

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ НА ОСНОВЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ R13

И.Э. Иванов², И.А. Крюков¹, М.Ю. Тимохин²

¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,
Москва, 119526, проспект Вернадского 101-1*

² *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет,
Москва, 119992, Воробьевы горы, 1*

Аннотация

В работе рассмотрены вопросы математического моделирования переходных течений на основе регуляризованной системы моментных уравнений R13 и численный метод для решения этой системы в двумерном случае. Показано, что система R13 позволяет получить заброс температуры за фронтом ударной волны при больших числах Маха, который не описывается в рамках уравнений Навье – Стокса. Особое внимание уделено постановке граничных условий на твердой поверхности. Приведено решение нескольких тестовых задач для проверки работы этих граничных условий в течениях с малыми числами Кнудсена.

NUMERICAL SIMULATION OF HIGH SPEED FLOWS BASED ON REGULARIZED 13 MOMENT EQUATIONS R13

I.E. Ivanov², I.A. Kryukov¹, M.Yu. Timokhin²

¹ *Institute for Problems in Mechanics Russian Academy of Sciences, Russia, Moscow, 119526*

² *Lomonosov Moscow State University, Russia, Moscow, 119991*

The article is devoted to mathematical modeling of rarefied flows in transitional regime using the regularized moment equations R13 and to numerical method for solution of the system in 2D. It was shown that the system R13 allows to obtain the overheat behind a shock wave front for large Mach numbers which can not be obtained with Navier – Stocks equations. Special attention was given to wall boundary conditions. Solutions of some test problems with small Knudsen number are shown for verification of these boundary conditions implementation.

1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени достаточно хорошо исследованы системы уравнений, описывающие сплошную среду (уравнения Эйлера и Навье – Стокса) и накоплен обширный опыт численного моделирования на основе этих уравнений. Разреженные газы хорошо моделируются с помощью уравнения Больцмана или же методом прямого моделирования Монте-Карло. Моделирование же переходных процессов вызывает определенные трудности.

С одной стороны моделирование процессов в переходных режимах с помощью уравнений Навье – Стокса (подход сплошной среды) не всегда приводят к физическим результатам. С другой стороны можно было бы производить моделирование с помощью Монте-Карло и уравнения Больцмана с учетом интеграла столкновений (корпускулярный подход). Но в этом случае необходима мощность вычислительной базы на несколько порядков большая, нежели при использовании уравнений Навье – Стокса.

Следует отметить, что переходный режим является неотъемлемой частью некоторых практических задач. Так, например, он встречается при входе летательного аппарата в верхние слои атмосферы, где достаточно велика средняя длина свободного пробега. С другой стороны прикладное значение этот режим имеет и при уменьшении характерного размера среды. Это акту-

ально для течений в микроканалах и микросоплах, где мала средняя длина свободного пробега, но при этом характерный размер вполне сравним с ней.

С середины 20-го столетия активно развивается подход, при котором с помощью уравнения Больцмана выводится и решается система моментных уравнений (система законов сохранения сплошной среды), которая записывается относительно макропараметров и которая определенным образом моделирует поведение разреженного газа в переходной области [1]. Для линейаризованного уравнения Больцмана существует также метод Чепмена – Энскога полиномиального разложения функции распределения [2].

В общем случае система моментных уравнений является бесконечномерной. Поэтому для получения конечной системы оставляют только определенное количество уравнений, а остальные отбрасываются. Входящие в полученную систему моменты высшего порядка выражаются через оставленные моменты с помощью некоторых замыкающих соотношений. Такой подход впервые реализован Грэдом [3], где с использованием простейших замыкающих соотношений получена система из 13 уравнений.

В дальнейшем были предложены системы из двадцати, из двадцати шести и более уравнений. Также были предложены различные способы замыкания этих уравнений. Помимо подхода Грэда, пожалуй, наиболее

известным является подход Барнета замыкания системы моментных соотношений [4]. Получившаяся система получила название системы Барнета. Но и эта система имеет существенный недостаток, который заключается в том, что при больших скоростях она приводит к нефизическим осцилляциям в решении. На протяжении долгого времени для систем уравнений Грэда и Барнета предлагались различные модификации, которые были направлены на устранение нефизической природы получаемых результатов. В данной работе мы остановились на тринадцатимоментной системе Грэда с предложенной её модификацией [5]. Полученная система названа авторами «регуляризованной системой Грэда» (или R13). Выбор системы именно из тринадцати моментов объясняется тем, что все переменные в этом случае имеют ясный физический смысл (плотность, скорость, тензор напряжений, тепловые потоки).

В настоящей работе для решения систем уравнений Грэда [3] и R13 [5] используется численный метод, который представляет собой вариант метода Годунова повышенного порядка точности [6] с использованием линейного восстановления параметров течения на расчетном слое. Потоки консервативных переменных через грани контрольного объема рассчитываются с помощью приближенного по методу HLL [7] решения задачи Римана. Для аппроксимации системы уравнений по времени используется модифицированный явно-неявный метод Рунге – Кутты 2-го порядка.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

2.1. Система моментных уравнений R13

В качестве математической модели в данной работе была выбрана регуляризованная тринадцатимоментная система уравнений Грэда (R13), предложенная в работе [5]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \rho \frac{\partial \frac{k}{m} T}{\partial t} + \frac{3}{2} \rho v_k \frac{\partial \frac{k}{m} T}{\partial x_k} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + p \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{ij} v_k}{\partial x_k} + \frac{4}{5} \frac{\partial q_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + 2p \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + 2\sigma_{k \langle i} \frac{\partial v_{j \rangle}}{\partial x_k} + \frac{\partial m_{ijk}}{\partial x_k} = -\frac{\sigma_{ij}}{\tau}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial q_i v_k}{\partial x_k} + \frac{5}{2} p \frac{\partial \left(\frac{k}{m} T\right)}{\partial x_i} + \frac{5}{2} \sigma_{ik} \frac{\partial \left(\frac{k}{m} T\right)}{\partial x_k} + \frac{k}{m} T \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \\ - \sigma_{ik} \frac{k}{m} T \frac{\partial \rho}{\partial x_k} - \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \frac{7}{5} q_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{2}{5} q_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \\ + \frac{2}{5} q_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{6} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} + m_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = -\frac{2}{3} \frac{q_i}{\tau}, \quad (3) \end{aligned}$$

где плотность ρ , скорость v_i , давление p , тензор напряжений σ_{ij} и тепловой поток q_i ($i = x, y, z$) составляют тринадцать физических переменных, четырнадцатая переменная, температура T , связана с остальными с помощью уравнения состояния. Моменты

более высокого порядка (новые члены в уравнениях по сравнению с системой Грэда [3]) имеют следующий вид:

$$m_{ijk} = -2\tau \left[\frac{k}{m} T \frac{\partial \sigma_{\langle ij}}{\partial x_k} - \frac{k}{m} T \sigma_{\langle ij} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_k} + \frac{4}{5} q_{\langle i} \frac{\partial v_{j \rangle}}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_{\langle ij}}{\rho} \frac{\partial \sigma_{k \rangle l}}{\partial x_l} \right],$$

$$R_{ij} = -\frac{24}{5} \tau \left[\frac{k}{m} T \frac{\partial q_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + \frac{k}{m} q_{\langle i} \frac{\partial T}{\partial x_{j \rangle}} - \frac{k}{m} T q_{\langle i} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_{j \rangle}} - \frac{1}{\rho} q_{\langle i} \frac{\partial \sigma_{j \rangle k}}{\partial x_k} + \frac{5}{7} \frac{k}{m} T \left(\sigma_{k \langle i} \frac{\partial v_{j \rangle}}{\partial x_k} + \sigma_{ki} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \sigma_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) - \frac{5}{6} \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} - \frac{5}{6} \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \sigma_{kl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right],$$

$$\Delta = -12\tau \left[\frac{k}{m} T \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \frac{5}{2} \frac{k}{m} q_k \frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{k}{m} T q_k \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} q_j \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \frac{k}{m} T \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right].$$

Во всех соотношениях, приведённых выше, k , которая не является индексом, – постоянная Больцмана, а m – масса одной молекулы. Для двумерного случая (количество уравнений в этом случае уменьшается до девяти) эту систему уравнений можно записать в дивергентном виде:

$$\frac{\partial U(W)}{\partial t} + \text{div} F(W) = P(W), \quad (4)$$

где W – вектор физических переменных

$$W = \{ \rho, v_x, v_y, p, p_x, p_y, \sigma, q_x, q_y \}^T,$$

$$p_x = \sigma_{xx}, \quad p_y = \sigma_{yy}, \quad \sigma = \sigma_{xy},$$

$$p = (p_x + p_y + p_z) / 3$$

Векторы $U(W)$, $F(W)$ и $P(W)$ являются векторами консервативных переменных, потоков и релаксационных членов соответственно. Соотношения для них приведены ранее в работе [21,22].

2.2. Граничные условия на твёрдой стенке

Попытку вывода граничных условий на твёрдой стенке для системы R13 впервые предприняли Gu и Emerson в работе [9]. В дальнейшем похожий метод использовали Struchtrup и Torrilhon для вывода своего варианта граничных условий [10] на твердой стенке. В обоих случаях был предложен вариант максвелловских граничных условий (аккомодационная модель Максвелла) [11]. Идея этой модели заключается в том, что часть молекул упруго (зеркально) отражается от стенки, сохраняя при этом модуль скорости (то есть функция распределения таких молекул остаётся неизменной после соударения со стенкой). Остальные же молекулы «прилипают» к стенке и остаются на ней в

течение некоторого времени, по прошествии которого они покидают её с температурой стенки и скоростями, соответствующими функции распределения Максвелла. Тогда функцией распределения на стенке будет выглядеть следующим образом:

$$f^w(u_x, u_y, u_z) = \begin{cases} \alpha f_M^w + (1-\alpha)f(u_x, -u_y, u_z), & u_y \geq 0 \\ f(u_x, u_y, u_z), & u_y \leq 0, \end{cases}$$

где $f_M^w(u_x, u_y, u_z)$ – максвелловская функция распределения, а коэффициент аккомодации α как раз учитывает число «прилипающих» к стенке молекул. Схематично задание этой составной функции распределения изображено на рис. 1.

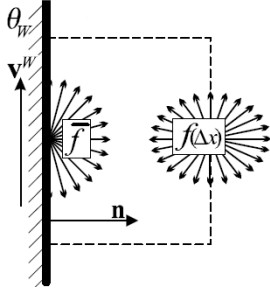


Рис. 1. Схематичное представление аккомодационной модели Максвелла

Для каждого момента на стенке должно выполняться следующее соотношение:

$$\int c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_n} f(u_x, u_y, u_z) d\vec{v} = \int c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_n} f^w(u_x, u_y, u_z) d\vec{v},$$

где $c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_n}$ – интегральный вес соответствующего момента.

Используя составную функцию распределения, это равенство можно записать следующим образом:

$$\int_{u_y \geq 0} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_n} f(u_x, u_y, u_z) d\vec{v} = \int_{u_y \geq 0} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_n} \left[\alpha f_M^w + (1-\alpha)f(u_x, -u_y, u_z) \right] d\vec{v}.$$

Тогда для того, чтобы получить условия для каждого момента на стенке, необходимо произвести интегрирование данного равенства с учетом соответствующего веса каждого момента. После интегрирования получаются следующие граничные условия [10]:

$$u = u_w - \frac{1}{p\alpha} \left(n_y \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta \frac{2-\alpha}{\alpha} \sigma_{xy} + \frac{m_{xy}}{2} + \frac{q_x}{5} \right), \quad (5)$$

$$\theta = \theta_w -$$

$$-\frac{1}{p\alpha} \left(n_y \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta \frac{2-\alpha}{\alpha} \frac{q_y}{2} + \frac{\theta \sigma_{yy}}{4} + \frac{5R_{yy}}{56} + \frac{\Delta}{30} \right) + \frac{(u-u_w)^2}{4},$$

$$R_{xy} = n_y \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{2-\alpha} \left[p\alpha \theta u_x - \frac{1}{2} \theta m_{xy} - \frac{11}{5} \theta q_x - p\alpha (u-u_w)^3 + 6p\alpha (\theta - \theta_w)(u-u_w) \right],$$

$$m_{xy} = -n_y \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{2-\alpha} \left[\frac{p\alpha}{5} (\theta - \theta_w) - \frac{4p\alpha}{5} (u-u_w)^2 + \frac{R_{xx}}{14} + \theta \left(\sigma_{xx} - \frac{\sigma_{yy}}{5} \right) + \frac{\Delta}{150} \right],$$

$$m_{yy} = n_y \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{2-\alpha} \left[\frac{2p\alpha}{5} (\theta - \theta_w) - \frac{R_{yy}}{14} + \frac{\Delta}{75} - \frac{7}{5} \theta \sigma_{yy} - \frac{3p\alpha}{5} (u-u_w)^2 \right],$$

где n_y – нормаль к поверхности стенки, направленная внутрь газа; α – коэффициент аккомодации поверхности; F – внешняя сила; u_w и θ_w – скорость и температура стенки соответственно;

$$p\alpha = p + \frac{\sigma_{yy}}{2} - \frac{R_{yy}}{28\theta} - \frac{\Delta}{120\theta}.$$

Уравнения для скорости, температуры, а также для моментов R_{xy} , m_{xy} и m_{yy} представляют собой пять, так называемых, «кинетических» граничных условий. К сожалению, остальные интегралы обнуляются (интегралы для моментов, вес которых пропорционален четной степени перпендикулярной к стенке составляющей скорости молекул [3]). Первое соотношение определяет скорость проскальзывания на стенке, второе – скачок температуры. Остальные три граничных условия являются выражениями для моментов более высокого порядка (новых моментов по сравнению с тринадцатимоментной системой Грэда). Недостающие соотношения для остальных переменных можно взять из системы моментных уравнений R13 (1)–(3).

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

3.1. Численный метод для системы R13

Для аппроксимации системы уравнений (4) введем в расчетной области двумерную регулярную сетку, состоящую из выпуклых четырехугольных ячеек. После интегрирования системы (4) по ячейке расчетной сетки аппроксимация члена $\text{div}(F)$ будет иметь вид

$$\text{div}(F)_{ij} \approx \frac{1}{A_{ij}} (\tilde{F}_{i+1/2j} + \tilde{F}_{ij+1/2} + \tilde{F}_{i-1/2j} + \tilde{F}_{ij-1/2}),$$

где $\tilde{F}_{i+1/2j}$ численный поток через грань между ячейками с индексами $i+1, j$ и i, j ,

$$\tilde{F}_{i+1/2j} = (\Delta y F_x - \Delta x F_y)_{i+1/2j}.$$

Для аппроксимации гиперболической части потока $\tilde{F}_{i+1/2j}$ (которая соответствуют системе уравнений Грэда) используется приближенный HLL метод решения задачи Римана [7]:

$$\tilde{F}_{i+1/2j} \approx \tilde{F}^{G13} = \frac{b_R}{\Delta b} \tilde{F}_L^{G13} - \frac{b_L}{\Delta b} \tilde{F}_R^{G13} + \frac{b_R b_L}{\Delta b} (U_R - U_L),$$

где индексы L и R соответствуют параметрам «слева» и «справа» от грани. Величины b_L и b_R определяются следующим образом:

$$b_L = \min(0, a_L), \quad b_R = \max(0, a_R), \quad \Delta b = b_R - b_L$$

Характеристический анализ гиперболической части системы (1)–(3) проведен в работе [8]. В соответствии с этим анализом определяются максимальные скорости распространения возмущений влево и вправо от траектории газовой частицы a_L и a_R , которые определяются в соответствии с [7] следующим образом:

$$a_L = v_{n,L} - c_L^{\max}, \quad a_R = v_{n,R} + c_R^{\max},$$

где c^{\max} задается эмпирической формулой

$$\frac{c^{\max}}{\theta^{1/2}} = c^{(p)}(P_2) + [c^{(p)}(P_1) - c^{(p)}(P_2)] |\bar{n} \cdot \bar{n}| + c^{(q)} \left(\frac{\|\bar{q}\|}{\rho \theta^{3/2}} \right) \frac{\bar{n} \cdot \bar{q}}{\|\bar{q}\|},$$

в которой $P_{1,2}$ определяются как собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} p_x/p & \sigma/p \\ \sigma/p & p_y/p \end{pmatrix},$$

а \bar{n} как собственный вектор, соответствующий P_1 . В выражение для c^{\max} входят две эмпирические функции

$$c^{(p)}(P) = c_{\max}^{(0)}/\theta^{1/2} - 0.9 + P - 0.1P^2, \\ c^{(q)}(Q) = \left[\left(c_{\max}^{(0)}/\theta^{1/2} \right)^4 + 25Q \right]^{1/4} - c_{\max}^{(0)}/\theta^{1/2}$$

Второй порядок точности по пространству на гладких решениях достигается использованием двумерных процедур восстановления [6] физических переменных внутри каждой расчетной ячейки.

Для дискретизации «эллиптической» части уравнений (диффузионных членов) используется обычная центрально-разностная аппроксимация.

Для аппроксимации по времени используется модифицированный явно-неявный метод Рунге–Кутты второго порядка [12]:

$$U^{(1)} = U^n - \Delta t \operatorname{div}(F^n) + \Delta t P(U^{(1)}),$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{2}(U^n + U^{(1)}) + \frac{\Delta t}{2} \operatorname{div}(F^{(1)}) + \frac{\Delta t}{2} P(U^{n+1}),$$

т.е. член с $\operatorname{div}(F)$ аппроксимируется явно, а релаксационный член – неявно. Поэтому в каждой ячейке на каждой стадии метода приходится решать систему нелинейных уравнений. Это не слишком сильно замедляет расчет, т.к. структура релаксационных членов позволяет легко разрешить эту нелинейную систему. Но такой подход позволяет снять жесткое ограничение на шаг по времени, связанное с релаксационными членами.

3.2. Численная реализация граничных условий на твердой изотермической стенке

Для моделирования твердой изотермической стенки, как уже было сказано в разделе 2.2, необходимо решать систему, в которую входят кинетические граничные условия (5) и часть недостающих уравнений системы (1)–(3). Тогда полная система уравнений для

постановки граничных условий выглядит следующим образом:

$$p_\alpha = p + \frac{\sigma_{yy}}{2} - \frac{R_{yy}}{28\theta} - \frac{\Delta}{120\theta},$$

$$u = u_w - \frac{1}{p_\alpha} \left(n_y \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta \frac{2-\alpha}{\alpha} \sigma_{xy} + \frac{m_{xyy}}{2} + \frac{q_x}{5} \right),$$

$$\theta = \theta_w - \frac{1}{p_\alpha} \left(n_y \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta \frac{2-\alpha}{\alpha} \frac{q_y}{2} + \frac{\theta \sigma_{yy}}{4} + \frac{5R_{yy}}{56} + \frac{\Delta}{30} \right) + \frac{(u - u_w)^2}{4},$$

$$p = p_p + \sigma_{yyp} - \sigma_{yy},$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\mu}{p(y_p - y_w)} \left[\frac{8}{5} (q_{yp} - q_y) - (m_{xyp} - m_{xxy}) \right],$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{\mu}{p(y_p - y_w)} \left[\frac{6}{5} (q_{yp} - q_y) - (m_{yyy} - m_{yyy}) \right],$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xyp} - \rho F(y_p - y_w),$$

$$q_x = -\frac{3}{2} \frac{\mu}{p(y_p - y_w)} \left[\frac{(p - \sigma_{xx})(\sigma_{xyp} - \sigma_{xy})}{\rho} + \frac{5}{2} \sigma_{xy} (\theta_p - \theta) - \frac{\sigma_{yy}}{\rho} (\sigma_{yyp} - \sigma_{yy}) - \frac{\sigma_{xy} \theta}{\rho} (\rho_p - \rho) + \left(m_{xxy} + \frac{7}{5} q_y \right) (u_p - u) + \frac{1}{2} (R_{xyp} - R_{xy}) \right],$$

$$q_y = q_{yp} + \sigma_{xy} (u_p - u),$$

$$R_{xx} = -\frac{8}{5} \frac{\mu}{\rho} \left(2 \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{q_{yp} - q_y}{(y_p - y_w)} \right),$$

$$R_{xy} = n_y \sqrt{\frac{2}{\pi \theta}} \frac{\alpha}{2-\alpha} \left[p_\alpha \theta u_s - \frac{1}{2} \theta m_{xxy} - \frac{11}{5} \theta q_x - p_\alpha (u - u_w)^3 + 6 p_\alpha (\theta - \theta_w) (u - u_w) \right],$$

$$R_{yy} = \frac{136}{25} \frac{q_y^2}{p} - \frac{72}{35} \frac{\sigma_{xy}^2}{\rho} - \frac{1}{3} \Delta,$$

$$m_{xxy} = -n_y \sqrt{\frac{2}{\pi \theta}} \frac{\alpha}{2-\alpha} \left[\frac{p_\alpha}{5} (\theta - \theta_w) - \frac{4 p_\alpha}{5} (u - u_w)^2 + \frac{R_{xx}}{14} + \theta \left(\sigma_{xx} - \frac{\sigma_{yy}}{5} \right) + \frac{\Delta}{150} \right],$$

$$m_{xyy} = \frac{32}{45} \frac{\sigma_{xy} q_y}{p} - \frac{16}{15} \mu F,$$

$$m_{yyy} = n_y \sqrt{\frac{2}{\pi \theta}} \frac{\alpha}{2-\alpha} \left[\frac{2 p_\alpha}{5} (\theta - \theta_w) - \frac{R_{yy}}{14} + \frac{\Delta}{75} - \frac{7}{5} \theta \sigma_{yy} - \frac{3 p_\alpha}{5} (u - u_w)^2 \right],$$

$$\Delta = -12 \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{q_{yp} - q_y}{(y_p - y_w)} \right),$$

где переменные, отмеченные индексом «w», являются параметрами на стенке, а отмеченные индексом «p» - параметрами в ближайшей по нормали к стенке расчётной ячейке. Для решения этой системы используется метод простых итераций.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

4.1. Структура ударной волны

Задача о структуре ударной волны была подробно рассмотрена в работе [21,22]. Там же были продемонстрированы результаты, которые показали преимущества регуляризированной тринадцатимоментной системы уравнений над оригинальной системой Грэда. В настоящей работе хотелось бы отметить еще одно достоинство рассмотренной системы уравнений. При моделировании структуры ударной волны для достаточно больших чисел Маха (для $M > 3$) в профиле температуры реализуется так называемый температурный заброс за фронтом ударной волны. На рис. 2 представлены результаты, полученные с помощью системы R13, для различных чисел Маха. Виден рост экстремума в температуре с ростом числа Маха. Температура на рис. 2 представлена в безразмерном виде, нормировка производилась на значение температуры за фронтом ударной волны. По оси абсцисс отложена пространственная координата, отнесённая к средней длине свободного пробега.

Примечательно то, что этот феномен получен как в эксперименте, так и с помощью моделирования методом Монте-Карло [17, 16], а с помощью уравнений Навье – Стокса этого эффекта получить не удаётся.

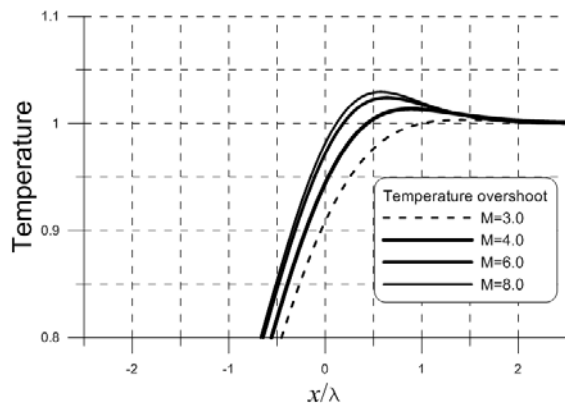


Рис. 2. Температурный заброс в структуре ударной волны с ростом числа Маха

На рис.3 приведено сравнение экспериментальных данных Шмидта [17] и численных результатов, полученных на основе решения системы R13 при числе Маха $M=8.0$. Данные на рис. 3 представлены в безразмерном виде. По оси абсцисс отложена координата, отнесённая к средней длине свободного пробега, а по оси ординат – безразмерная плотность:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho - \rho_{-\infty}}{\rho_{+\infty} - \rho_{-\infty}}$$

Профиль плотности, полученный с помощью системы R13, хорошо согласуется с экспериментальными данными.

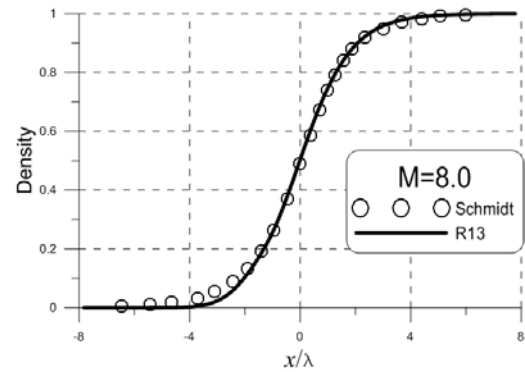


Рис. 3. Сравнение распределений плотности в ударной волне для числа Маха $M=8.0$

4.2. Задача взаимодействия ударной волны с тепловой неоднородностью

С целью показать отличие моментной системы уравнений от системы Навье – Стокса была рассмотрена двумерная задача о дифракции ударной волны на тепловой неоднородности. Расчетная область имеет размеры 5×2 . В начальный момент времени в $x = 1.0$ задается ударная волна с числом Маха $M=2.0$. Профиль ее определяется из решения соответствующей одномерной задачи. В точке с координатами $(2.5, 1.0)$ находится центр тепловой неоднородности. Распределение безразмерной плотности внутри этой неоднородности имеет следующий вид:

$$\rho = 1 + 1.5 \exp[-16(x^2 + y^2)]$$

На рис. 4 изображено распределение плотности в области в начальный момент времени.

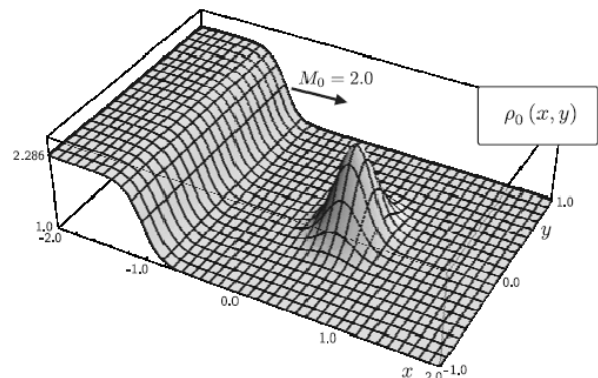


Рис. 4. Начальное распределение плотности

Расчет производился для чисел Кнудсена $Kn = 0.01$, $Kn = 0.05$ и $Kn = 0.10$ на расчетной сетке 500×200 ячеек. На рис. 5 и 6 изображены распределения плотности в области в момент времени $t = 1.0$ для $Kn = 0.01$ и $Kn = 0.10$ соответственно. При числе Кнудсена $Kn = 0.01$ система R13 и система уравнений Навье – Стокса дают практически идентичные результаты. С ростом числа Кнудсена, то есть по мере продвижения в сторону режима разреженного газа, начинают расти различия. На рис. 7 и 8 изображены срав-

нения профилей температуры и плотности, полученных с помощью R13 и с помощью Навье–Стокса для $Kn = 0.10$.

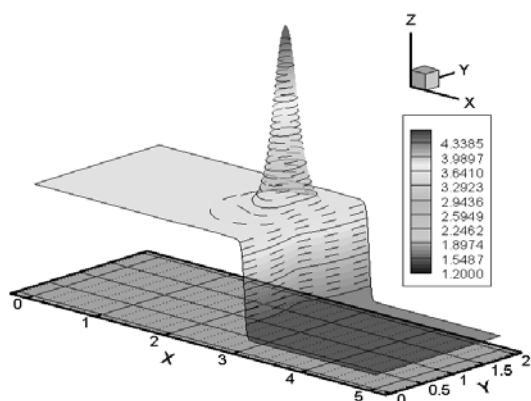


Рис. 5. Распределение плотности в момент $t = 1.0$ для $Kn = 0.01$

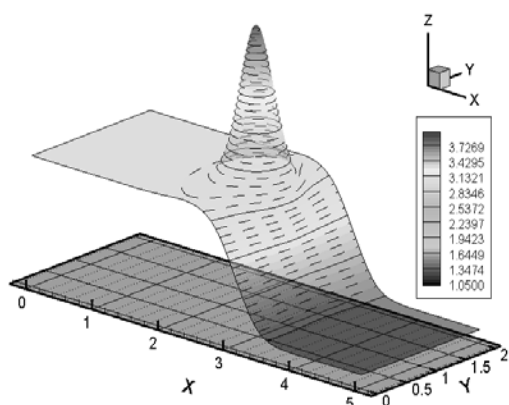


Рис. 6. Распределение плотности в момент $t = 1.0$ для $Kn = 0.10$

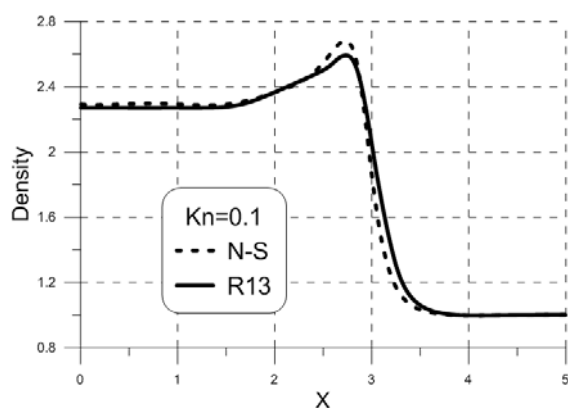


Рис. 7. Профили плотности для R13 и Навье–Стокса при $y = 1.0$ для $Kn = 0.10$

4.3. Взаимодействие газового потока с твёрдой стенкой

В качестве проверки реализации граничных условий для твёрдой стенки были рассмотрены течения плотного газа, для которых существует большое количество экспериментальных результатов, численных расчётов и аналитических решений.

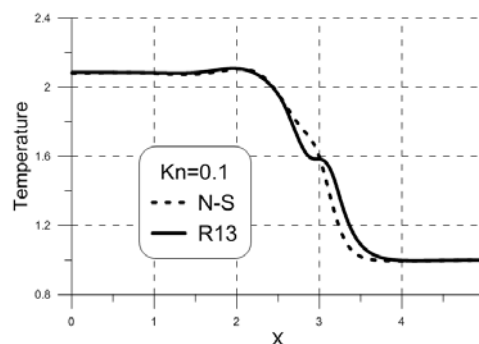


Рис. 8. Профили температуры для R13 и Навье–Стокса при $y = 1.0$ для $Kn = 0.10$

Первым тестом была выбрана задача нарастания пограничного слоя на плоской пластине в плотном газе. На плоскую изотермическую пластину набегают сверхзвуковой поток с числом Маха $M = 2.0$, давлением $p = 1$ атм, температура стенки и температура потока равны 300 К. Было проведено сравнение результатов расчетов с данными полученными на основе решения уравнений пограничного слоя методом [18]. Для сравнения были выбраны сечения течения, находящиеся от кромки пластины на расстояниях 2.0 см, 5.1 см и 12.1 см. Распределения скорости в этих сечениях показаны на рис. 9. Результаты для профилей скорости полностью совпали с данными [18] для всех трёх сечений. Ниже, на рис. 10, представлены распределения температуры (ширина пограничного слоя в температуре растёт с увеличением расстояния от кромки пластины). Различие в профилях температур незначительно и тем меньше, чем дальше сечение располагается от начала пластины. Это можно объяснить тем, что по мере удаления от передней кромки пластины возмущение, вносимое в поток при обтекании передней кромки, затухает и течение стремится к автомодельному виду. На рис. 10 сплошными линиями показаны результаты для R13, а пунктиром – данные [18].

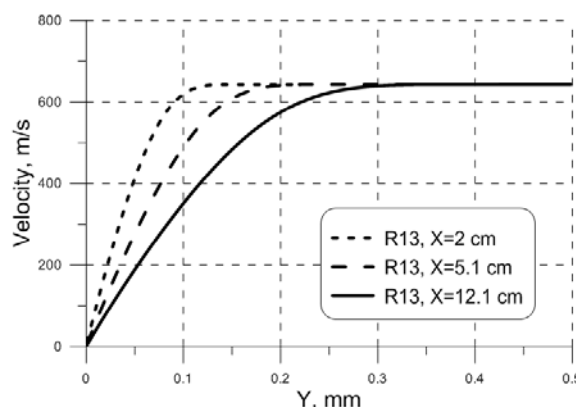


Рис. 9. Профили скорости в пограничном слое для R13

Вторым тестом была выбрана задача о течении плотного газа между двумя плоскими пластинами (течение Пуазейля в плоском канале). Поток газа инициируется разностью давлений на концах канала. Аналитическое решение для профиля скорости в течении Пуазейля хорошо известно [19]:

$$u(y) = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right], \quad u_{\max} = \frac{(\Delta p) h^2}{8\mu l}.$$

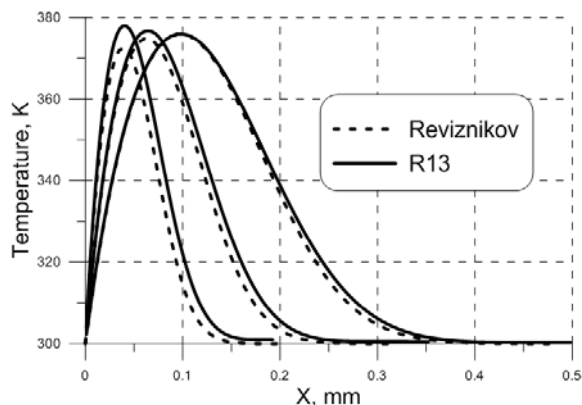


Рис. 10. Профили температуры для R13 и уравнений пограничного слоя [18]

Стационарное численное решение для системы R13 было получено методом установления путем решения двумерной нестационарной задачи. На рис. 11 представлено сравнение результатов расчётов и аналитического решения для профиля продольной скорости. Отметим несколько более замедленную скорость сходимости к стационарному решению, чем для системы Навье-Стокса-Фурье. Одним из возможных решений является переход к неявному методу (например, [23]).

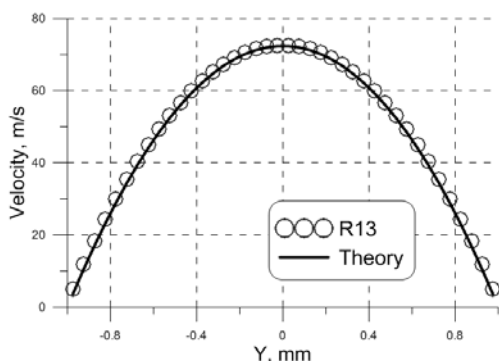


Рис. 11. Сравнение профилей скорости R13 и аналитического решения для течения Пуазейля

Из рисунка видно, что система уравнений R13 с граничными условиями, реализация которых описана в разделе 3.2, даёт хорошее совпадение с аналитическим решением. При этом проскальзывание и скачек температуры на стенке получаются пренебрежимо малыми.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был рассмотрен подход, при котором модель сплошной среды используется для численного исследования течений как плотного, так и разреженного газа. При этом в качестве математической модели для описания поведения среды используется система моментных уравнений R13.

В ходе данной работы был предложен и реализован численный метод решения системы моментных уравнений R13 для двумерного случая. Предложенный

численный метод представляет собой вариант явного метода Годунова повышенного порядка точности с использованием линейного восстановления параметров течения на расчетном слое. Конвективные потоки консервативных переменных через грани контрольного объема рассчитываются с помощью приближенного по методу HLL решения задачи Римана. Диффузионные потоки определяются с помощью конечноразностного подхода. Для аппроксимации системы уравнений по времени используется модифицированный явно-неявный метод Рунге – Кутты 2-го порядка.

Решено несколько задач для тестирования предложенного метода. Эти задачи показали возможность применения данного подхода для расчета как сверхзвуковых, так и дозвуковых течений в континуальной и в переходной области. В ходе решения описанных тестовых задач удалось показать преимущество системы R13 по сравнению с оригинальной системой Грэда и уравнениями Навье – Стокса.

В ближайшие планы входит дальнейшее улучшение работы граничных условий на твёрдой стенке для того, чтобы использовать полученный программный комплекс для расчёта более сложных задач, связанных с взаимодействием разреженного газа с твёрдой стенкой. В первую очередь, предполагается провести исследование течений разреженного газа в каналах. В дальнейшем планируется усложнить математическую модель и перейти к численному моделированию высокоскоростных разреженных течений [24,25].

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М.Н., Динамика разреженного газа. // Издательство «Наука», Москва, 1967.
2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. // Издательство «Иностранная литература», Москва, 1960.
3. Grad H., On the kinetic theory of rarefied gases. // Comm. Pure Appl. Math., 1949, 2, 331–407.
4. Burnett D., The distribution of molecular velocities and the mean motion in a non-uniform gas. // Proc. Lond. Math. Soc., 1935, Vol 40, Pp.382–435.
5. Struchtrup H., Torrilhon M., Regularization of Grad’s 13-moment-equations: Derivation and linear analysis. // Phys. Fluids, 2003, 15, 2668–2680.
6. Иванов И.Э., Крюков И.А., Квазимонотонный метод повышенного порядка точности для расчета внутренних и струйных течений невязкого газа. // Математическое моделирование, 1996, 8, 6, С.47–55.
7. Harten, P. D. Lax, B. van Leer, On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. // SIAM Rev., 25, 1983, 35.
8. Torrilhon M., Two-dimensional bulk microflow simulations based on regularized Grad’s 13-moment equations. // Multiscale Model. Simul. 2006, 5, 3, Pp.695–728.
9. Gu X.J., Emerson D.R., A computational strategy for the regularized 13 moment equations with enhanced wall-boundary conditions. // Journal of Computational Physics, 2007. Pp. 263–283.
10. Struchtrup H., Torrilhon M., Boundary conditions for regularized 13-moment-equations for micro-channel-flows. // J. Comput. Phys., 2008, 227, 1982–2011.
11. Maxwell J.C., On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature // Phil. Trans. Roy. Soc. (London) 170 (1879).Pp. 231–256.

12. Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А., Метод расчета турбулентных сверхзвуковых течений. // Математическое моделирование, 2009, 21, 12, С. 103–121.
13. Torrilhon M. and Struchtrup H., Regularized 13-moment equations: shock structure calculations and comparison to Burnett models. // J. Fluid Mech., 2004, 513, Pp.171–198.
14. Xu K. Regularization of the Chapman–Enskog expansion and its description of shock structure. // Phys. Fluids, 2002, 14, L17–L20.
15. Elizarova T.G., Shirokov I.A., Montero S., Numerical simulation of shock-wave structure for argon and helium. // Physics of Fluids, 2005, 17, 068101.
16. Bird G. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flow. Clarendon Press, Oxford 1994.
17. Schmidt B. Electron beam density measurements in shock waves in argon. // Journal of fluid mechanics, 1969, vol. 39, № 2.
18. Ревизников Д.Л. Сопряженный теплообмен при обтекании неоднородных тел. // Математическое моделирование, 2000, 7, с. 51–57.
19. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Издательство «Наука», Москва, 1969.
20. Тимохин М.Ю., Иванов И.Э., Крюков И.А. Применение системы моментных уравнений R13 для моделирования ударно-волновых газодинамических течений // Вестник Московского авиационного института, 2010, Т.17, № 7, с. 80–87.
21. Иванов И.Э., Крюков И.А., Тимохин М.Ю. Численное моделирование ударно-волновых течений с помощью моментных уравнений // Труды 3-ей Всероссийской школы-семинара «Аэрофизика и физическая механика классических и квантовых систем» (АФМ-2009), ИПМех РАН, Москва, 2010.
22. Иванов И.Э., Крюков И.А., Тимохин М.Ю. Численное моделирование ударно-волновых течений с помощью моментных уравнений // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2011. Т. 11.
<http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2011-02-01-010.pdf>
23. Ермаков М.К. Исследование возможностей матричных методов для решения уравнений Навье–Стокса // Физико-химическая кинетика в газовой динамике, 2010, Т. 9.
<http://www.chemphys.edu.ru/pdf/010-01-12-031.pdf>
24. Суржиков С.Т. Расчет обтекания модели космического аппарата MSRO с использованием кодов NERAT-2D и NERAT-3D // Физико-химическая кинетика в газовой динамике, 2010, Т. 9.
<http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2010-01-12-003.pdf>
25. Суржиков С.Т. Перспективы многоуровневого подхода к задачам компьютерной аэрофизики // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2008. Т. 7.
<http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2008-09-01-002.pdf>