты времени t_i, параметрами, реализуемыми в любой произвольный момент времени t :

$$\tilde{q}_i=\tilde{q}(t_i)\to\tilde{q}(t),\ (\Delta q)_i=(\Delta q)(t_i)\to(\Delta q)(t),$$
$$\varphi_i(q)=\varphi(t_i,q)\to\varphi(t,q)$$

При этом считаем, что нормировка функции $\varphi(t,q)$ остается постоянной во времени:

$$\tilde{q}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}q\varphi(t,q)\mathrm{d}q+(\Delta q)(t)$$

Продифференцируем обе части полученного выражения по времени:

$$\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}q\varphi(t,q)\mathrm{d}q+\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}q\frac{\partial\varphi(t,q)}{\partial t}\mathrm{d}q+\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}$$

Используя свойство постоянства нормировки функции $\varphi(t,q)$: $\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi\,\mathrm{d}q=0$, вычтем из правой части полученного соотношения нулевой член $\kappa\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi\,\mathrm{d}q=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\kappa\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}q$, где $\kappa=\mathrm{const}$, и перепишем выражение в виде

$$\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(q-\kappa)\frac{\partial\varphi(t,q)}{\partial t}\mathrm{d}q+\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}$$

Поскольку не будут рассматриваться никакие другие механизмы изменения функции φ от времени, кроме вышеописанного – при реализации текущего значения параметра $\tilde{q}$, то в линейном приближении выражение для производной функции φ по времени будет иметь вид: $\frac{\partial\varphi(t,q)}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{q}}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t}$. Используя его, мы исключаем возможность, например, самопроизвольного изменения функции φ. При этом, выражение для производной $\partial\tilde{q}/\partial t$, приобретает вид

$$\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(q-\kappa)\frac{\partial\varphi(t,q)}{\partial\tilde{q}}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t}dq+\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t} \tag{3}$$

Рассмотрим проекцию описываемого процесса из пространства $(t,q;\varphi)$ на плоскость (t,q).

Функция $\varphi(t,q)\in C\times C^2(R)$ при проецировании на плоскость (t,q) в точках t_i (где $i=0,1,2,...,k-1,k$ – номера фиксируемых моментов времени t, в которых определяются значения реализованных параметров $\tilde{q}_i$), должна удовлетворять соотношениям

$$\varphi(t,q)\big|_{t=t_i}=\varphi_i(q)\big|_{q=\tilde q_i}\,,\quad \left(\frac{\partial\varphi(t,q)}{\partial q}\right)_{t=t_i}=\left(\frac{\partial\varphi_i(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde q_i}$$

На плоскости (t,q) в фиксируемые моменты времени t_i реализуются значения параметра $\tilde q(t_i)=\tilde q_i$. Если последовательно отрезками соединить эти реализованные значения, то до последнего фиксируемого момента времени t_{k-1}, включительно, $\tilde q(t)$ – уже известная по всем предыдущим моментам времени t_i (где $i=0,1,2,...,k-1$) кусочно-гладкая функция. Экстраполируем значение параметра $\tilde q$, которое реализовалось в момент времени t_{k-1}, на интервал: $t_{k-1}\le t<t_k$ между последним t_{k-1} и текущим t_k фиксируемыми моментами времени, как постоянную величину: $\tilde q(t)=\tilde q_{k-1}$, для $t_{k-1}\le t<t_k$. В результате получим кусочно-гладкую функцию $\tilde q_{k-1}(t)$ на интервале $t<t_k$. Значение параметра $\tilde q$, которое должно реализоваться в момент времени t_k, экстраполируем, как постоянную величину, на интервал $t\ge t_k$. В результате такого представления, функцию $\tilde q(t)$ на плоскости (t,q), можно записать в виде разрывной функции:

$$\tilde q(t)=\begin{cases}\tilde q_{k-1}(t), & \text{если}\quad t<t_k\\ \tilde q_k(t), & \text{если}\quad t\ge t_k\end{cases}$$

Здесь $\tilde q_{k-1}(t)\in C(R)$ – известная кусочно-гладкая ветвь функции $\tilde q(t)$ на плоскости (t,q), а $\tilde q_k(t)=\tilde q_k=\mathrm{const}$ – неизвестная ветвь функции, требующая определения.

Для того чтобы описать на плоскости (t,q) в окрестности точки t_k разрывную функцию $\tilde q(t)$, в частности, найти производную $\partial\tilde q/\partial t$, линейно экстраполируем функцию $\tilde q_{k-1}(t)$ на интервал $t\ge t_k$ и линейно интерполируем функцию $\tilde q_k(t)$ на интервал $t<t_k$. Введем дополнительную функцию H, которая будет принимать значение равное нулю везде до точки разрыва и равное единице везде после точки разрыва. Такая функция может иметь вид

$$H=\frac{\tilde q(t)-\tilde q_{k-1}(t)}{\tilde q_k(t)-\tilde q_{k-1}(t)}=U_-(t-t_{k-1})=\begin{cases}0, & \text{при}\ t<t_k\\ 1, & \text{при}\ t\ge t_k\end{cases},\qquad (4)$$

где $\tilde q(t)=\begin{cases}\tilde q_{k-1}(t), & \text{если}\ t<t_k\\ \tilde q_k(t), & \text{если}\ t\ge t_k\end{cases}$

Производная функции H по t будет равна

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial(t-t_k)}=\delta(t-t_k)\,,$$

где δ – дельта-функция.

Рассмотрим линейное приближение изменения функции $\varphi(t,q)$ в окрестности точки t_k. В этом случае можно записать:

$$\left(\frac{\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde q_k}}{\partial t}\right)_{t=t_k}(t-t_k)=\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde q_k}(q-\tilde q_k)$$

Если в точке $q=\tilde q_k$ выполняется соотношение: $\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde q_k}=0$, то будет равна нулю и производная $\left(\frac{\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde q_k}}{\partial t}\right)_{t=t_k}$, т.е. в следующий момент времени t_{k+1} плотность распределения не изменится, и реализация следующего значения параметра $\tilde q$ на плоскости (t,q) произойдет случайным образом в соответствии с плотностью распределения $\varphi_{k+1}(q)=\varphi_k(q)$.

Если же $\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde q_k}\neq 0$, то $\left(\frac{\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde q_k}}{\partial t}\right)_{t=t_k}\neq 0$

и $t-t_k=\dfrac{\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde q_k}}{\left(\frac{\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde q_k}}{\partial t}\right)_{t=t_k}}(q-\tilde q_k)$, поэтому

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\delta(t-t_k)=\delta\left(\frac{\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde q_k}}{\left(\frac{\partial\varphi(t,q)\big|_{q=q_k}}{\partial t}\right)_{t=t_k}}(q-\tilde q_k)\right)=$$

$$=\left|\frac{\left(\frac{\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde q_k}}{\partial t}\right)_{t=t_k}}{\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde q_k}}\right|\delta(q-\tilde q_k)\qquad (5)$$

Чтобы придерживаться “единообразия” описания изменения функции $\varphi(t,q)$, можно, не теряя общности, не рассматривать те моменты времени t_j, когда равны нулю производные $\left(\frac{\partial\varphi_j(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde q_j}$, $\left(\frac{\partial\varphi(t,q)\big|_{q=\tilde q_j}}{\partial t}\right)_{t=t_j}$, а рассматривать следующие за ними моменты времени t_{j+1}. Как будет показано ниже, полученные итерационные выражения для функции $\varphi(t,q)$, в линейной постановке задачи, не будут зависеть от шага времени Δt, и поэтому, такие временные переходы не являются запрещенными.

Используя зависимости (4)-(5), а так же выбирая в качестве константы κ значение $\kappa=\langle q\rangle_k$, перепишем выражение (3) в виде

$$\frac{\partial\tilde q}{\partial t}=\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(q-\langle q\rangle_k\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde q}\frac{\partial\tilde q}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}q=$$

$$=\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(q-\langle q\rangle_k\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde q}\left(\tilde q_k-\tilde q_{k-1}\right)\times$$

$$\times\left|\frac{\left(\frac{\partial\varphi(t,q)|_{q=\tilde{q}_k}}{\partial t}\right)_{t=t_k}}{\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde{q}_k}}\right|\delta(q-\tilde{q}_k)\,\mathrm{d}q=\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}+$$

$$+\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k\right)(\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1})\left|\frac{\left(\frac{\partial\varphi(t,q)|_{q=\tilde{q}_k}}{\partial t}\right)_{t=t_k}}{\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde{q}_k}}\right|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{q}}\right)_{q=\tilde{q}_k}$$

Значение константы $\kappa=\langle q\rangle_k$, выбиралось из соображения, чтобы в том случае, если $\tilde{q}_k=\langle q\rangle_k$, изменение параметра q в следующий момент времени не зависело бы от изменения функции φ, то есть выполнялось бы соотношение: $\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t}=\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}$.

Осредняя левую и правую часть полученного выражения по функции распределения $\varphi\mathrm{d}q$, получим соотношение

$$\left\langle\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}\right\rangle+\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k\right)(\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1})\times$$

$$\times\left|\frac{\left(\frac{\partial\varphi(t,q)|_{q=\tilde{q}_k}}{\partial t}\right)_{t=t_k}}{\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde{q}_k}}\right|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{q}}\right)_{q=\tilde{q}_k}\qquad(6)$$

Обратимся к левой части выражения (6). Используя выражения (4)–(5), получим

$$\left\langle\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t}\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t}\varphi(t,q)\,dq=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial t}\varphi(t,q)\,\mathrm{d}q=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1})\left|\frac{\left(\frac{\partial\varphi(t,q)|_{q=\tilde{q}_k}}{\partial t}\right)_{t=t_k}}{\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde{q}_k}}\right|\delta(q-\tilde{q}_k)\varphi(t,q)\,\mathrm{d}q=$$

$$=(\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1})\left|\frac{\left(\frac{\partial\varphi(t,q)|_{q=\tilde{q}_k}}{\partial t}\right)_{t=t_k}}{\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=q_k}}\right|\varphi_k(q)|_{q=\tilde{q}_k}$$

Значение $\left\langle\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}\right\rangle$ в правой части выражения (6) в приближении линейной интерполяции изменения по времени функции $\varphi(t,q)$ и ее производных на интервале $t_{k-1}\le t\le t_k$, можно так же найти, используя выражения (4)–(5). Для этого заметим, что в случае рассмотрения любой неизменной во времени функции $\varphi(q)$, имеют место соотношения

$$\langle\Delta q\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta q\varphi(q)\,\mathrm{d}q=0\ \text{ и}$$

$$\left\langle\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}\varphi(q)\,\mathrm{d}q=\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta q\varphi(q)\,\mathrm{d}q=0$$

Поэтому ненулевое значение величины $\left\langle\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}\right\rangle$ на интервале $t_{k-1}\le t\le t_k$, может быть обусловлено только изменением функции $\varphi(t,q)$ во времени. Следовательно, среднее значение производной $\left\langle\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}\right\rangle$, можно записать в виде:

$$\left\langle\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial(\Delta q)}{\partial t}\varphi(t,q)\,\mathrm{d}q=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial(\Delta q)}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{q}}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial t}\varphi(t,q)\,\mathrm{d}q=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\Delta\left(\frac{1}{\partial\varphi/\partial q}\right)\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{q}}(\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1})\times$$

$$\times\left|\frac{\left(\frac{\partial\varphi(t,q)|_{q=\tilde{q}_k}}{\partial t}\right)_{t=t_k}}{\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde{q}_k}}\right|\delta(q-\tilde{q}_k)\varphi(t,q)\,\mathrm{d}q=$$

$$=\left[\Delta\left(\frac{1}{\partial\varphi/\partial q}\right)\right]_{q=\tilde{q}_k}(\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1})\times$$

$$\times\left|\frac{\left(\frac{\partial\varphi(t,q)|_{q=q_k}}{\partial t}\right)_{t=t_k}}{\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde{q}_k}}\right|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{q}}\right)_{q=\tilde{q}_k}\varphi_k(q)|_{q=\tilde{q}_k}$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (6), приходим к зависимости

$$\varphi_k(q)|_{q=\tilde{q}_k}=\left[\Delta\left(\frac{1}{\partial\varphi(t,q)/\partial q}\right)\right]_{q=\tilde{q}_k}\times$$

$$\times\varphi_k(q)|_{q=\tilde{q}_k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{q}}\right)_{q=\tilde{q}_k}+\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{q}}\right)_{q=\tilde{q}_k}$$

В общем случае линейного приближения изменения функции на интервале времени $t_{k-1}\le t\le t_k$ производная $(\partial\varphi/\partial\tilde{q})_{q=\tilde{q}_k}$ может быть записана в виде

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{q}}\right)_{q=\tilde{q}_k}\approx\frac{\varphi_k(q)|_{q=\tilde{q}_k}-\varphi_{k-1}(q)|_{q=\tilde{q}_k}}{\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1}}$$

Тогда полученное выражение принимает вид

$$\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1}=\left(\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}-\varphi_{k-1}(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}\right)\times$$
$$\times\left\{\left[\Delta\left(\frac{1}{\partial\varphi(t,q)/\partial q}\right)\right]_{q=\tilde{q}_k}+\frac{\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k}{\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}}\right\},$$

из которого, в приближении линейной интерполяции, и учитывая непрерывность изменения по времени функции φ

$$\left(\frac{\partial\varphi(t,q)}{\partial q}\right)_{t=t_{k-1},q=\tilde{q}_k}=\left(\frac{\partial\varphi_{k-1}(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde{q}_k} \text{ и}$$
$$\left(\frac{\partial\varphi(t,q)}{\partial q}\right)_{t=t_k,q=\tilde{q}_k}=\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde{q}_k},$$

получаем

$$\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1}=\left(\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}-\varphi_{k-1}(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}\right)\times$$
$$\times\left[\left(\frac{1}{(\partial\varphi_k(q)/\partial q)_{q=\tilde{q}_k}}-\frac{1}{\partial\varphi_{k-1}(q)/\partial q_{q=\tilde{q}_k}}\right)+\frac{\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k}{\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}}\right] \tag{7}$$

Выражение (7), связывающее реализованный в момент времени t_k параметр $\tilde{q}_k$ с реализованным параметром в момент времени t_{k-1}, а также с плотностью вероятности распределения и ее производной на текущем шаге, с плотностью вероятности распределения и ее производной на предыдущем шаге (все в точке $\tilde{q}_k$), является инвариантным относительно изменения временных масштабов рассмотрения исследуемых систем. Это связано с тем, что при выводе соотношения (7) выбирался произвольный шаг по времени Δt, величина, которого не вошла в окончательное выражение.

Тем не менее, масштаб времени Δt опосредованно через значение функции $\varphi_{k-1}(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}$ и значение производной $\left(\frac{\partial\varphi_{k-1}(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde{q}_k}$ влияет на значения прогнозируемых в следующий момент времени величин $\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}$, $\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde{q}_k}$ и $\langle q\rangle_k$. В самом деле, зафиксировав реализованное на текущем k-м шаге значение $\tilde{q}_k$ и взяв в качестве предыдущего, $(k-1)$-го шага точку, отстоящую от точки k не на расстояние Δt, а на расстояние $n\Delta t$, где n – любое положительное число, мы получим другие эмпирические значения $\tilde{q}_{k-1}$, $\varphi_{k-1}(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}$ и $\left(\frac{\partial\varphi_{k-1}(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde{q}_k}$, а следовательно (в соответствие с выражением (7)), и другие значения функции $\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}$, ее производной $\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde{q}_k}$ и величины $\langle q\rangle_k$ на текущем k-м шаге. Полученные таким образом новые значения $\varphi_k(q)\big|_{q=\tilde{q}_k}$, $\left(\frac{\partial\varphi_k(q)}{\partial q}\right)_{q=\tilde{q}_k}$ и $\langle q\rangle_k$ будут являться характеристиками нового (большего, если $n>1$, и меньшего, если $n<1$) временного масштаба рассмотрения системы. Однако такое влияние масштаба времени Δt не носит регулярного характера на величины прогнозируемых параметров – их одинаковые значения могут быть получены на разных временных масштабах рассмотрения.

Отсутствие параметра Δt в соотношении (7) ведет к тому, что при таком подходе отпадает необходимость специально вводить случайный процесс, описывающий вероятностные по времени скачки изменения системы, как это делают, например, при описании пуассоновских процессов [4].

Значение $\tilde{q}_k$ в соотношении (7) напрямую не зависит от величины $\tilde{q}_{k-1}$, то есть на плоскости (t,q) параметр $\tilde{q}_i$ ведет себя как случайная величина.

Учитывая, что $\langle q\rangle_k$ и $\langle q\rangle_{k-1}$ являются константами, характеризующие распределения φ_k и φ_{k-1}, выражение (7) можно записать в виде

$$\frac{\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1}}{\varphi_k\left(q-\langle q\rangle_k\right)\big|_{q=\tilde{q}_k}}=\left[1-\frac{\varphi_{k-1}\left(q-\langle q\rangle_{k-1}\right)\big|_{q=\tilde{q}_k}}{\varphi_k\left(q-\langle q\rangle_k\right)\big|_{q=\tilde{q}_k}}\right]\times$$
$$\times\left\{\left[\frac{1}{\left(\dfrac{\partial\varphi_k\left(q-\langle q\rangle_k\right)}{\partial\left(q-\langle q\rangle_k\right)}\right)_{q=\tilde{q}_k}}-\frac{1}{\left(\dfrac{\partial\varphi_{k-1}\left(q-\langle q\rangle_{k-1}\right)}{\partial\left(q-\langle q\rangle_{k-1}\right)}\right)_{q=\tilde{q}_k}}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k}{\varphi_k\left(q-\langle q\rangle_k\right)\big|_{q=\tilde{q}_k}}\right\}$$

В выражениях для производных $\left(\frac{\partial\varphi_{k-1}\left(q-\langle q\rangle_{k-1}\right)}{\partial\left(q-\langle q\rangle_{k-1}\right)}\right)_{q=\tilde{q}_k}$, $\left(\frac{\partial\varphi_k\left(q-\langle q\rangle_k\right)}{\partial\left(q-\langle q\rangle_k\right)}\right)_{q=\tilde{q}_k}$ и для функций $\varphi_{k-1}\left(q-\langle q\rangle_{k-1}\right)\big|_{q=\tilde{q}_k}$, $\varphi_k\left(q-\langle q\rangle_k\right)\big|_{q=\tilde{q}_k}$, переменную q заменим новой переменной $\tilde{q}_k$. Тогда полученное соотношение можно переписать:

$$\frac{\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1}}{\varphi_k\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k\right)}=\left(1-\frac{\varphi_{k-1}\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_{k-1}\right)}{\varphi_k\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k\right)}\right)\times$$
$$\times\left\{\left[\frac{1}{\dfrac{\partial\varphi_k\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k\right)}{\partial\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k\right)}}-\frac{1}{\dfrac{\partial\varphi_{k-1}\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_{k-1}\right)}{\partial\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_{k-1}\right)}}\right]+\frac{\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k}{\varphi_k\left(\tilde{q}_k-\langle q\rangle_k\right)}\right\}$$

или, обозначив $\tilde{q}_k-\langle q\rangle_i:=p_i$ (где $i=k-1,k$), записать

$$\frac{p_k-\left(\tilde{q}_{k-1}-\langle q\rangle_k\right)}{\varphi_k(p_k)}=\left(1-\frac{\varphi_{k-1}(p_{k-1})}{\varphi_k(p_k)}\right)\times$$
$$\times\left[\left(\frac{1}{\partial\varphi_k(p_k)/\partial p_k}-\frac{1}{\partial\varphi_{k-1}(p_{k-1})/\partial p_{k-1}}\right)+\frac{p_k}{\varphi_k(p_k)}\right] \tag{8}$$

Соотношение (8), связывающее в двух точках t_{k-1} и t_k значения параметра p_i (которое представляет собой отклонение величины $\tilde{q}_k$ от среднего значения $\langle q\rangle$ в каждой точке), а также плотности вероятности реализации значений p_i, является основным решением задачи определения динамики стохастического процесса в линейном приближении.

Сделаем допущение, что реализованное значение на предыдущем шаге не просто "стремится" стать средним значением на шаге текущем, а становится им: $\tilde{q}_{k-1} = \langle q\rangle_k$. В этом случае получаем

$$\frac{p_k}{\varphi_k(p_k)} = \left(1 - \frac{\varphi_k(p_k)}{\varphi_{k-1}(p_{k-1})}\right)\left(\frac{1}{\dfrac{\partial\varphi_{k-1}(p_{k-1})}{\partial p_{k-1}}} - \frac{1}{\dfrac{\partial\varphi_k(p_k)}{\partial p_k}}\right)$$

Зафиксируем значение $\tilde{q}_k$. Тогда значение функции $\varphi_{k-1}(p_{k-1})$, ее производная $\dfrac{\partial\varphi_{k-1}(p_{k-1})}{\partial p_{k-1}}$, а также среднее значение $\langle q\rangle_{k-1}$ являются определенными на предыдущем $(k-1)$-м шаге времени константами:

$$\varphi_{k-1}(p_{k-1}) := \varphi_{k-1} = \text{const},$$

$$\frac{\partial\varphi_{k-1}(p_{k-1})}{\partial p_{k-1}} := \frac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial p_{k-1}} = \text{const},\ \langle q\rangle_{k-1} = \text{const},$$

где $p_{k-1} = \tilde{q}_k - \langle q\rangle_{k-1}$). Изменяемыми величинами будут функция $\varphi_k(p_k)$, производная $\partial\varphi_k(p_k)/\partial p_k$, величина $\tilde{q}_{k-1}$ (как случайная реализация параметра q в момент времени t_{k-1}), а также параметр p_k (за счет изменения значения $\langle q\rangle_k = \tilde{q}_{k-1}$). Опуская в последнем выражении индексы k, перепишем его в виде

$$\frac{1}{\partial\varphi(p)/\partial p} = \frac{1}{\partial\varphi_{k-1}/\partial p_{k-1}} - \frac{p}{\varphi(p)\left[1 - \left(\varphi(p)/\varphi_{k-1}\right)\right]} \tag{9}$$

Соотношение (9) – это обыкновенное дифференциальное уравнение. Записав его в виде

$$\varphi\left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_{k-1}}\right)\frac{\partial p}{\partial\varphi} + p = \frac{1}{\partial\varphi_{k-1}/\partial p_{k-1}}\varphi\left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_{k-1}}\right)$$

и сделав замену $\partial\Omega = \dfrac{\partial\varphi}{\varphi\left(1 - \dfrac{\varphi}{\varphi_{k-1}}\right)} = -\partial\left(\ln\left|\dfrac{1}{\varphi} - \dfrac{1}{\varphi_{k-1}}\right|\right)$,

перейдем к выражению

$$\frac{\partial p}{\partial\Omega} + p = \pm\frac{\varphi_{k-1}^2}{\dfrac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial p_{k-1}}}\frac{e^{-\Omega}}{\left(1 \pm \varphi_{k-1}e^{-\Omega}\right)^2},\ \text{где}\ \Omega = -\ln\left|\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi_{k-1}}\right|$$

Таким образом, уравнение (9) расщепляется на два соотношения – одно для верхнего, а второе для нижнего знаков, стоящих в последнем выражении.

Сделав в этом выражении подстановку $\Omega = \ln\omega$, где $\omega > 0$, получим соотношение

$$\frac{\partial(p\omega)}{\partial\omega} = \pm\frac{\varphi_{k-1}}{\dfrac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial p_{k-1}}}\frac{\varphi_{k-1}/\omega}{\left(1 \pm \dfrac{\varphi_{k-1}}{\omega}\right)^2},$$

где $\dfrac{\varphi_{k-1}}{\omega} = \left|\dfrac{\varphi_{k-1}}{\varphi} - 1\right|$ или

$$p = \pm\frac{\varphi_{k-1}}{\dfrac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial p_{k-1}}}\frac{\varphi_{k-1}}{\omega}\int\frac{\dfrac{\varphi_{k-1}}{\omega}}{\left(1 \pm \dfrac{\varphi_{k-1}}{\omega}\right)^2}d\left(\frac{\omega}{\varphi_{k-1}}\right)$$

Проинтегрировав это выражение и сделав обратные преобразования: $\omega(\varphi(p)) \to \varphi(p)$, получим:

$$\frac{1}{\varphi_{k-1}}\frac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial p_{k-1}}p = \left|\frac{\varphi_{k-1}}{\varphi} - 1\right|\left(\frac{1}{\left|\dfrac{\varphi_{k-1}}{\varphi} - 1\right|^{-1} \pm 1} \pm \ln\left|\left|\frac{\varphi_{k-1}}{\varphi} - 1\right|^{-1} \pm 1\right|\right) \tag{10}$$

Вводя функцию $\psi = \psi(p) = \left|\dfrac{\varphi_{k-1}}{\varphi(p)} - 1\right|$, перепишем выражение (10) в более компактной форме:

$$\frac{1}{\varphi_{k-1}}\frac{\partial\varphi_{k-1}}{\partial p_{k-1}}p = \psi\left(\frac{\psi}{1 \pm \psi} \pm \ln\left|\frac{1 \pm \psi}{\psi}\right|\right) \tag{11}$$

Выражение (11) (или (10)) в неявном виде задает два класса соотношений (в зависимости от реализации знака «+» или «-») для $\psi = \psi(\varphi(p))$, являющихся общими решениями задачи определения динамики стохастического процесса в линейном приближении, в которой реализованный на предыдущем шаге параметр становится средним значением плотности вероятности на текущем шаге. Естественно, учитывать надо только действительные положительные решения этих уравнений.

В этих выражениях значение плотности вероятности на текущем шаге зависит от его значения на шаге предыдущем. Поэтому необходимо разработать подходы определения уже реализованных плотностей вероятности хотя бы для отдельных классов задач. Рассмотрим один из возможных подходов.

Функции $\varphi = \varphi(p)$, в неявном виде представленные выражением (10) (или (11)), описывают вероятность реализации величин p в заданный момент времени t. Если же мы рассмотрим распределение реализованных величин p в промежутке времени от t до $t + \Delta t$, где интервал Δt такой, что в течение этого времени происходит n реализаций параметра p, причем $n \to \infty$, то в соответствии с Центральной Предельной Теоремой Линдеберга [6] функция распределения величин p на этом интервале будет стремиться к нормальному (Гаусовскому) распределению

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-p^2/2\sigma^2}$$

Выбирая шаг по времени Δt, мы, тем самым, закладываем временную неопределенность исследования процесса, характеризуемую функцией распределения величин p на интервале времени Δt. Проецируя промежуток времени $t_{k-2} < t \le t_{k-1}$ в точку $t = t_{k-1}$ - переносим эту временную неопределенность в неопределенность реализации величин p в заданный момент времени, характеризуемую плотностью вероятности распределения величин p. Таким образом, можно ассоциировать функцию распределения на интервале времени Δt с плотностью вероятности в момент времени $t = t_{k-1}$.

В таком подходе в приближении бесконечного числа реализаций на интервале времени Δt можно определить значение выражения $\frac{1}{\varphi_{k-1}}\frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial p_{k-1}}$, стоящего в левой части уравнения (11). Оно представляет собой величину, обратно пропорциональную дисперсии распределения величин p в интервале времени $t_{k-2} < t \le t_{k-1}$, взятую со знаком минус: $\frac{1}{\varphi_{k-1}}\frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial p_{k-1}} = -\frac{p_{k-1}}{\sigma_{k-1}^2}$. В качестве величины $\langle q \rangle_{k-1}$ нужно взять среднее значение q на интервале $t_{k-2} < t \le t_{k-1}$:

$$\langle q \rangle_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{k-1}^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q e^{-\frac{\left(q-\langle q \rangle_{k-1}\right)^2}{2\sigma_{k-1}^2}} \mathrm{d}q,$$

а в качестве величины p_{k-1}, в соответствии с выражениями: $p_{k-1} = \tilde{q} - \langle q \rangle_{k-1}$, $p = \tilde{q} - \langle q \rangle$ и $\langle q \rangle = \tilde{q}_{k-1}$, принять значение: $p_{k-1} = p + \tilde{q}_{k-1} - \langle q \rangle_{k-1}$, где $\tilde{q}_{k-1}$ - случайное значение параметра q, которое реализуется в момент времени $t = t_{k-1}$, то есть последнее значение на интервале $t_{k-2} < t \le t_{k-1}$.

Используя приведенные соотношения, перепишем выражение (11) в виде

$$\frac{\left(\tilde{q} - \langle q \rangle_{k-1}\right)\left(\tilde{q} - \tilde{q}_{k-1}\right)}{\sigma_{k-1}^2} = -\psi\left(\frac{\psi}{1 \pm \psi} \pm \ln\left|\frac{1 \pm \psi}{\psi}\right|\right), \qquad (12)$$

где

$$\psi = \psi(\tilde{q}) = \left|\frac{\varphi_{k-1}(\tilde{q})}{\varphi(\tilde{q})} - 1\right|, \quad \varphi_{k-1}(\tilde{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{k-1}^2}} e^{-\frac{\left(\tilde{q}-\langle q \rangle_{k-1}\right)^2}{2\sigma_{k-1}^2}}$$

Обратное преобразование $\varphi(\tilde{q}) = \varphi(\psi(\tilde{q}))$:

$$\varphi(\psi(\tilde{q})) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_{k-1}(\tilde{q})}{1 + \psi(\tilde{q})} \\ \dfrac{\varphi_{k-1}(\tilde{q})}{1 - \psi(\tilde{q})} \end{cases}$$

приведет к дополнительной бифуркации решений данной задачи.

По известным на предыдущем $(k-1)$-м шаге значениям $\langle q \rangle_{k-1}$ и σ_{k-1}, используя выражение (12), можно вычислить на шаге текущем спектр возможных значений плотности вероятности $\varphi(\tilde{q})$ для каждого ожидаемого значения реализации $\tilde{q}$.

Алгоритм определения вероятности реализации значения $\tilde{q}$ на текущем шаге по известным данным на предыдущем, должен быть следующим.

1. Для заданного значения $\tilde{q}$ при известных значениях величин $\langle q \rangle_{k-1}$, σ_{k-1}, $\tilde{q}_{k-1}$, используя уравнение (12), находим соответствующее множество Q_ψ (в него включаем только действительные положительные значения ψ): $Q_\psi = \{\psi\}$, $\psi \in R$, $\psi > 0$.
2. Используя соотношения: $\psi(\tilde{q}) = \left|\frac{\varphi_{k-1}(\tilde{q})}{\varphi(\tilde{q})} - 1\right|$ и $\varphi_{k-1}(\tilde{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{k-1}^2}} e^{-\frac{\left(\tilde{q}-\langle q \rangle_{k-1}\right)^2}{2\sigma_{k-1}^2}}$, для каждого элемента ψ из множества Q_ψ находим два соответствующих значения $\varphi(\psi(\tilde{q}))$:
$$\varphi(\psi(\tilde{q})) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_{k-1}(\tilde{q})}{1 + \psi(\tilde{q})} \\ \dfrac{\varphi_{k-1}(\tilde{q})}{1 - \psi(\tilde{q})} \end{cases}$$
Оставляем только положительные значения $\varphi(\psi(\tilde{q}))$. Множество всех полученных положительных элементов φ обозначим Q_φ: $Q_\varphi = \{\varphi\}$, $\varphi > 0$.
3. Вероятность реализации каждого элемента φ из множества Q_φ будем считать одинаковой. Поэтому вероятность реализации значения $\tilde{q}$ на текущем шаге определяем, как среднеарифметическое значение всех значений элементов множества Q_φ и обозначаем $\langle \varphi(\tilde{q}) \rangle$.
4. Если процедуры, описанные в пунктах 1-3, проделать для двух различных значений параметра $\tilde{q}$: $\tilde{q}_a$ и $\tilde{q}_b$, и для каждого из них найти соответствующие значения вероятности реализации $\langle \varphi(\tilde{q}) \rangle$: $\langle \varphi_a(\tilde{q}_a) \rangle$ и $\langle \varphi_b(\tilde{q}_b) \rangle$, то, вновь ассоциируя функцию распределения величин $\tilde{q}$ на временном интервале $t_{k-1} < t \le t_k$ с вероятностью распределения в момент $t = t_k$ и устремляя ее (в соответствии с Центральной Предельной Теоремой Линдеберга) к нормальному виду: $\langle \varphi(\tilde{q}) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\left(\tilde{q}-\langle q \rangle\right)^2}{2\sigma^2}}$, можно найти значения параметров $\langle q \rangle$ и σ на этом временном интервале, решив для этого систему уравнений

$$\begin{cases} \left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\left(\tilde{q}_a-\langle q\rangle\right)^2}{2\sigma^2}} \\ \left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\left(\tilde{q}_b-\langle q\rangle\right)^2}{2\sigma^2}} \end{cases}$$

Для определенности выберем обозначения “a” и “b” такими, чтобы $\left(\tilde{q}_a-\langle q\rangle\right)^2 > \left(\tilde{q}_b-\langle q\rangle\right)^2$ и, следовательно, $\left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle < \left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle$. Кроме того, выберем близкие по величине отклонения реализованных значений от среднего значения параметра q: $\tilde{q}_a \to \langle q\rangle$, $\tilde{q}_b \to \langle q\rangle$, $\tilde{q}_a \neq \tilde{q}_b$. В этом случае, выражения для значений параметров $\langle q\rangle$ и σ^2, найденные из этой системы уравнений, имеют вид

$$\langle q\rangle \approx \frac{\tilde{q}_a+\tilde{q}_b}{2} + \frac{\tilde{q}_a-\tilde{q}_b}{2}\left\{ \frac{\ln\left[\dfrac{2\pi\left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle\left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle}{\ln\left(\dfrac{\left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle}{\left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle}\right)}\right]}{\ln\left(\dfrac{\left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle}{\left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle}\right)} \pm \right.$$

$$\left. \pm\sqrt{\frac{\ln^2\left[\dfrac{2\pi\left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle\left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle}{\ln\left(\dfrac{\left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle}{\left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle}\right)}\right]}{\ln^2\left(\dfrac{\left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle}{\left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle}\right)}-1}\right\},$$

$$\sigma^2 \approx -\frac{\left(\tilde{q}_a-\tilde{q}_b\right)^2}{2\ln\left(\dfrac{\left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle}{\left\langle \tilde{\varphi}_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle}\right)}\left\{ \frac{\ln\left(\dfrac{2\pi\left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle\left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle}{\ln\left(\dfrac{\left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle}{\left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle}\right)}\right)}{\ln\left(\dfrac{\left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle}{\left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle}\right)} \pm \right.$$

$$\left. \pm\sqrt{\frac{\ln^2\left[\dfrac{2\pi\left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle\left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle}{\ln\left(\dfrac{\left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle}{\left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle}\right)}\right]}{\ln^2\left(\dfrac{\left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle}{\left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle}\right)}-1}\right\}$$

Условие $\sigma^2 > 0$, будет выполняться только в случае, если $\dfrac{2\pi\left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle\left\langle \tilde{\varphi}_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle}{\ln\left(\left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle / \left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle\right)} < 1$. То есть, когда значения средних плотностей вероятности: $\left\langle \varphi_a\left(\tilde{q}_a\right)\right\rangle$ и $\left\langle \varphi_b\left(\tilde{q}_b\right)\right\rangle$ – близки к нулю, что соответствует случаю большой дисперсии величины $\left\langle \varphi\left(\tilde{q}\right)\right\rangle$. К стохастическим процессам, соответствующим данному условию, можно отнести, например, развитые турбулентные течения, в которых практически нет выделенных масштабов пульсаций – имеет место достаточно однородное их распределение.

Описанный в работе [7] метод определения динамики стохастических процессов для систем, в которых реализуются большие значения производных плотности вероятности распределения по параметру

$$\tilde{q}:\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{q}}\right)_{q=\tilde{q}_k} \approx \frac{\varphi_k\left(q\right)\big|_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}\left(q\right)\big|_{q=\tilde{q}_k}}{\tilde{q}_k-\tilde{q}_{k-1}} \gg 1,$$

соответствует реализации стохастических процессов с плотностями вероятности распределений с малой дисперсией. Поэтому метод определения динамики стохастических процессов в приближении нормального распределения плотности вероятности реализации случайных величин, приведенный в данной работе, и метод, описанный в работе [7], можно считать противоположными предельными случаями решения поставленной задачи.

ВЫВОДЫ

Расширение пространства переменных: $(t,q)\to(t,q;\varphi)$ и рассмотрение в этом пространстве непрерывно изменяющейся плотности вероятности $\varphi=\varphi(t,q)$, позволило получить соотношение, в неявном виде задающее плотность вероятности реализации исследуемого параметра в заданный момент времени. Соотношение получено в предположении, что реализованное значение на предыдущем шаге становится средним значением на шаге текущем.

Приведен алгоритм решения этого уравнения в приближении нормального (Гаусовского) распределения с изменяющимися от шага к шагу средним значением исследуемого параметра и дисперсией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chorin A. Numerical study of slightly viscous flow. J.F.M. V.57, № 4, 1973.
2. Хлопков Ю.И. Статистическое моделирование в вычислительной аэродинамике. – М.: ООО «Азбука – 2000», 2006. – 158 с.
3. Петров А.С. Применение теории к решению уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости.// «Обозрение прикладной и промышленной математики», 2005, Т.12, в. 2, С. 253–264.
4. Анищенко В.С., Вадисова Т.Е., Шиманский-Гайер Л. Динамическое и статическое описание колебательных систем. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”; Институт компьютерных исследований, 2005.- 156 с.
5. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
6. Харин Ю.С., Зуев Н.М. Теория вероятностей. Учебное пособие. Мн.: БГУ, 2004. -199 с.
7. Хатунцева О.Н. Описание динамики марковских процессов в расширенном пространстве переменных. Журнал “Ученые записки ЦАГИ” №1 2011 г. (принято к печати).