

ИНДЕКС УДК 533.6.011

ВЛИЯНИЕ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ НА ТЕПЛОПЕРЕДАЧУ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Ю.Д. Шевелев, Н.Г. Сызранова

Институт автоматизации проектирования РАН, г. Москва

shevelev@icad.org.ru, nina-syzranova@ya.ru

Аннотация

Исследуется течение реагирующей газовой смеси в трехмерных ламинарных пограничных слоях, возникающих при обтекании тел гиперзвуковым потоком газа. Методом последовательных приближений находится решение системы уравнений пограничного слоя. В первом приближении выписываются соотношения для определения коэффициентов поверхностного трения и теплового потока. С помощью анализа этих соотношений, а также результатов численных расчетов неравновесных газовых смесей установлены параметры, влияющие на теплопередачу к поверхности летательных аппаратов в атмосфере планет. Получены формулы для быстрой оценки тепловых потоков в критической точке, зависящие от параметров траектории тела, движущихся в атмосфере Земли или Марса.

INFLUENCE OF CHEMICAL REACTIONS ON HEAT TRANSFER IN BOUNDARY LAYER

We study the flow of a chemically reacting gas mixture in a three-dimensional boundary layer around a blunt body. The system of equations is solved using the method of successive approximations. The coefficients of surface friction and the heat fluxes are found in the first approximation. Analyzing respective formulas and our numerical data we identify the parameters affecting the heat transfer towards the surface of a vehicle. Also, we derive formulas for a fast evaluation of the heat fluxes at the critical point, which take into account the trajectory of the body in the Earth's or Mars' atmospheres.

▪ Введение

Решая задачи по определению тепловых потоков к поверхности тел при гиперзвуковом обтекании, в общем случае необходимо использовать систему уравнений Навье-Стокса, описывающую течение вязкого теплопроводного химически реагирующего газа и позволяющую удовлетворять физически корректным граничным условиям на поверхности объекта. Упрощение системы уравнений Навье-Стокса возможно в предельных случаях малых и больших числах Рейнольдса [1, 2]. При больших значениях числа Рейнольдса сложная для исследования система уравнений Навье-Стокса упрощается, исходя из рассмотрения тонкой пристеночной области – пограничного слоя, в которой проявляются вязкость и теплопроводность газа. В силу относительной простоты (задача параболического типа) для решения уравнений пограничного слоя созданы эффективные как аналитические, так и численные методы [3, 4], что позволяет достичь успеха в решении широкого круга практически важных задач, включая эффекты, связанные с физико-химическими процессами. Среди работ, рассматривающих пограничный слой с химическими реакциями, можно отметить работы [5–9], где приводятся результаты исследований влияния многокомпонентной газовой смеси на параметры обтекания тел.

Следует отметить, что численные расчеты, как правило, не представляют в наглядной форме зависимость характеристик течений от определяющих параметров. Поэтому важной задачей является получение решения с помощью приближенных аналитических соотношений. Приближенные подходы в расчетах пространственного пограничного слоя позволяют в ряде случаев получать достаточно точные для инженерных приложений решения исходной задачи. Большое распространение для решения трехмерных задач пограничного слоя получил интегральный метод последовательных приближений [10], в котором используются приближения локального подобия. Показано, что полученные в первом приближении аналитические формулы для компонент напряжения трения и параметров теплопередачи обладают удовлетворительной точностью.

В данной работе с помощью метода последовательных приближений находится решение системы уравнений пограничного слоя в химически реагирующей смеси газов и используется для практических целей – оценки тепловых потоков к поверхности летательных аппаратов в атмосфере планет.

С помощью анализа полученных соотношений, а также результатов численных расчетов неравновесных газовых смесей определяются параметры, влияющие на теплопередачу к поверхности тел, моделирующих форму летательных аппаратов, в широком диапазоне условий обтекания. Выводятся формулы для быстрой оценки теплового потока в критической точке, зависящие от параметров траектории тела, движущегося в атмосфере Земли или Марса.

1. Основные уравнения

Выпишем систему уравнений трехмерного пограничного слоя для многокомпонентного газа без учета излучения, введя криволинейную систему координат, связанную с поверхностью обтекаемого тела: ξ и η – координаты на поверхности, координата ζ отсчитывается по нормали. Это уравнение неразрывности, уравнения количества движения в проекциях на оси координат, уравнения сохранения энергии для газовой смеси в целом, и уравнения диффузии для N компонент газовой смеси [3]:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho \sqrt{\frac{g}{g_{11}}} u \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} \omega \right) + \sqrt{g} \frac{\partial \rho v}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.1)$$

$$\hat{L} u + A_1 u^2 + A_2 \omega^2 + A_3 u \omega = \frac{A_4}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.3)$$

$$\hat{L} \omega + B_1 u^2 + B_2 \omega^2 + B_3 u \omega = \frac{B_4}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\mu \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right) \quad (1.4)$$

$$\rho \hat{L} c_i + \frac{\partial J_i}{\partial \zeta} = \dot{w}_i \quad i=1, \dots, N \quad (1.5)$$

$$\hat{L} H = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{\mu}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial H}{\partial \zeta} + (\text{Pr}-1) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{U^2}{2} \right) - \sum_i h_i \left(\frac{\text{Pr}}{\mu} J_i + \frac{\partial c_i}{\partial \zeta} \right) \right] \right\} \quad (1.6)$$

$$H = h + \frac{U^2}{2}, \quad h = \sum_i c_i h_i, \quad h_i = \int_0^T c_{pi} dT + h_i^0; \quad \text{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda}, \quad c_p = \sum_i c_i \frac{\partial h_i}{\partial T} = \sum_i c_i c_{pi}$$

Здесь ρ, p , – плотность и давление смеси; u, ω, v – компоненты вектора скорости по осям ξ, η, ζ соответственно; g_{11}, g_{22} – компоненты метрического тензора в базисе криволинейной системы координат ξ, η, ζ ($g = \det\|g_{ij}\|$); \dot{w}_i — массовая скорость образования i -й компоненты; H – полная энтальпия; c_i, h_i – массовая концентрация и удельная энтальпия i -й компоненты с учетом удельной энергии образования h_i^0 ; J_i – проекция диффузионного потока \mathbf{J} i -й компоненты на ось ζ ; Pr – число Прандтля; c_p – теплоемкость смеси; \hat{L} – дифференциальный оператор полной (субстанциональной) производной в осях ξ, η, ζ :

$$\hat{L} = \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \eta} + v \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

Коэффициенты A_k, B_k определяются геометрией тела и внешним течением, их вид приводится в [3].

Коэффициенты вязкости μ и теплопроводности λ газовой смеси – функции не только температуры T , но и массовых концентраций компонент: $\mu = \mu(c_i, T)$, $\lambda = \lambda(c_i, T)$. Эти коэффициенты могут быть вычислены с помощью упрощенных формул и зависимостей, полученных из кинетической теории, например, [11–14]. Как показывают численные расчеты, эти формулы обеспечивают неплохую точность для смеси электронейтральных компонент.

Система уравнений (1.1) – (1.6) дополняется уравнением состояния

$$p = \rho \frac{R}{m} T, \quad m = \left(\sum_{i=1}^N \frac{c_i}{m_i} \right)^{-1} \quad (1.7)$$

и тождествами

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{J}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N c_i = 1 \quad (1.8)$$

где T, m – температура и молярная масса газовой смеси, m_i – молярная масса i -й компоненты R – универсальная газовая постоянная.

Для нахождения массовой скорости образования \dot{w}_i компонент смеси рассматривается кинетика физико-химических превращений. Если схематически записать химические реакции в виде

$$\sum_{k=1}^N \nu'_k A_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^N \nu''_k A_k,$$

то, согласно закону действующих масс, скорость образования частиц сорта i определяется выражением

$$\dot{w}_i = m_i \sum_{(s)} (\nu''_{is} - \nu'_{is}) \left[k_{fs} \prod_{j=1}^N \left(\frac{\rho}{m_j} c_j \right)^{\nu'_{js}} - k_{rs} \prod_{j=1}^N \left(\frac{\rho}{m_j} c_j \right)^{\nu''_{js}} \right];$$

где ν''_i, ν'_i – стехиометрические коэффициенты реагентов и продуктов реакций; k_f, k_r – константы скоростей прямой и обратной реакций. Суммирование проводится по всем s реакциям, в которых участвует i -я компонента смеси.

Вектор плотности массовых диффузионных потоков \mathbf{J} обычно находится из соотношений Стефана-Максвелла. Эти соотношения в отсутствии баро- и термодиффузии в первом приближении можно представить в виде [15]:

$$\sum_{j=1}^N \frac{m^2}{\rho m_i m_j D_{ij}} (c_i \mathbf{J}_j - c_j \mathbf{J}_i) = \nabla \left(\frac{m}{m_i} c_i \right), \quad (i=1, 2, \dots, N-1), \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_i = 0 \quad (1.9)$$

Здесь D_{ij} – коэффициенты бинарной диффузии, определяемые как

$$D_{ij} = 0.843 \times 10^{-4} \sqrt{\frac{T^3 (m_i + m_j)}{2 m_i m_j}} / p \bar{\Omega}_{ij}^{(1,1)}(T), \text{ см}^2/\text{с}$$

где m_i – молярная масса в кг/моль, p – давление смеси в кПа, $\bar{\Omega}_{ij}^{(1,1)}$ – приведенный интеграл столкновений в Н·м².

Из (1.9) видно, что для получения явных выражений диффузионных потоков требуется обращение матрицы размерности $(N-1) \times (N-1)$. При большом числе компонент эта операция требует значительного объема вычислений, поэтому на практике обычно применяются приближенные методы описания многокомпонентной диффузии.

Обычно в простейших приближениях для определения диффузионных потоков используется закон Фика

$$\mathbf{J}_i = -\rho D_i \nabla c_i, \quad (1.10)$$

где D_i – эффективный коэффициент диффузии i -й компоненты, определяемый по правилу Уилки [16]:

$$D_i = \left(\frac{1}{m} - \frac{c_i}{m_i} \right) / B_i, \quad B_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{c_k}{m_k D_{ik}}$$

Тепловой поток к поверхности тела для многокомпонентной смеси реагирующих газов можно записать в виде:

$$q_w = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} + \sum_{i=1}^N h_i J_i \quad (1.11)$$

Формула (1.11) записана в случае равновесного возбуждения внутренних степеней свободы молекул и без учета диффузионного термоэффекта, вклад которого в перенос энергии при сверхзвуковом обтекании тел, как правило, незначителен.

В формуле (1.11) перейдем от температуры T к полной энтальпии H . Заметим, что

$$\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial \zeta} = \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial \zeta} + \frac{\mu}{Pr} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial \zeta} \right) \quad (1.12)$$

Второй член в правой части (1.12) на поверхности тела равен 0, поэтому

$$\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial \zeta} = \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial \zeta}. \quad (1.13)$$

Удельная энтальпия h связана с температурой следующим образом:

$$\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial \zeta} = \frac{\mu}{Pr} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial \zeta} + \frac{c_p \mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \quad (1.14)$$

Из (1.14) с учетом (1.13) получается

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial \zeta} - \frac{\mu}{Pr} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial \zeta},$$

тогда выражение для теплового потока (1.11) можно записать в виде:

$$q_w = -\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial \zeta} + \frac{\mu}{Pr} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial \zeta} + \sum_i h_i J_i \quad (1.15)$$

Преобразуем последние два слагаемых в (1.15), используя закон Фика:

$$\frac{\mu}{Pr} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial \zeta} + \sum_i h_i J_i = \frac{\mu}{Pr} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial \zeta} - \sum_i h_i \rho D_i \frac{\partial c_i}{\partial \zeta} = \frac{\mu}{Pr} \sum_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial \zeta} \left(1 - \frac{\rho D_i Pr}{\mu}\right) \quad (1.16)$$

Вводя диффузионный аналог числа Прандтля – число Шмидта $Sc_i = \mu / \rho D_i$ и число, характеризующее отношение молекулярного переноса к диффузионному, – число Льюиса $Le_i = Pr / Sc_i$ – запишем уравнение (1.16) в виде:

$$q_w = -\frac{\mu}{Pr} \left(\frac{\partial H}{\partial \zeta} + \sum (Le_i - 1) h_i \frac{\partial c_i}{\partial \zeta} \right) \quad (1.17)$$

При числе Льюиса $Le = 1$, второе слагаемое в (1.17) равно 0. В этом случае тепловой поток переносится к поверхности за счет диффузии компонент со скоростью, равной скорости переноса за счет теплопроводности.

Граничные условия для системы уравнений (1.1) – (1.8) следующие:

$$\begin{aligned} \zeta = 0: & H = H_w, \quad u_w = \omega_w = v_w = 0; \\ \zeta \rightarrow \infty: & H = H_e, \quad u = u_e, \quad \omega = \omega_e, \quad c_i = c_{ie} \end{aligned}$$

2. Метод последовательных приближений

Рассмотрим процедуру получения решения уравнений пограничного слоя методом последовательных приближений для многокомпонентного течения.

Вместо переменной ζ вводится новая переменная подобия ζ_1 :

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{u_e}{\mu_e \rho_e \xi}} \int_0^\zeta \rho d\zeta$$

От искомым функций u, ω, v, H, c_i осуществляется переход к новым функциям $E(\zeta, \eta, \zeta_1), G(\zeta, \eta, \zeta_1), K(\zeta, \eta, \zeta_1), \theta(\zeta, \eta, \zeta_1), \chi_i(\zeta, \eta, \zeta_1)$ по формулам:

$$\begin{aligned} u &= u_e(\zeta, \eta) E \\ \omega &= \eta u_e(\zeta, \eta) (G + \varphi E) \\ v &= \sqrt{\frac{\mu_e \rho_e u_e}{\xi}} \left[K - \frac{\xi}{\sqrt{g_{11}}} E \frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi} - \frac{\xi \eta}{\sqrt{g_{22}}} (G + \varphi E) \frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta} \right] \\ H &= H_e + (H_e - H_w) \theta, \quad \varphi = \omega_e / \eta u_e, \quad c_i = c_{iw} + (c_{ie} - c_{iw}) \chi_i \end{aligned}$$

В результате преобразований получаются интегральные уравнения для функций E, G, K, θ, χ_i . Если проинтегрировать полученную систему уравнений дважды по ζ_1 (от ζ_1 до ∞ и от 0 до ζ_1), то получится система интегро-дифференциальных уравнений для нормированных функций. Эту систему можно решить методом последовательных приближений. Если предположить, что известно n -е приближение, то при подстановке его в систему уравнений получается $(n+1)$ -е приближение. Для того, чтобы оно удовлетворяло граничным условиям, вводятся управляющие функции $\delta^{(n)}, b^{(n)}, d^{(n)}, y^{(n)}$. В процессе итерации находят величины, пропорциональные градиенту энтальпии на поверхности тела и компонентам трения. Система уравнений для нахождения $(n+1)$ -го приближения записывается в виде

$$E^{(n+1)} = \delta^{(n)} F_1^{(n)}$$

$$\begin{aligned}
 G^{(n+1)} &= \delta^{(n)} F_2^{(n)} \\
 \theta^{(n+1)} &= \delta^{(n)} F_3^{(n)} \\
 \chi^{(n+1)} &= \delta^{(n)} \left(F_4^{(n)} + b^{(n)} y^{(n)} D_{a4}^{(n)} \right) \\
 F_k^{(n)} &= A_{ak}^{(n)} + b^{(n)} B_{ak}^{(n)} + b^{(n)2} C_{ak}^{(n)} \quad k=1, 2, 4 \\
 F_3^{(n)} &= A_{a3}^{(n)} + b^{(n)} B_{a3}^{(n)} + d^{(n)} C_{a3}^{(n)} + b^{(n)} d^{(n)} D_{a3}^{(n)} + T_{a3}^{(n)}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Уравнения для неизвестных управляющих функций $\delta^{(n)}$, $b^{(n)}$, $d^{(n)}$, $y^{(n)}$ получаются из уравнений системы (2.1) при $\zeta_1 \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 \delta^{(n)} F_1^{(n)} &= 1 \\
 F_2^{(n)} &= 0 \\
 \delta^{(n)} F_3^{(n)} &= 1 \\
 \delta^{(n)} \left(F_4^{(n)} + b^{(n)} y^{(n)} D_4^{(n)} \right) &= 1
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Вид коэффициентов $A_{ak}^{(n)}$, $B_{ak}^{(n)}$, ... определяется геометрией тела, параметрами внешнего течения и предыдущим приближением [3]. Для вычисления этих коэффициентов необходимо также знать распределение параметров ρ_e/ρ , $1/l$, Pr/l , Sc_i/l ($l = \mu\rho/\mu_e\rho_e$) поперек пограничного слоя. Зададим приближенно поведение этих параметров через их значения на стенке и внешней границе пограничного слоя в виде:

$$\begin{aligned}
 \rho_e/\rho &= 1 + (\rho_e/\rho_w - 1) z_{-1}^{\alpha_1}(\zeta_1) \\
 1/l &= 1 + (1/l_w - 1) z_{-1}^{\alpha_2}(\zeta_1) \\
 Pr/l &= Pr_e + (Pr_w/l_w - Pr_e) z_{-1}^{\alpha_3}(\zeta_1) \\
 Sc_i/l &= (Sc)_{ie} + (Sc_{iw}/l_w - Sc_{ie}) z_{-1}^{\alpha_4}(\zeta_1)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

где функции $z_m(\zeta_1)$ принадлежат классу функций

$$z_m(\zeta_1) = \frac{A_m}{m!} \int_{\infty}^{\zeta_1} (\zeta_1 - \xi)^m \exp(-\xi^2) d\xi$$

Здесь коэффициенты A_m выбираются следующим образом:

$$z_m(0) = 1, \quad z_{-1}(\zeta_1) = \exp(-\zeta_1^2)$$

Анализ данных пограничного слоя при определенных условиях обтекания позволяет задать значения степенных параметров α_1 , α_2 , α_3 , α_4 в соотношениях (2.3), которые зависят от состояния газовой смеси. Первое приближение решения задачи можно получить, взяв за нулевое приближение следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 E^{(0)} &= 1 - z_0(\zeta_1) \\
 G^{(0)} &= b^{(0)} [z_0(\zeta_1) - z_1(\zeta_1)] \\
 \theta^{(0)} &= 1 - z_0(\zeta_1) + d^{(0)} [z_0(\zeta_1) - z_1(\zeta_1)] \\
 \chi_i^{(0)} &= 1 - z_0(\zeta_1) + y^{(0)} [z_0(\zeta_1) - z_1(\zeta_1)]
 \end{aligned}$$

После того, как из системы (2.2) найдены $\delta^{(0)}$, $b^{(0)}$, $d^{(0)}$, $y^{(0)}$ можно определить величины, пропорциональные коэффициентам поверхностного трения и величине теплового потока. При переходе к нормированным функциям тепловой поток к поверхности запишется в виде:

$$q_w = - \sqrt{\frac{\mu_e \rho_e u_e}{\xi}} \frac{l_w}{Pr} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1} \right)_{\zeta_1=0} + R^* \right] (H_e - H_w) \tag{2.4}$$

$$R^* = \sum_{i=1}^N \frac{h_{iw}(c_{ie} - c_{iw})}{H_e - H_w} (Le_i - 1) \frac{\partial \chi_i}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0}, \quad l_w = \rho_w \mu_w / \rho_e \mu_e$$

Таким образом можно получить конкретные соотношения для определения трения и теплообмена. Влияние химических реакций на величину теплового потока к поверхности тела будет проявляться через параметры $\rho_e \mu_e$, ρ_e / ρ_w , $l_w = \rho_w \mu_w / \rho_e \mu_e$, u_e / ζ , а также через профили функций в пограничном слое и энтальпийный потенциал ($H_e - H_w$).

3. Приближение для химически равновесного пограничного слоя

Рассмотрим решение системы уравнений (1.1) – (1.8) в случае химически равновесного пограничного слоя, когда скорость химических реакций велика по сравнению со скоростью гидродинамического или диффузионного переноса. Предположение о локальном термодинамическом равновесии существенно упрощает описание течений многокомпонентных газовых смесей.

В случае равновесных физико-химических превращений ($N-L$) уравнений неразрывности (1.5) заменяются алгебраическими соотношениями, выражающими условия химического равновесия

$$\prod_{j=1}^N \left(\frac{c_j m}{m_j} \right)^{v_j' - v_j''} = \frac{K_{pi}(T)}{p^\alpha}, \quad \alpha = \sum_{j=1}^N (v_j'' - v_j') \quad (3.1)$$

где K_{pi} – константы равновесия независимых химических реакций; v_j' , v_j'' – стехиометрические коэффициенты реагентов и продуктов химических реакций, m – молярная масса смеси, вычисляемая через молярные массы компонент, L – число независимых компонент. С помощью соотношений (3.1) концентрации компонент смеси определяются через ее температуру, давление и концентрации химических элементов, которые по-прежнему находятся из соответствующих уравнений неразрывности. Подробно теория химически равновесных течений обсуждается в [15].

Дальнейшее упрощение математического описания химически равновесных течений возможно при использовании бинарной модели диффузии, в которой эффективные коэффициенты диффузии считаются одинаковыми для всех компонент. В этом приближении при отсутствии источников массы концентрации химических элементов будут постоянными, а диффузионные потоки элементов равны нулю. При этом химический состав равновесной газовой смеси, ее термодинамические свойства и коэффициенты переноса – функции двух параметров, например, давления и температуры. Во многих случаях данное приближение дает вполне приемлемые результаты. Для некоторых газовых смесей имеются аналитические аппроксимации термодинамических функций и равновесного состава, например, в работах [17–20].

В равновесном пограничном слое анализ данных [21] позволяет положить следующие значения параметров в соотношениях (20): $\alpha_1=1.2$; $\alpha_2=1.4$; $\alpha_3=1.3$. С учетом этих данных из системы (2.1) находятся $\delta^{(0)}$, $b^{(0)}$, $d^{(0)}$ и в итоге определяются функции, пропорциональные коэффициентам поверхностного трения и величине теплового потока:

$$\begin{aligned} -l_w \frac{\partial E}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0} &= \sqrt{\delta_0} \left\{ N_1^* \left[0.808 \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w} \right) - 0.798 \right] - 0.234 P_1^* + b^{(0)} (0.113 P_2^* - 0.209 N_3^*) + 0.0709 N_2^* b^{(0)^2} \right\} \\ -l_w \frac{\partial G}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0} &= \sqrt{\delta_0} \left\{ M_1^* \left[0.808 \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w} \right) - 0.798 \right] - 0.209 b^{(0)} (P_1^* + M_3^*) + 0.0709 b^{(0)^2} (P_2^* + M_2^*) \right\} \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$-\frac{l_w}{Pr_w} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0} = \sqrt{\delta^{(0)}} \left[-P_1^* (0.234 + 0.209d^{(0)}) + b^{(0)} P_2^* (0.113 + 0.0709d^{(0)}) \right]$$

Коэффициенты N_1^* , N_2^* , N_3^* , M_1^* , M_2^* , M_3^* , P_1^* , P_2^* зависят от параметров внешнего течения и геометрии тела. В общем случае вид этих коэффициентов приводится в [3].

В случае рассмотрения обтекания тела со сферическим затуплением соотношения (3.2) можно упростить при гиперзвуковых скоростях полета, пренебрегая вторичным течением, в этом случае с достаточной степенью точности можно положить $b^{(0)} \approx 0$ [3].

Если составляющие локального коэффициента трения на поверхности определить следующим образом:

$$c_{f1} = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} / \rho_e u_e^2, \quad c_{f2} = \mu_w \left(\frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} / \rho_e u_e^2,$$

то

$$c_{f1} \sqrt{Re} = l_w \frac{\partial E}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0} = \sqrt{\delta^{(0)}} \left\{ 0.234 P_1^* + \left[0.798 - 0.808 \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w} \right) \right] N_1^* \right\} \quad (3.3)$$

$$c_{f2} \sqrt{Re} = l_w \frac{\partial G}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0} = \sqrt{\delta^{(0)}} \left\{ 0.234 P_1^* + \left[0.798 - 0.808 \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w} \right) \right] N_1^* \right\} \operatorname{tg} \gamma \quad (3.4)$$

где Re – локальное число Рейнольдса $Re = u_e \rho_e \xi / \mu_e$, γ – угол, образованный линиями тока внешнего течения с координатной линией $\eta = \text{const}$, причем $\operatorname{tg} \gamma = \omega_e / u_e$.

Для определения локальной теплопередачи вводится число Нуссельта

$$Nu = \frac{-q_w \xi c_{pe}}{\lambda_e (H_e - H_w)}$$

В этом случае связь удельного количества тепла q_w с числом Нуссельта имеет вид:

$$q_w = - \sqrt{\frac{\mu_e \rho_e u_e}{\xi}} \frac{Nu}{Pr \sqrt{Re}} (H_e - H_w) \quad (3.5)$$

В принятых обозначениях:

$$\frac{Nu}{\sqrt{Re}} = l_w \left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1} + R^* \right), \quad R^* = \sum_{i=1}^N \frac{h_{iw} (c_{ie} - c_{iw})}{H_e - H_w} (Le_i - 1) \frac{\partial \chi_i}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0}$$

Если считать, что число Льюиса близко к единице, то для величины Nu / \sqrt{Re} можно записать выражение:

$$\frac{1}{Pr} \frac{Nu}{\sqrt{Re}} = \sqrt{\delta^{(0)}} P_1^* (0.234 + 0.209d^{(0)}) \quad (3.6)$$

Коэффициенты N_1^* и P_1^* в полученных формулах в рассматриваемом случае имеют вид:

$$N_1^* = \frac{\xi}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \xi} + \frac{\omega_e \xi}{u_e^2} \frac{\partial u_e}{\partial \eta}, \quad (3.7)$$

$$P_1^* = 0.5 \left(1 + \frac{\xi}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial \xi} + \frac{\xi}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \xi} + \frac{\xi}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi} + \frac{\xi}{\mu_e} \frac{\partial \mu_e}{\partial \xi} \right) \quad (3.8)$$

Величины $\delta^{(0)}$ и $d^{(0)}$ вычисляются по следующим формулам:

$$\delta^{(0)} = \left(0.399P_1^* + 0.0014N_1^* - (0.149P_1^* - 0.006N_1^*)/l_w - N_1^*(0.318/l_w + 0.099)\rho_e/\rho_w \right)^{-1}$$

$$d^{(0)} = \left[\frac{1 - (1 - \text{Pr}_w)(1 + \eta^2\varphi^2)/[k(1 - t_w)]}{\delta^{(0)}P_1^*(\text{Pr}_e 0.152 + \text{Pr}_w 0.158/l_w)} - \frac{0.0973\text{Pr}_e + 0.153\text{Pr}_w/l_w}{0.152\text{Pr}_e + 0.158\text{Pr}_w/l_w} \right] \quad (3.9)$$

где $t_w = H_w / H_e$, $k = 2H_e / U_e^2$, $\varphi = \omega_e / \eta u_e$

В случае осесимметричного обтекания и при условии, что число Прандтля слабо меняется в пограничном слое $\text{Pr}_e = \text{Pr}_w$ выражение для $d^{(0)}$ упрощается:

$$d^{(0)} = \left[\frac{1 - (1 - \text{Pr})/[k(1 - t_w)]}{\delta^{(0)}P_1^* \text{Pr}(0.152 + 0.158/l_w)} - \frac{0.0973 + 0.153/l_w}{0.152 + 0.158/l_w} \right]$$

Таким образом, зная распределение параметров газовой смеси на внешней границе пограничного слоя и на поверхности тела, по представленным формулам можно определить трение и тепловой поток. Анализируя полученные формулы, можно отметить, что влияние равновесных химических реакций на параметр теплопередачи $\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\text{Nu}}{\sqrt{\text{Re}}}$ будет

проявляться в основном через параметры ρ_e/ρ_w , $l_w = \rho_w \mu_w / \rho_e \mu_e$, u_e/ζ а также через энтальпийный потенциал $H_e - H_w$, величина которого зависит от каталитических свойств поверхности.

Алгоритм расчета гиперзвукового обтекания затупленного тела химически равновесным потоком газа следующий. При расчете внешнего течения можно использовать данные для давления и скорости в совершенном однородном газе, полученные из решения уравнений Эйлера. Заметим, при равновесном обтекании допускается возможность описания течения в ударном слое моделью совершенного газа с показателем адиабаты $\gamma = \text{const}$ [22, 23]. В работе [23], например, при приближенном моделировании обтекания сегментально-конического тела равновесным воздухом используется модель совершенного газа с эффективным показателем адиабаты $\gamma_* = 1.162$, при этом расхождение точного решения, определяющего давление и скорость в основной части ударного слоя, и моделирующего, невелико.

Плотность, температура и состав смеси на внешней границе пограничного слоя при равновесном обтекании можно найти из решения следующей системы:

– уравнения сохранения полной энтальпии

$$H_e - \sum_i h_{ie} c_{ie} - U_e^2 / 2 = 0$$

– уравнений химического равновесия (3.1);

– уравнения состояния газовой смеси (1.7);

– уравнений сохранения баланса массы химических элементов.

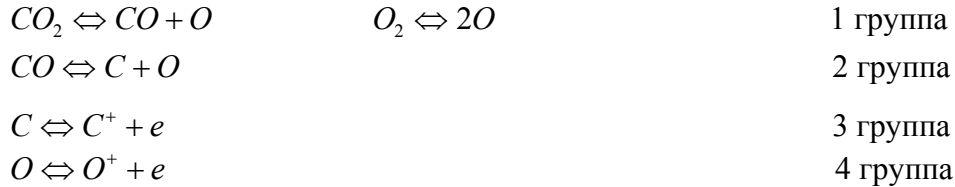
Заметим, что при переходе газа через ударную волну в адиабатических условиях при отсутствии механической работы энтальпия торможения потока остается неизменной (хотя температура может меняться во много раз), поэтому полная энтальпия на внешней границе пограничного слоя равняется полной энтальпии набегающего потока $H_e = H_\infty \approx V_\infty^2 / 2$. Таким образом, зная H_e , U_e , p , можно найти состав смеси c_{ie} , плотность ρ_e , температуру T_e на внешней границе пограничного слоя. Далее по полученным формулам (3.2) – (3.9) определяются параметры трения и теплообмена.

■ 4. Определение состава смеси CO_2 в условиях химического равновесия

Как уже отмечалось, имеются аналитические аппроксимации термодинамических функций и равновесного состава газовых смесей. В некоторых случаях можно ввести допущения, упрощающих задачу и позволяющих получить аналитическое решение системы

уравнений химического равновесия. В качестве примера рассмотрим процедуру расчета равновесного состава смеси углекислого газа CO_2 с помощью методики, предложенной в [20]. Заметим, что рассмотрение течений углекислого газа актуально, например, при моделировании гиперзвукового обтекания тел в атмосфере Марса, состоящей на 97% из молекул CO_2 .

Основные химические реакции, которые протекают в углекислом газе при температурах \sim до 12000°K , следующие:



Одним из свойств углекислого газа является то, с ростом температуры реакции 1 и 2 группы идут последовательно одна за другой, то есть реакция распада CO на атомы начинается при полностью распавшихся молекулах CO_2 , после распада CO начинаются реакции ионизации, поэтому эти группы реакций можно рассмотреть независимо. Рассчитаем в этом случае равновесный химический состав.

1. Рассмотрим реакции



Уравнения закона действующих масс для них –

$$\frac{x_{\text{co}}x_{\text{o}}}{x_{\text{co}_2}} = \frac{K_{p1}}{p} \quad \frac{x_{\text{o}_2}^2}{x_{\text{o}_2}} = \frac{K_{p2}}{p},$$

где x – молярная концентрация компонент, K_p – константы равновесия реакций.

Если обозначить начальное количество частиц – N_1 , количество частиц того или иного сорта – n , то уравнения сохранения частиц можно записать как

$$N_1 = n_{\text{co}_2} + n_{\text{co}}, \quad n_{\text{co}} = n_{\text{o}} + 2n_{\text{o}_2} \quad (n_{\text{c}} = n_{\text{c}^+} = n_{\text{o}^+} = n_{\text{e}} = 0)$$

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{n_{\text{co}}}{N_1}, \quad \beta = \frac{n_{\text{o}_2}}{N_1}$$

Тогда после преобразований можно получить

$$\frac{\alpha(\alpha - 2\beta)}{(1 - \alpha)(1 + \alpha - \beta)} = \frac{K_{p1}}{p} = \frac{1}{K_1 p}, \quad \frac{\alpha\beta}{(1 - \alpha)(\alpha - 2\beta)} = \frac{K_{p1}}{K_{p2}} = \frac{1}{K_2}$$

Записанные уравнения дают для нахождения α кубическое уравнение:

$$\alpha^3(1 - K_1 K_2 p) - 3\alpha\left(1 - \frac{K_2}{3}\right) + 2 = 0, \quad (4.1)$$

а значение β находится из соотношения:

$$\beta = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2(1 - \alpha) + K_2 \alpha} \quad (4.2)$$

Уравнение (4.1) легко решается численно, например, методом Ньютона. Можно получить решение (4.1) с помощью формулы Кардана:

$$\alpha = (1 - K_1 K_2 p - K_2)^{-1/3} \times \left[\left(-1 + \left(1 - \frac{(1 - K_2/3)^3}{1 - K_1 K_2 p - K_2} \right)^{1/2} \right)^{1/3} + \left(-1 - \left(1 - \frac{(1 - K_2/3)^3}{1 - K_1 K_2 p - K_2} \right)^{1/2} \right)^{1/3} \right] \quad (4.3)$$

Если p и T таковы, что выражение под квадратным корнем отрицательно, можно применить итерационную формулу, полученную с помощью метода Ньютона:

$$\alpha_{i+1} = \frac{1 - \alpha_i^3 (1 - K_1 K_2 p - K_2)}{1 - K_2/3 - \alpha_i^2 (1 - K_1 K_2 p - K_2)}, \quad \alpha_0 = \left(\frac{6}{6 + 8(K_1 K_2 p)^{1/2} + 3K_1 K_2 p} \right)^{1/3}$$

2. Реакция $CO \Leftrightarrow C + O$ ($n_{CO_2} = n_{O_2} = n_{C^+} = n_{O^+} = n_e = 0$)

Условие равновесия реакции для этой реакции

$$\frac{x_c x_o}{x_{co}} = \frac{K_{p3}}{p}$$

Уравнение сохранения частиц $N_1 = n_{co} + n_c = (n_{co} + n_o)/2$

Введя обозначение $\gamma = n_c / N_1$, будем иметь

$$\frac{\gamma(\gamma+1)}{(1-\gamma)(2+\gamma)} = \frac{K_{p3}}{p} = \frac{1}{K_3 p}, \quad \gamma = 4(K_3 p + 1)^{-1} \left(1 + \left(1 + \frac{8}{K_3 p + 1} \right)^{1/2} \right)^{-1} \quad (4.4)$$

3. Реакция $C \Leftrightarrow C^+ + e$ ($n_{CO_2} = n_{CO} = n_{O_2} = n_{O^+} = 0$)

$$\frac{x_{c^+} x_e}{x_c} = \frac{K_{p4}}{p}$$

Условие сохранения частиц

$$N_1 = n_c + n_{c^+} = \frac{n_o}{2}$$

Условие сохранения заряда $n_{c^+} = n_e$.

Если обозначить $\varphi = \frac{n_{c^+}}{N_1}$, то

$$\frac{\varphi^2}{(1-\varphi)(3+\varphi)} = \frac{K_{p4}}{p} = \frac{1}{K_4 p}, \quad \varphi = \frac{3}{1 + (4 + 3K_4 p)^{1/2}} \quad (4.5)$$

4. Реакция $O \Leftrightarrow O^+ + e$ ($n_{CO_2} = n_{CO} = n_{O_2} = n_C = 0$)

$$\frac{x_{o^+} x_e}{x_o} = \frac{K_{p5}}{p}$$

$$N_1 = n_{c^+} = \frac{1}{2}(n_o + n_{o^+}) = n_e - n_{o^+}$$

Если обозначить $\psi = \frac{n_{o^+}}{N_1}$, то

$$\frac{\psi(\psi+1)}{(2-\psi)(4-\psi)} = \frac{K_{p5}}{p} = \frac{1}{K_5 p}, \quad \psi = \frac{16}{2 + K_5 p + (36 + 36K_5 p + (K_5 p)^2)^{1/2}}$$

Полученные значения относительных количеств частиц α , β , γ , φ , ψ справедливы в определенных интервалах температур и давлений. Чтобы иметь возможность вычислить эти величины для любых p и T , можно скомбинировать формулы так, чтобы одно выражение при изменении p и T автоматически переходило в другое.

Если учесть все реакции одновременно, то выражения для относительных количеств частиц примут вид:

$$\frac{n_{co_2}}{N_1} = 1 - \alpha, \quad \frac{n_{co}}{N_1} = \alpha - \gamma, \quad \frac{n_{o_2}}{N_1} = \beta, \quad \frac{n_c}{N_1} = \gamma, \quad \frac{n_o}{N_1} = \alpha - 2\beta + \gamma$$

$$\frac{n_{o^+}}{N_1} = \psi, \quad \frac{n_{c^+}}{N_1} = \varphi, \quad \frac{n_e}{N_1} = \varphi + \psi$$

Нетрудно заметить, что массовая концентрация i -й компоненты c_i связана с относительным количеством частиц следующим образом:

$$c_i = \frac{n_i}{N_1} \frac{m_i}{m_{co_2}}$$

В связи с этим можно записать:

$$c_{co_2} = 1 - \alpha, \quad c_{co} = (\alpha - \gamma) \frac{m_{co}}{m_{co_2}}, \quad c_{o_2} = \beta \frac{m_{o_2}}{m_{co_2}}$$

$$c_c = \gamma \frac{m_c}{m_{co_2}}, \quad c_o = (\alpha - 2\beta + \gamma) \frac{m_o}{m_{co_2}}, \quad c_{o^+} = \psi \frac{m_{o^+}}{m_{co_2}}, \quad c_{c^+} = \varphi \frac{m_{c^+}}{m_{co_2}}$$

Положим, что N_1 равно числу частиц в одном моле газа, тогда энтальпия, соответствующая количеству газа, содержащегося в одном моле CO_2 будет равна:

$$h(p, T) = \sum_k h_k(T) \frac{n_k}{N_1} + h_{co_2}^0 \frac{n_{co} + n_c + n_{c^+}}{N_1} + h_{co}^0 \frac{n_c + n_{c^+}}{N_1} + \frac{1}{2} h_{o_2}^0 \frac{n_o - n_c - n_{c^+} + n_{o^+}}{N_1} + i_c \frac{n_{c^+}}{N_1} + i_o \frac{n_{o^+}}{N_1}$$

Здесь $h_k(T)$ – молярные концентрации компонент, h_k^0 , i_k – энергия диссоциации или ионизации одного моля k -й компоненты.

Если подставить выражения для относительного количества частиц, то получится

$$h = h_{co_2} + \alpha(h_{co} + h_o - h_{co_2} + h_{o_2}^0/2 + h_{co_2}^0) + \beta(h_{o_2} - 2h_o - h_{o_2}^0) + \gamma(h_c + h_o - h_{co} + h_{co}^0) + \varphi(h_{c^+} + h_e - h_c + i_c) + \psi(h_{o^+} + h_e - h_o + i_o) \quad (4.6)$$

При аналогичной подстановке для уравнения состояния получится следующая формула:

$$p = \frac{R_0}{m_{co_2}} \rho T (1 + \alpha - \beta + \gamma + \varphi + \psi), \quad (4.7)$$

где R_0 – универсальная газовая постоянная ($R_0 = 8.31 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{град})$)

Чтобы применить полученные формулы (4.6) и (4.7), воспользуемся подходом, который предлагается в работе [20] для аппроксимаций функций K_i и молярных энтальпий $h_i(T)$. В этом подходе учитывается, что наименьшая ошибка каждой из аппроксимаций должна быть в той области температур, где концентрация соответствующей компоненты относительно велика. В качестве аппроксимирующих функций выбираются такие, которые имеют вид, близкий к главным членам в истинных выражениях для констант равновесия и энтальпий. В связи с этим для K_i выбирается функция вида:

$$K_i(T) = \lambda_i T^{\chi_i} \exp \frac{\gamma_i}{T},$$

где $\lambda_i, \chi_i, \gamma_i$ – некоторые константы.

Чтобы окончательно выражение для энтальпии было применимо и в области температур, меньших 1000°K, энтальпию CO_2 необходимо аппроксимировать особенно точно в этом интервале температур, где компонента CO_2 является единственной.

Линейная молекула CO_2 обладает тремя поступательными, двумя вращательными и четырьмя колебательными степенями свободы, поэтому, если не учитывать взаимодействие между степенями свободы, возбуждение электронных состояний и ангармоничность колебаний, можно записать следующее

$$h_{\text{CO}_2} = \frac{7}{2} R_o T + R_o \sum_{i=1}^4 \frac{T_i^*}{\exp(T_i^*/T) - 1}$$

Здесь ω_i – характеристические температуры колебаний ($T_1^* = T_2^* = 960^\circ\text{K}$, $T_3^* = 1920^\circ\text{K}$, $T_4^* = 3380^\circ\text{K}$).

При расчетах предполагается, что

$$T_3^* = 2T_1^* = 1960^\circ\text{K}, \quad \exp(T_4^*/T) \approx (1 + 84.1/T) \exp(3.5T_1^*/T)$$

При аппроксимации других молярных компонент учитывалось, что при $T \rightarrow \infty$ имеет место приближение:

$$\frac{T_i^*}{\exp(T_i^*/T) - 1} \approx T - \frac{T_i^*}{2} + \frac{T_i^{*2}}{12T}$$

В результате выбираются формулы вида

$$h_i(T) = A_i T + \frac{B_i}{T} + C_i,$$

где A_i, B_i, C_i – константы.

В итоге получаются следующие расчетные формулы, аппроксимирующие давление и внутреннюю энергию «равновесного» углекислого газа:

$$p = \frac{R_o}{m_{\text{CO}_2}} \rho T (1 + \alpha - \beta + \gamma + \varphi + \psi)$$

$$\begin{aligned} h/R_o = h_{\text{CO}_2}/R_o + \alpha & \left(58584 + 7.49T + 6.91 \times 10^7/T + 1.92 \times 10^{-12} (T - 5000)^4 - h_{\text{CO}_2}/R_o \right) - \\ & - \beta \left(63408 - 4.86T + 1.68 \times 10^6/T \right) + \\ & + \gamma \left(129136 + 0.423T + 4.37 \times 10^6/T + 4.476 \times 10^{-5} T^2 - 1.92 \times 10^{-12} (T - 5000)^4 \right) + \\ & + \phi (130800 + 2.50T) + \psi (157036 + 2.50T) \end{aligned}$$

где

$$\frac{h_{co_2}}{R_o} = 3.5T + 1920 \cdot \left[\frac{1}{\exp(T_1^*/T) - 1} + \frac{1}{\exp(2T_1^*/T) - 1} + \frac{1.7824}{(1 + 84.1/T) \exp(3.5T_1^*/T) - 1} \right]$$

(p – Н/м², h – Дж/моль), $T_1^* = 967.1\text{K}$

Величины α , β , γ , ϕ , ψ вычисляются по формулам:

$$\alpha = (1 - K_1 K_2 p - K_2)^{-1/3} \times \left[\left(-1 + \left(1 - \frac{(1 - K_2/3)^3}{1 - K_1 K_2 p - K_2} \right)^{1/2} \right)^{1/3} + \left(-1 - \left(1 - \frac{(1 - K_2/3)^3}{1 - K_1 K_2 p - K_2} \right)^{1/2} \right)^{1/3} \right]$$

или $\alpha_{i+1} = \frac{1 - \alpha_i^3 (1 - K_1 K_2 p - K_2)}{1 - K_2/3 - \alpha_i^2 (1 - K_1 K_2 p - K_2)}$

$$\beta = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2(1 - \alpha) + K_2 \alpha}, \quad \gamma = 4(K_3 p + 1)^{-1} \left(1 + \left(1 + \frac{8}{K_3 p + 1} \right)^{1/2} \right)^{-1}$$

$$\phi = \frac{3}{1 + (4 + 3K_4 p)^{1/2}}, \quad \psi = \frac{16}{2 + K_5 p + (36 + 36K_5 p + (K_5 p)^2)^{1/2}}$$

В этих формулах значения K_i определяются следующим образом:

$$K_1 = 1.797 \times 10^{-15} T^{1/2} \exp(65201/T), \quad K_2 = 2.118 \times 10^{-3} T^{1/2} \exp(3195/T)$$

$$K_3 = 2.609 \times 10^{-11} T^{-1/2} \exp(131374/T), \quad K_4 = 1.924 \times 10^{-1} T^{-2} \exp(133741/T)$$

$$K_5 = 5.100 \times 10^3 T^{-3} \exp(153937/T)$$

Сравнение результатов расчета энтальпии диссоциированного углекислого газа по представленным аппроксимационным формулам с табличными данными показывает их хорошее совпадение.

Таким образом, полученные формулы можно использовать для определения уравнения состояния и энтальпии «равновесного» углекислого газа и получать исходные данные для расчета коэффициентов трения и теплового потока на поверхности обтекаемого тела.

На рис.4.1 представлен тепловой поток q в зависимости от координаты ζ , измеряемой от точки торможения вдоль поверхности космического аппарата MSRO для двух условий обтекания в атмосфере Марса.

Фронтальная поверхность аппарата представляет собой сферически затупленный конус с углом раствора 120° и радиусом затупления $R=1\text{м}$. Представленные результаты получены с использованием метода последовательных приближений для равновесного приближения и численного метода [24]. Величины теплового потока, полученные разными методами, удовлетворительно согласуются между собой.

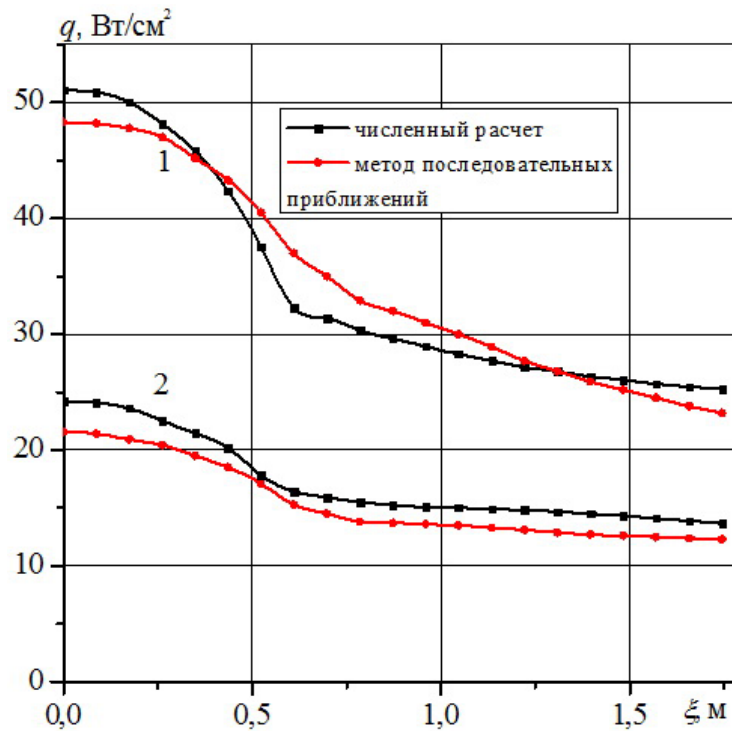


Рис.1. Тепловой поток к поверхности аппарата MSRO; идеально каталитическая поверхность; 1– $V_\infty=5223\text{ м/с}$, $\rho_\infty=2.93 \times 10^{-4}\text{ кг/м}^3$, 2 – $V_\infty=5687\text{ м/с}$, $\rho_\infty=3.141 \times 10^{-5}\text{ кг/м}^3$

▪ 5. Приближение для «замороженного» пограничного слоя.

В случае замороженных течений, когда характерные времена реакций много больше характерного времени обтекания, уравнения диффузии для компонент газовой смеси записываются в следующем виде:

$$\rho \hat{L} c_i + \frac{\partial J_i}{\partial \zeta} = 0, \quad i = 1, \dots, N \tag{5.1}$$

Система уравнений многокомпонентного пограничного слоя решается также методом последовательных приближений. Диффузионные потоки определяются с помощью закона Фика, в котором эффективный коэффициент диффузии определяется через число Шмидта $Sc_i = \mu_i / \rho D_i$.

Параметры ρ_e/ρ , $1/l$, Pr/l , Sc_i/l в пограничном слое аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_e/\rho &= 1 + (\rho_e/\rho_w - 1) z_{-1}^{\alpha_1}(\zeta_1) \\ 1/l &= 1 + (1/l_w - 1) z_{-1}^{\alpha_2}(\zeta_1) \\ Pr/l &= Pr_e + (Pr_w/l_w - Pr_e) z_{-1}^{\alpha_3}(\zeta_1) \\ Sc_i/l &= Sc_{ie} + (Sc_{iw}/l_w - Sc_{ie}) z_{-1}^{\alpha_s}(\zeta_1) \end{aligned}$$

В данном случае с учетом численных исследований полагается, что $\alpha_i=1.1$.

Величины, пропорциональные коэффициентам поверхностного трения и тепловому потоку, запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
& -l_w \frac{\partial E}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0} = \\
& = \sqrt{\delta^{(0)}} \left[N_1^* \left(0.845 \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w} \right) - 0.798 \right) - 0.234 P_1^* + b^{(0)} (0.113 P_2^* - 0.209 N_3^*) + 0.0709 N_2^* b^{(0)^2} \right] \\
& - l_w \frac{\partial G}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0} = \sqrt{\delta^{(0)}} \left[M_1^* \left(0.845 \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w} \right) - 0.798 \right) - 0.209 b^{(0)} (P_1^* + M_3^*) + 0.0709 b^{(0)^2} (P_2^* + M_3^*) \right] \\
& - \frac{l_w}{Pr_w} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0} = \sqrt{\delta^{(0)}} \left[-P_1^* (0.234 + 0.209 d^{(0)}) + b^{(0)} P_2^* (0.113 + 0.0709 d^{(0)}) \right] + \\
& + \frac{l_w}{Pr_w} \sum_{k=1}^N \frac{h_{wk} (c_{wk} - c_{ek})}{H_e - H_w} \left(1 - \frac{Pr_w}{Sc_{wk}} \right) \frac{\partial \chi_k}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1} \\
& - \frac{l_w}{Sc_{wi}} \frac{\partial \chi_i}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0} = \sqrt{\delta^{(0)}} \left[- (P_1^* (0.234 + 0.209 y_i^{(0)}) + b^{(0)} P_2^* (0.113 + 0.0709 y_i^{(0)})) \right]
\end{aligned} \tag{5.2}$$

При гиперзвуковых скоростях полета, пренебрегая вторичными течениями, с достаточной степенью точности можно положить $b^{(0)} \approx 0$, тогда

$$l_w \frac{\partial E}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0} = c_{f1} \sqrt{Re} = -\sqrt{\delta^{(0)}} \left[N_1^* \left(0.845 \left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_w} \right) - 0.798 \right) - 0.234 P_1^* \right] \tag{5.3}$$

$$c_{f2} \sqrt{Re} = l_w \frac{\partial G}{\partial \zeta_1} = \frac{w_e}{u_e} c_{1f} \sqrt{Re}$$

$$\frac{1}{Pr_w} \frac{Nu}{\sqrt{Re}} = \frac{l_w}{Pr_w} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1} = \tag{5.4}$$

$$= \sqrt{\delta^{(0)}} P_1^* (0.234 + 0.209 d^{(0)}) - \frac{l_w}{Pr_w} \sum_{k=1}^N \frac{h_{kw}^{(0)} (c_{ke} - c_{kw})}{H_e - H_w} \left(1 - \frac{Pr_{wk}}{Sc_{wk}} \right) \frac{\partial \chi_k}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0}$$

$$\frac{l_w}{Sc_w} \frac{\partial \chi_i}{\partial \zeta_1} \Big|_{\zeta_1=0} = \sqrt{\delta^{(0)}} P_1^* (0.234 + 0.209 y_i^{(0)}) \tag{5.5}$$

С учетом (5.5) выражение (5.4) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Pr_w} \frac{Nu}{\sqrt{Re}} = \\
& = \sqrt{\delta^{(0)}} P_1^* \left[(0.234 + 0.209 d^{(0)}) + \frac{1}{Le_w} \sum_{k=1}^N \frac{h_{kw}^{(0)} (c_{ke} - c_{kw})}{H_e - H_w} (Le_{wk} - 1) (0.234 + 0.209 y_k^{(0)}) \right]
\end{aligned} \tag{5.6}$$

С помощью (5.6) в замороженном пограничном слое определяется параметр теплопередачи $Nu / (Pr \sqrt{Re})$, состоящий из двух частей – конвективной и диффузионной составляющих.

Коэффициенты N_1^* и P_1^* имеют вид (3.7) – (3.8), а величины $\delta^{(0)}$, $d^{(0)}$, $y_i^{(0)}$ вычисляются следующим образом:

$$\delta^{(0)} = [0.089 P_1^* - 0.0143 N_1^* + (0.161 P_1^* - 0.031 N_1^*) / l_w + (0.098 N_1^* + 0.357 N_1^* / l_w) \rho_e / \rho_w]^{-1} \tag{5.7}$$

$$d^{(0)} = \left[\frac{1 - (1 - Pr_w) (1 + \eta^2 \varphi^2) / [k(1 - t_w)]}{\delta^{(0)} P_1^* (0.141 Pr_e + 0.169 Pr_w / l_w)} - \frac{0.089 Pr_e + 0.161 Pr_w / l_w}{0.141 Pr_e + 0.169 Pr_w / l_w} \right] \tag{5.8}$$

$$y_i^{(0)} = \frac{1 - \delta^{(0)} P_1^* (0.089 Sc_e + 0.161 Sc_w / l_w)}{\delta^{(0)} P_1^* (0.141 Sc_e + 0.169 Sc_w / l_w)} \tag{5.9}$$

Сравнивая (5.8) и (5.9), а также уравнения диффузии компонент и уравнение энергии в случае замороженного пограничного слоя, можно заметить аналогию между диффузионным и конвективным переносом, поскольку числа Pr, Sc, Le достаточно близки к единице.

При постоянных числах Прандтля и Шмидта выражение (5.6) запишется в виде:

$$\frac{1}{Pr} \frac{Nu}{\sqrt{Re}} = \sqrt{\delta^{(0)}} P_1^* \left[(0.234 + 0.209d^{(0)}) + \frac{Le-1}{Le} \sum_{k=1}^N \frac{h_{kw}^{(0)}(c_{ke} - c_{kw})}{H_e - H_w} (0.234 + 0.209y_k^{(0)}) \right] \quad (5.10)$$

Если Pr=Sc, то есть Le=1, то исчезает вторая составляющая в выражении (5.10). Если $c_{kw}=c_{ke}$, то пограничный слой представляет собой однородную смесь атомов и молекул, в этом случае диффузионная составляющая в соотношении (5.10) также равна нулю. В случае обтекания аппарата MSRO с параметрами течения, соответствующими замороженному режиму, оценивалось влияние второй составляющей в выражении (5.10) на величину параметра теплообмена – $Nu/(Pr\sqrt{Re})$ при условии, что число Льюиса $Le = 1.4$. На рис.2 представлено изменение этой величины вдоль идеально каталитической поверхности с учетом и без учета диффузионной составляющей в соотношении (5.10).

Видно, что диффузионная добавка при данных условиях обтекания незначительно увеличивает теплопередачу (до 7%).

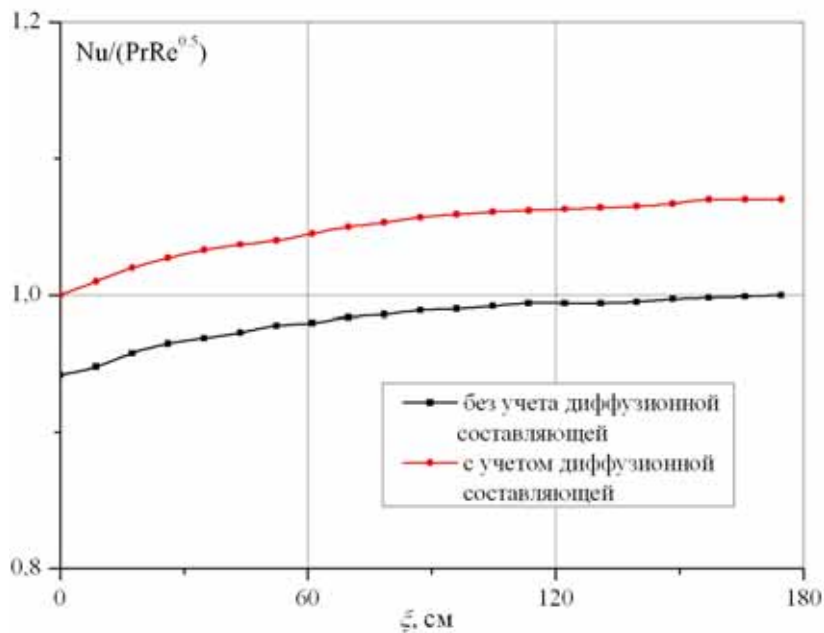


Рис.2. Изменение параметра теплопередачи вдоль поверхности аппарата, идеально-каталитическая поверхность, $V_\infty=3536\text{м/с}$, $\rho_\infty=2.819\times 10^{-5}\text{кг/м}^3$, $Le=1.4$

Заметим, что скрытое влияние химических реакций на величину теплового потока будет проявляться через энтальпийный потенциал – (H_e-H_w) . Действительно, запишем тепловой поток в виде:

$$q_w = \alpha(H_e - H_w), \quad \alpha = \sqrt{\frac{\mu_e \rho_e u_e}{\xi}} \frac{Nu}{Pr \sqrt{Re}} \quad (5.11)$$

Энтальпия газовой смеси на стенке определяется как

$$H_w = c_p T_w + \sum_i c_{iw} h_i^0,$$

где h_i^0 – теплота образования i -й компоненты.

Таким образом, энтальпия газовой смеси зависит от концентрации компонент на поверхности тела, а они определяются каталитическими свойствами последней. Модель поверхностного катализа играет важную роль в задачах определения тепловых потоков. Как показывают эксперименты, скорость реакций рекомбинаций имеет первый порядок и пропорциональна концентрации компонент

$$\frac{dc_k}{dt} \sim k_{wk} c_k,$$

где величина k_{wk} связана с эффективностью рекомбинации γ_{wk} , определяемой как отношение числа рекомбинирующих частиц к полному числу ударяющихся о поверхность в единицу времени:

$$k_{wk} = \gamma_{wk} \sqrt{\frac{RT_w}{2\pi m_k}}$$

При этом граничные условия на стенке при решении уравнения неразрывности компонент смеси записываются в виде:

$$J_{kw} = \left(\rho D_k \frac{\partial c_k}{\partial \xi} \right)_w = k_{wk} \rho_w c_{kw} \quad (5.12)$$

В случае замороженного пограничного слоя при отмеченной аналогии между массой и теплообменом аналогично (5.11) можно записать

$$J_{kw} = \alpha (c_{ke} - c_{kw})$$

Отсюда с учетом (5.12) получается

$$c_{kw} = c_{ke} \left(1 + \frac{\rho_w k_{wk}}{\alpha} \right)^{-1}$$

Таким образом, тепловой поток к поверхности можно представить в виде:

$$q_w = \alpha \left[H_e - c_p T_w - \sum_k c_{ke} h_k^0 \left(1 + \frac{\rho_w k_{wk}}{\alpha} \right)^{-1} \right]$$

Из полученной формулы следует, что в случае замороженного пограничного слоя тепловой поток на абсолютно каталитической стенке (при $k_{wk} \rightarrow \infty$) запишется в виде

$$q_w = \alpha (H_e - c_p T_w) \quad (5.13)$$

Полученное соотношение (5.13) совпадает с формулой расчета теплового потока для совершенного газа.

В случае некаталитической поверхности, при условии $k_{wk} \rightarrow 0$, тепловой поток будет равен

$$q_w = \alpha \left(H_e - c_p T_w - \sum_k c_{ke} h_k^0 \right) \quad (5.14)$$

В данном случае величина теплового потока зависит от отношения связанной энергии $\sum_k c_{ke} h_k^0$ к энтальпии торможения H_e , которая определяется скоростью полета тела.

На рис.3 продемонстрировано влияние каталитических свойств поверхности на величину теплового потока для замороженного пограничного слоя. Расчеты проведены с учетом формул (5.13) и (5.14) для аппарата MSRO и условий обтекания, соответствующих замороженному режиму течения в пограничном слое: $V_\infty = 3536$ м/с, $\rho_\infty = 2.819 \cdot 10^{-5}$ кг/м³.

Необходимо заметить, что при одинаковых условиях обтекания тепловой поток к некаталитической поверхности существенно меньше (в данном случае до 1.5 раз), для стенки с высокой каталитичностью.

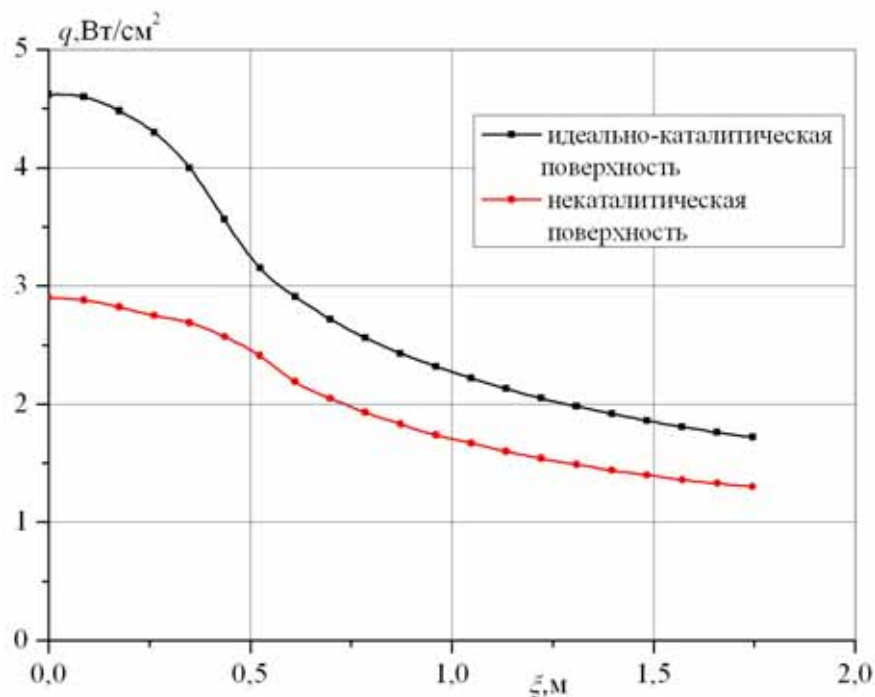


Рис.3. Влияние каталитических свойств поверхности на тепловой поток к поверхности MSRO, $V_\infty = 3536$ м/с, $\rho_\infty = 2.819 \cdot 10^{-5}$ кг/м³

На фиг.4 проводится сравнение результатов по теплопередаче к поверхности аппаратов MSRO и MARS-EXPRESS, полученных методом последовательных приближений и с помощью численных расчетов [24] для условий, соответствующих замороженному режиму течения в пограничном слое. Аппарат MARS-EXPRESS имеет форму, подобную форме аппарата MSRO, но меньший радиус затупления: $R=0.38$ м. Согласие результатов, представленных на рис.4 удовлетворительное.

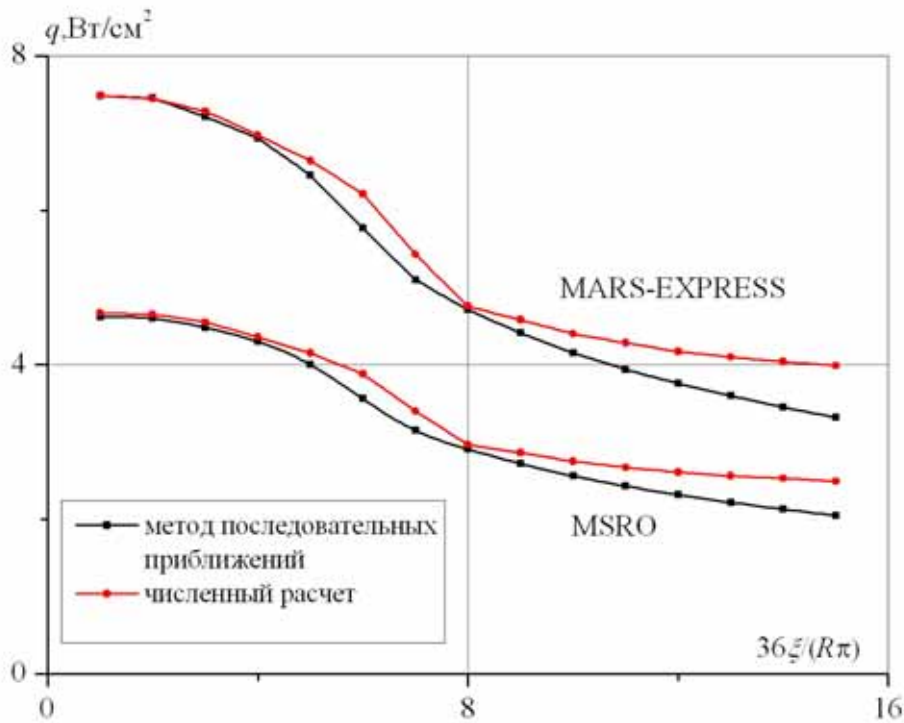


Рис.4. Тепловой поток к поверхности аппаратов. $V_\infty=3.5$ км/с, $\rho_\infty=2.8 \cdot 10^{-5}$ кг/м³

▪ 6. Оценка теплового потока в окрестности критической точки.

Если система криволинейных координат выбирается с началом в точке торможения потока ($\xi = \eta = \zeta = 0$), то формулы, представленные в разделах 3 и 5 для определения трения и теплообмена, будут иметь особенности в этой точке. В связи с этим, отдельного рассмотрения требует задача по определению параметров течения в окрестности критической точки.

Для расчетов осесимметричных затупленных тел удобно выбрать полугеодезическую систему координат, связанную с поверхностью тела: координата ζ – отсчитывается от критической точки вдоль поверхности, координата η – меридиональный угол, отсчитываемый от наветренной образующей тела. В этом случае элемент длины ds и метрические коэффициенты будут иметь вид:

$$ds^2 = d\zeta^2 + r^2 d\eta^2 + d\zeta^2; \quad g_{11} = 1; \quad g_{22} = r^2;$$

где r – местный радиус тела, отсчитываемый по нормали от оси симметрии тела.

Распределение скорости во внешнем течении вблизи критической точки будет линейным: $u_e \sim \zeta$, $\omega_e \sim \eta$. С учетом этого можно проанализировать параметры, определяющие тепловой поток, на малом расстоянии от точки торможения, определить предельные значения производных скоростей по координатам, а затем экстраполировать результаты в область точки торможения.

Тепловой поток в критической точке можно представить в виде

$$q_k = -(\rho_e \mu_e)^{1/2} \left(\frac{\partial u_e}{\partial \xi} \right)_k^{1/2} (H_e - H_w) \frac{\text{Nu}}{\text{Pr} \sqrt{\text{Re}}} \tag{6.1}$$

Здесь полагается, что скорости переноса тепла за счет диффузии и теплопроводности совпадают, то есть число Льюиса равно единице.

С учетом особенностей распределения скорости вблизи критической точки можно оценить при $\xi, \eta \rightarrow 0$ величины N_1^* , P_1^* , $\delta^{(0)}$, $d^{(0)}$, определяющие параметр теплопередачи $Nu/(\text{Pr}\sqrt{\text{Re}})$. Заметим, что для заданной системы координат согласно формулам (3.7), (3.8) $N_1^* = 1$; $P_1^* = 2$. Тогда

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{Nu}{\sqrt{\text{Re}}} = \sqrt{\delta^{(0)}} (0.468 + 0.418d^{(0)}) \quad (6.2)$$

Значения величин $\delta^{(0)}$, $d^{(0)}$ с учетом того, что в критической точке параметр $k=2H_e/u_e^2 \rightarrow \infty$ запишутся в виде:

для равновесного пограничного слоя –

$$\begin{aligned} \delta^{(0)} &= (0.799 - 0.292/l_w - (0.318/l_w + 0.099)\rho_e/\rho_w)^{-1} \\ d^{(0)} &= \left[\frac{1}{\delta^{(0)} \text{Pr}(0.304 + 0.316/l_w)} - \frac{0.097 + 0.153/l_w}{0.152 + 0.158/l_w} \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

для замороженного пограничного слоя –

$$\begin{aligned} \delta^{(0)} &= (0.164 + 0.291/l_w + (0.098 + 0.357/l_w)\rho_e/\rho_w)^{-1} \\ d^{(0)} &= \left[\frac{1}{\delta^{(0)} \text{Pr}(0.282 + 0.338/l_w)} - \frac{0.089 + 0.161/l_w}{0.141 + 0.169/l_w} \right] \end{aligned} \quad (6.4)$$

В качестве примера на основании анализа параметров [25, 26], определяющих тепловой поток в критической точке, выведем формулы для быстрой оценки теплового потока в критической точке затупленного тела, движущегося в атмосферах Земли и Марса.

В случае земной атмосферы расчеты показывают, что при гиперзвуковом обтекании при числе Прандтля $\text{Pr}=0.6-0.75$ значение параметра теплопередачи $Nu/(\text{Pr}\sqrt{\text{Re}})$ для равновесного пограничного слоя в критической точке сферы с точностью до 15% равно единице.

Таким образом, формула для теплового потока в точке торможения потока имеет вид

$$q_k \approx -(\rho_e \mu_e)^{1/2} (\partial u_e / \partial \xi)_k^{1/2} (H_e - H_w) \quad (6.5)$$

Сравним полученную формулу с известной корреляционной формулой Фэя-Риддела [27] для теплового потока в критической точке в случае равновесного пограничного слоя. В рассматриваемом здесь частном случае (число Льюиса равно единице и число Прандтля $\text{Pr}=0.65$) эта формула будет иметь вид

$$q_k \approx -0.99(\rho_e \mu_e)^{0.4} (\partial u_e / \partial \xi)_k^{1/2} (\rho_w \mu_w)^{0.1} (H_e - H_w) \quad (6.6)$$

С достаточной степенью точности полагаем, что $(\rho_w \mu_w)^{0.1} / (\rho_e \mu_e)^{0.1} \approx 1$, поэтому можно отметить хорошее совпадение формул (6.5) и (6.6).

Преобразуем полученную формулу (6.5) для теплового потока к виду, удобному для расчетов.

Величина $(\partial u_e / \partial \xi)_k$ может быть оценена из рассмотрения течения в окрестности критической точки и записана следующим образом [25]:

$$\left(\frac{\partial u_e}{\partial \xi} \right)_k = \frac{V_\infty}{R} \left(2 \frac{\gamma_* - 1}{\gamma_* + 1} \right)^{1/2} \quad (6.7)$$

где R – радиус затупления тела, γ_* – эффективный показатель адиабаты. Заметим, что величина $(\partial u_e / \partial \xi)_k \sim 1/R$, поэтому аэродинамический нагрев в окрестности точки торможения $q_0 \sim 1/\sqrt{R}$, то есть путем увеличения радиуса затупления тела, можно уменьшить величину теплового потока в окрестности точки торможения.

При приближенном моделировании течения со сложным уравнением состояния можно использовать модель совершенного газа с постоянным показателем адиабаты γ_* [22]. В случае, например, равновесного течения эффективный показатель адиабаты γ_* находится из условия $\rho_e / \rho_\infty = (\gamma_* + 1) / (\gamma_* - 1)$ и определяет сжатие в прямом скачке уплотнения.

Для практических целей обычно используют приближенные формулы зависимости коэффициента вязкости от температуры (например, степенную зависимость). Как показывают расчеты, при рассмотрении равновесно-диссоциирующих газовых смесей для оценки величины вязкости можно использовать следующее приближение (для воздуха $n=0.3$):

$$\mu \approx C_0 h^{-n} p / \rho \quad (6.8)$$

В связи с этим, полагая, что в критической точке $h_e \approx V_\infty^2 / 2$, получим

$$\mu_e \rho_e = \frac{P_e}{P_\infty} \frac{h_\infty^n}{h_e^n} \mu_\infty \rho_\infty = \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} \right)^n \left(\frac{V_\infty^2}{R_m T_\infty} \right)^{1-n} \mu_\infty \rho_\infty \quad (6.9)$$

Здесь R_m – удельная газовая постоянная, γ – показатель адиабаты для набегающего потока.

При гиперзвуковых скоростях

$$H_e - H_w \approx V_\infty^2 (1 - t_w) / 2, \quad t_w = H_w / H_e$$

В результате всех преобразований соотношение (6.5) примет вид

$$q_k = \left(\frac{\rho_\infty}{R} \right)^{1/2} V_\infty^{7/2-n} \frac{\mu_\infty^{1/2}}{(R_m T_\infty)^{(1-n)/2}} C_1 C_2 (1 - t_w), \quad C_1 = \left(\frac{\gamma_* - 1}{\gamma_* + 1} \right)^{1/4}, \quad C_2 = 2^{-3/4} \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} \right)^{n/2} \quad (6.10)$$

Величина C_1 меняется от 0.47 до 0.64 при изменении эффективного показателя адиабаты γ_* от 1.1 до 1.4. Учитывая свойства реального воздуха [23], с достаточной степенью точности можно считать, что при равновесном обтекании можно положить $\gamma_* = 1.2$.

Принимая в (6.8) $n = 0.3$, для теплового потока в критической точке имеем

$$q_k = 0.44 \left(\frac{\rho_\infty}{R} \right)^{1/2} V_\infty^{3.2} \frac{\mu_\infty^{1/2}}{(R_m T_\infty)^{0.35}} (1 - t_w), \quad \text{Вт/м}^2 \quad (6.11)$$

Все размерные величины в полученной формуле выражены в системе СИ (R – в м, ρ_∞ – в кг/м³, V_∞ – в м/с, μ_∞ – в Н·с/м², T_∞ – в град, К, R_m – в Дж/(кг·град)).

В случае атмосферы Земли, выражая R – в м, ρ_∞ – в кг/м³, V_∞ – в м/с, получим

$$q_k \approx 3.3 \cdot 10^{-5} \left(\frac{\rho_\infty}{R} \right)^{1/2} V_\infty^{3.2} (1 - t_w), \quad \text{Вт/м}^2 \quad (6.12)$$

Для атмосферы Марса сделаны аналогичные вычисления. С помощью полученных формул проведены расчеты, определяющие параметр теплопередачи $Nu / (\text{Pr} \sqrt{\text{Re}})$. Получено, что для характерных скоростей движения космических аппаратов в атмосфере Марса в случаях химически равновесного и замороженного пограничных слоев при числе

Прандтля $\text{Pr}=0.7$ позволяют принять значение параметра теплопередачи $\text{Nu}/(\text{Pr}\sqrt{\text{Re}})=1.15$ с точностью до 15%.

С учетом параметров марсианской атмосферы формула для теплового потока в критической точке для атмосферы Марса запишется в виде:

$$q_k \approx 4.0 \cdot 10^{-5} \left(\frac{\rho_\infty}{R} \right)^{1/2} V_\infty^{3.2} (1 - t_w), \text{ Вт/м}^2 \quad (R - \text{в м, } \rho_\infty - \text{в кг/м}^3, V_\infty - \text{в м/с}) \quad (6.13)$$

Результаты расчета по полученным формулам (6.12) – (6.13) сравнивались с расчетами других авторов. В таблице 1 приводятся величины теплового потока в критической точке сферы радиуса $R = 1\text{ м}$ для разных значений высот H и скоростей полета V_∞ в атмосфере Земли в случае «холодной» поверхности ($t_w=0$). В этой таблице представлены данные, рассчитанные по полученной формуле (6.12) и данные, рассчитанные с помощью корреляций, представленных в работах [28–30]. Расхождение соответствующих величин в таблице 1 не превышает 15%.

Таблица 1

Сравнение данных по тепловому потоку

H , км	V , км/с	q_k , Вт/см ²			
		Формула (6.12)	[28]	[29]	[30]
20	3	130	140	140	150
30	4	150	150	160	160
40	5	150	140	150	150
50	6	130	120	140	140
60	6	75	70	80	80

На фиг.4.6 проводится сравнение величин теплового потока в критической точке аппарата MARS EXPRESS, рассчитанных с помощью формулы (6.13) и зависимости, представленной в [28]. Согласие данных вполне удовлетворительное.

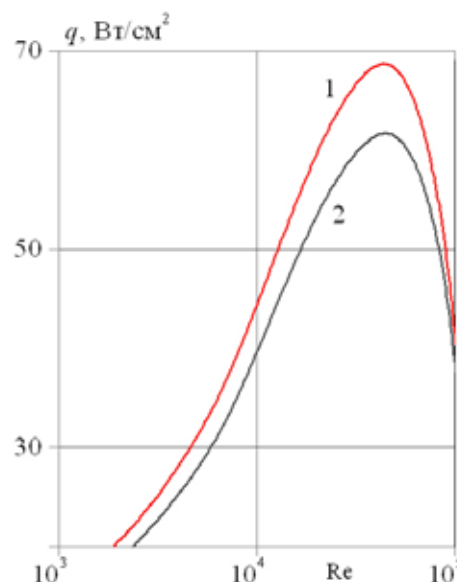


Рис.5. Тепловой поток в критической точке в зависимости от числа Рейнольдса для MARS EXPRESS. 1– формула (6.13); 2– корреляция [28]

В таблице 4.2 сравниваются величины теплового потока в критической точке сферы радиуса $R = 1$ м для разных параметров траектории в атмосфере Марса при температуре поверхности тела $T_w = 1500^\circ\text{K}$, рассчитанные по формуле (4.68) и соответствующие данные численного расчета, полученные для аппарата MSRO [35]. Поверхность считалась идеально каталитической.

Таблица 2.

Сравнение данных по тепловому потоку

V_∞ , м/с	ρ_∞ , кг/м ³	q , Вт/см ² формула (6.13)	q , Вт/см ² численный расчет [24]
5687	$3.14 \cdot 10^{-5}$	21.6	24.4
5223	$2.913 \cdot 10^{-4}$	48.3	51.5
3998	$3.067 \cdot 10^{-4}$	19.2	22.3

Следует отметить, что данные, рассчитанные с помощью приближенной формулы (6.13), полученной для равновесного пограничного слоя, удовлетворительно (~15%) согласуются с данными численного расчета, проведенными для неравновесного обтекания. В связи с этим целесообразно проанализировать влияние химических реакций и состояния газовой среды на теплопередачу к поверхности тела.

Рассмотрим решение в критической точке, полученное с помощью метода последовательных приближений, поскольку качественные свойства этого решения являются основой для понимания влияния химических реакций на теплопередачу. Представим выражение для определения теплового потока в критической точке в виде произведения четырех параметров $q_w = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$:

$$q_w = - \underbrace{(\rho_e \mu_e)^{1/2}}_{\alpha_1} \underbrace{\left(\frac{\partial u_e}{\partial \xi} \right)^{1/2}}_{\alpha_2} \underbrace{\frac{\text{Nu}}{\text{Pr} \sqrt{\text{Re}}}}_{\alpha_3} \underbrace{(H_e - H_w)}_{\alpha_4}, \quad (6.14)$$

Первый множитель $\alpha_1 = (\rho_e \mu_e)^{1/2}$ зависит от переносных свойств газа, и определяется значениями плотности и температуры на внешней границе пограничного слоя. Вторым важным параметром для оценки максимального теплового потока является параметр $\alpha_2 = (\partial u_e / \partial \xi)^{1/2}$, характеризующий изменение поперечной к оси составляющей скорости в критической точке. Как было показано, значение этого параметра определяется давлением и коэффициентом сжатия газа в ударном слое, который зависит от степени неравновесности течения.

Третий множитель в формуле для теплового потока в критической точке α_3 , как было получено ранее, равен

$$\frac{1}{\text{Pr} \sqrt{\text{Re}}} = \sqrt{\delta^{(0)}} P_1^* (0.468 + 0.418 d^{(0)}) \quad (6.15)$$

Параметр $\text{Nu} / (\text{Pr} \sqrt{\text{Re}})$ определяется величинами $\delta^{(0)}$, $d^{(0)}$, которые зависят от величин ρ_e / ρ_w , $l_w = \rho_w \mu_w / \rho_e \mu_e$ и числа Прандтля Pr . Как показывают численные расчеты, число Прандтля для газовой смеси в широком диапазоне параметров обтекания CO_2 с точностью до 10% можно принять равным $\text{Pr} \approx 0.7$.

В случае идеально-каталитической поверхности влияние химических реакций на параметр α_4 – энтальпийный потенциал $(H_e - H_w)$ – не сказывается, на поверхности в этом случае выполняются условия химического равновесия.

Для анализа параметров теплопередачи рассматривалось движение аппарата MARS-EXPRESS ($R=0.38\text{м}$) в атмосфере Марса на высотах $H < 60\text{км}$. С учетом полученных формул определялись параметры теплопередачи $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в точке торможения в случае химически-равновесного пограничного слоя. Для сравнения при этих же условиях обтекания рассчитывались эти же параметры в случае заморозенности всех химических реакций в ударном и пограничном слое, то есть, с использованием формул для замороженного пограничного слоя. Поверхность при этом считалась идеально каталитической. Если оценивать влияние химических реакций на тепловой поток, исходя из представленных полученных данных, то оно следующее. Химические реакции слабо влияют на параметр $\alpha_1 = (\rho_e \mu_e)^{1/2}$, отличие соответствующих данных не более 5–7%. По параметру α_2 – градиенту поперечной скорости – такое отличие может достигать 10 – 15%. Значения параметра $Nu / (\text{Pr} \sqrt{\text{Re}})$ для рассматриваемых условий обтекания могут отличаться значительно ~ до 30%, что демонстрирует рис.6.

Однако в итоге величины теплового потока в случаях химически замороженного и равновесного пограничного слоя совпадают с точностью до 10% (рис.7).

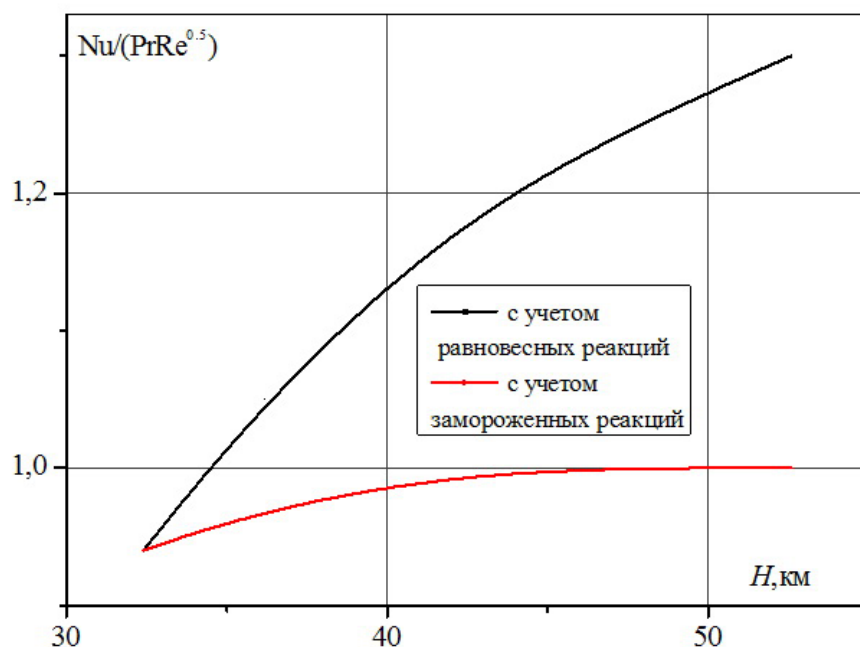


Рис.6. Параметр теплопередачи в зависимости от высоты полета аппарата MARS-EXPRESS

Таким образом, приведенные закономерности позволяют сделать важный вывод, теплообмен в точке торможения при обтекании тел углекислым газом в условиях химического равновесия слабо отличается от теплообмена в замороженном пограничном слое в случае идеально каталитической поверхности. Этот же факт отмечается и для воздуха [22, 27]. Проведенные сравнения результатов расчета по полученным формулам с данными численных расчетов и других аппроксимаций свидетельствуют о том, что представлены приемлемые формулы для оценки конвективных тепловых потоков в критической точке затупленных тел, движущихся с гиперзвуковой скоростью в атмосферах Земли и Марса.

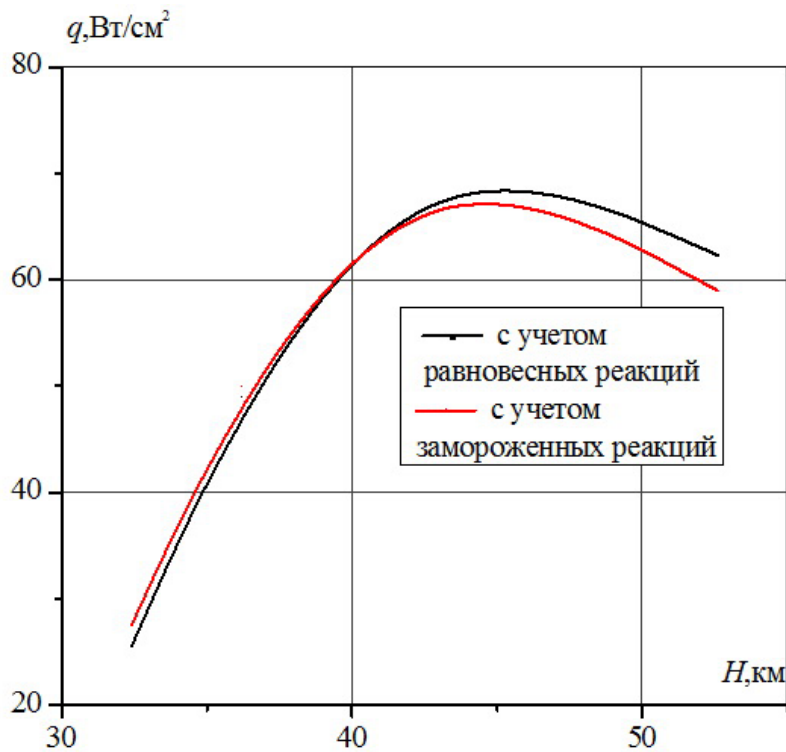


Рис.7. Тепловой поток в критической точке в зависимости от высоты полета аппарата MARS-EXPRESS

7. Распределение относительного теплового потока по поверхности тела

На практике приходится определять тепловые потоки к поверхности тел различной формы, оптимизировать форму летательных аппаратов с точки зрения аэродинамического нагрева, поэтому необходимо знать распределение теплового потока по поверхности.

Рассмотрим величину теплового потока на боковой поверхности затупленного тела, имеющей угол θ с набегающим потоком в случае равновесного обтекания.

Согласно представленным формулам, относительный тепловой поток при постоянстве энтальпийного потенциала запишется как

$$q_w/q_k = \frac{(\mu_e \rho_e)^{0.5} (u_e/\xi)^{0.5} (Nu/\sqrt{Re})}{(\mu_k \rho_k)^{0.5} (\partial u_e/\partial \xi)_k^{0.5} (Nu/\sqrt{Re})_k} \tag{7.1}$$

где q_k – тепловой поток в критической точке.

Оценим первый множитель в (7.1):

$$d_1 = \left(\frac{\mu_e \rho_e}{\mu_k \rho_k} \right)^{0.5} = \left(\frac{p_e m_e T_k \left(\frac{T_e}{T_k} \right)^n}{T_e p_k m_k \left(\frac{T_k}{T_e} \right)} \right)^{0.5} = \left(\frac{p_e}{p_k} \right)^{0.5} \cdot \left[\frac{m_e}{m_k} \left(\frac{T_k}{T_e} \right)^{1-n} \right]^{0.5} \tag{7.2}$$

Здесь используется степенная зависимость вязкости от температуры: $\mu \sim T^n$. Так как для газа показатель степени n близок к 1, то с достаточной степенью точности можно считать второй множитель в (4.72) равным 1. Тогда, используя простейшее приближение для оценки давления – закон Ньютона, имеем

$$d_1 \approx \left(\frac{p_e}{p_k} \right)^{0.5} \approx \sin \theta \quad (7.3)$$

Градиент скорости в критической точке для сферы радиуса R в случае гиперзвукового обтекания можно оценить с помощью формулы

$$d_2 = \left(\frac{\partial u_e}{\partial \xi} \right)_k = \frac{V_\infty}{R} (2k)^{0.5}, \quad k = \frac{\rho_\infty}{\rho_e} \quad (7.4)$$

Для нахождения скорости около определенной точки поверхности используется закон сохранения полной энтальпии

$$\frac{u_e^2}{2} + i_e \approx \frac{V_\infty^2}{2},$$

то есть

$$\begin{aligned} u_e &= V_\infty \left(1 - \frac{2i_e}{V_\infty^2} \right)^{0.5} \approx V_\infty \left(1 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_e}{\rho_e V_\infty^2} \right)^{0.5} \approx V_\infty \left(1 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_k \sin^2 \theta}{\rho_k (\sin \theta)^{2/\gamma} V_\infty^2} \right)^{0.5} \approx \\ &\approx V_\infty \left(1 - \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left(1 - \frac{k}{2} \right) (\sin \theta)^{2-2/\gamma} \right)^{0.5} \approx V_\infty \left[1 - \left(1 + \frac{k}{2} - \frac{k^2}{2} \right) (\sin \theta)^{4k/(k+1)} \right]^{0.5} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Здесь используется соотношение условие адиабатичности вдоль линии тока

$$p_k/p_e = (\rho_k/\rho_e)^\gamma$$

и приближение, определяющее давление в критической точке в зависимости от параметров набегающего потока и сжимаемости [31]:

$$p_k = \rho_\infty V_\infty^2 (1 - k/2)$$

С учетом выражений (7.2)–(7.5) величина относительного теплового потока запишется в виде:

$$q_w/q_k = \sin \theta_k \frac{(1 - a \sin^b \theta)^{0.25}}{(2k)^{0.25} (\xi/R)^{0.5}} \frac{\text{Nu}/\sqrt{\text{Re}}}{(\text{Nu}/\sqrt{\text{Re}})_k}, \quad a = 1 + k/2 - k^2/2, \quad b = 4k/(k+1) \quad (7.6)$$

Здесь ξ – координата, отсчитываемая от критической точки вдоль поверхности.

Относительный параметр теплопередачи $\text{Nu}/\sqrt{\text{Re}}/(\text{Nu}/\sqrt{\text{Re}})_k$ определяется геометрией тела и параметрами внешнего течения и может быть определен с помощью полученных формул, определяющих параметр теплопередачи в критической точке.

В случае обтекания сферы равновесно диссоциированным потоком воздуха при отсутствии излучения имеется простое аппроксимационное выражение [5] для относительного потока к поверхности:

$$q_w/q_k \approx 0.55 + 0.45 \cdot \cos 2\beta \quad (7.7)$$

где β – полярный угол меридионального сечения, отсчитываемого от направления на критическую точку. Согласно (7.7) величина относительного теплового потока q_w/q_k для гиперзвукового обтекания не зависит от определяющих параметров в пограничном слое, а определяется только угловой координатой.

На рис.8 собраны данные численного расчета [24] по распределению теплопередачи для сферических затуплений космических аппаратов MSRO ($R=1\text{м}$) и MARS-EXPRESS ($R=0.38\text{м}$) в широком диапазоне параметров обтекания, включая химически замороженные, равновесные и неравновесные режимы течения в пограничном слое в случае идеально-каталитической поверхности.

Параметры обтекания аппаратов представлены в таблицах 3 и 4.

Видно, что все кривые на рис.8, полученные в результате численных расчетов, практически совпадают, и хорошо аппроксимируются зависимостью (7.7) (пунктирная кривая). Имеется небольшое расхождение до 5–7% в области сопряжения сферы с конусом.

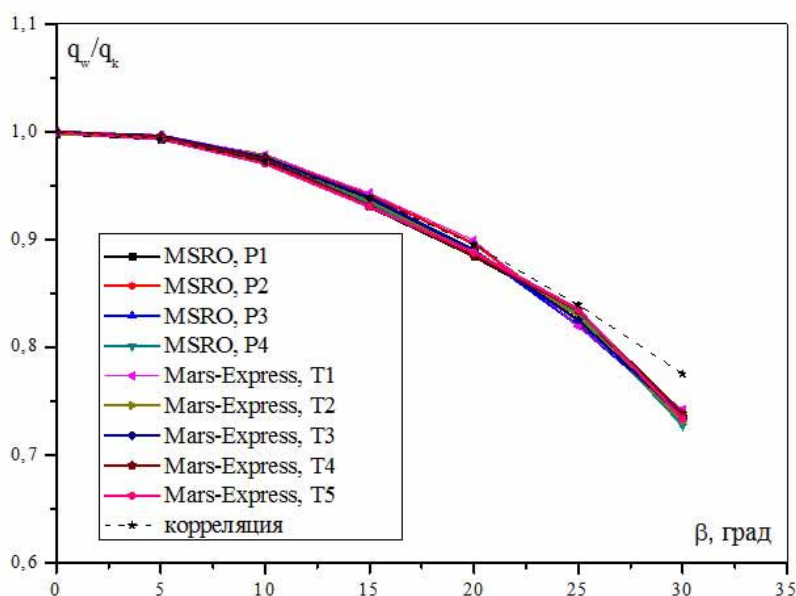


Рис.8. Относительный тепловой поток к поверхности сферического затупления аппаратов MSRO и MARS-EXPRESS, корреляция – расчет по формуле (7.7)

Таблица 3

Параметры обтекания аппарата MARS-EXPRESS

Точка траектории	$H, \text{км}$	$V_{\infty}, \text{м/с}$	$\rho_{\infty}, \text{кг/м}^3$
T5	60,31	6092	$2.73 \cdot 10^{-5}$
T4	52.59	5923	$7.61 \cdot 10^{-5}$
T3	43.01	5292	$2.51 \cdot 10^{-4}$
T2	36.16	4259	$5.58 \cdot 10^{-4}$
T1	32.42	3433	$8.45 \cdot 10^{-4}$

Таблица 4

Параметры обтекания аппарата MSRO

Точка траектории	$H, \text{км}$	$V_{\infty}, \text{м/с}$	$\rho_{\infty}, \text{кг/м}^3$
P1	59	5687	$3.14 \cdot 10^{-5}$
P2	42	5223	$2.913 \cdot 10^{-4}$
P3	42	3998	$3.067 \cdot 10^{-4}$
P4	60	3536	$2.819 \cdot 10^{-5}$

Из приведенных данных можно сделать важный вывод, что при гиперзвуковом обтекании рассматриваемых тел состояние газовой смеси в пограничном слое практически не влияет на распределение относительного теплового потока на поверхности сферы.

Необходимо заметить, что максимальный тепловой поток наблюдается у сферы в точке торможения лишь в случае ламинарного пограничного слоя. Если происходит переход к турбулентному режиму течения в пристеночном слое, то максимальный тепловой поток будет в точке, в которой звуковая линия касается поверхности тела. Это связано с максимумом параметра ($\rho_e u_e$) при числе $M=1$.

С учетом полученной формулы (7.6) оценивался тепловой поток к конической поверхности ($\theta_k=60^\circ$) космических аппаратов MSRO и MARS-EXPRESS в случае равновесного обтекания (при оценке полагалось, что эффективный показатель адиабаты $\gamma=1.2$). На рис.9 эти оценки представлены в виде пунктирной кривой. На этом же рисунке приводятся данные численного расчета [24] относительных тепловых потоков к поверхности аппаратов для разных параметров обтекания (см. таблицы 3–4).

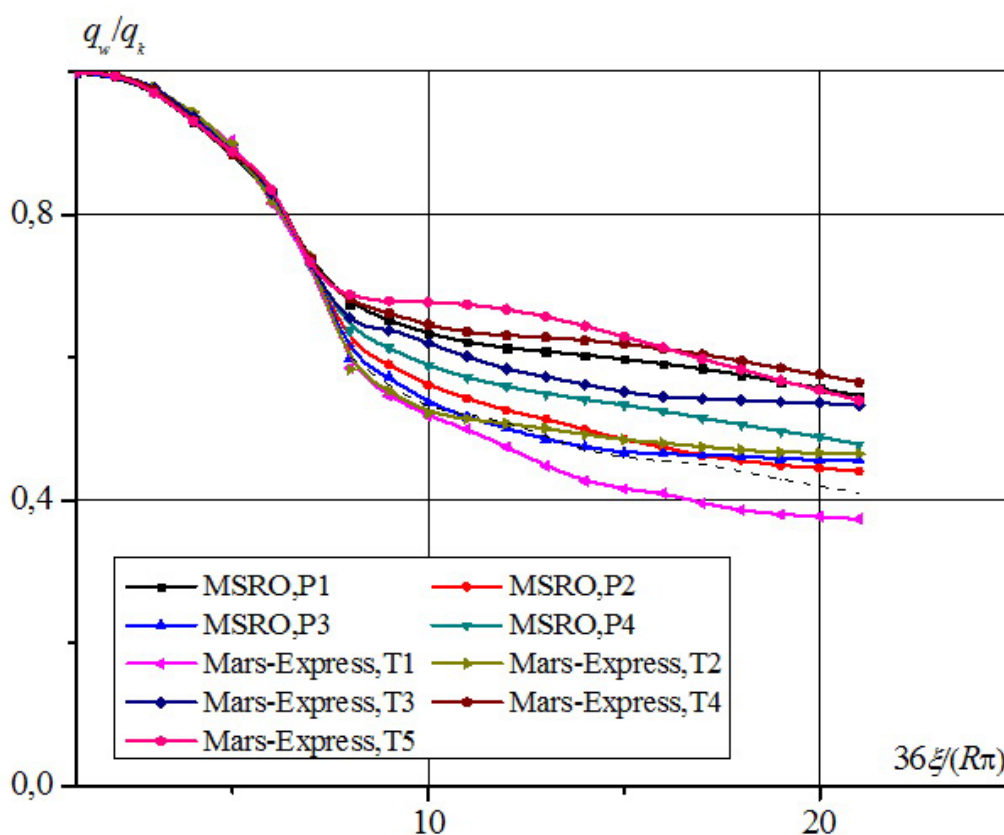


Рис.9. Относительный тепловой поток к поверхности космических аппаратов MSRO и MARS-EXPRESS, - - - - расчет по формуле (7.6)

Видно, что разброс данных, относящихся к различным режимам обтекания на конической поверхности, в отличие от сферы, существенный, до 30%. Пунктирная кривая достаточно хорошо аппроксимирует данные численного расчета, соответствующие конической части поверхности аппарата, для вариантов обтекания, приближенных к равновесным режимам.

Как показывают численные расчеты, показатель адиабаты γ в случае неравновесного обтекания меняется существенно в ударном и пограничном слое, о чем свидетельствуют данные рис.10, представляющие показатель адиабаты поперек ударного слоя при гиперзвуковом обтекании аппарата MARS-EXPRESS на различных высотах. Видно, что значе-

ние этого показателя может меняться в ударном слое от 1.16 до 1.32, поэтому при оценке теплопередачи на боковой поверхности тела при неравновесном режиме течения необходимо учитывать, что точность моделирования течения с постоянным показателем адиабаты ухудшается.

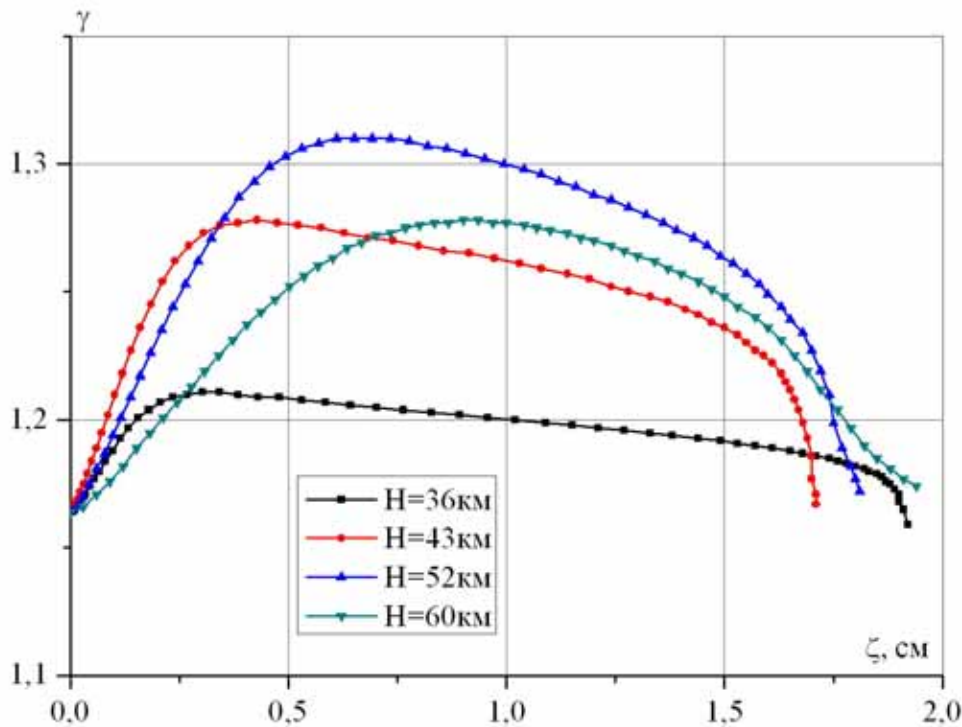
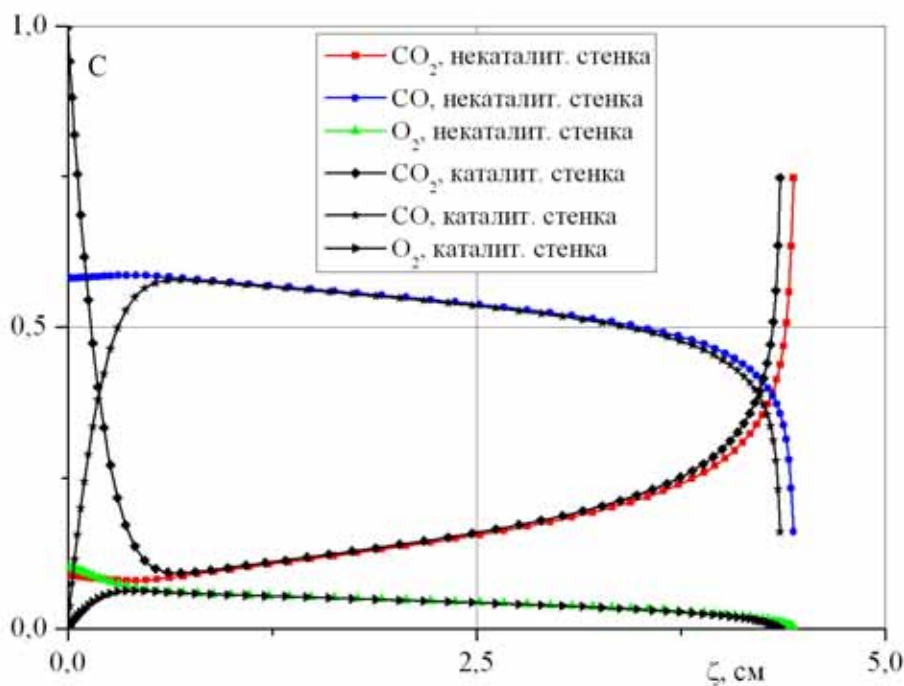


Рис.10. Распределение показателя адиабаты поперек ударного слоя (критическая линия), аппарат MARS-EXPRESS.

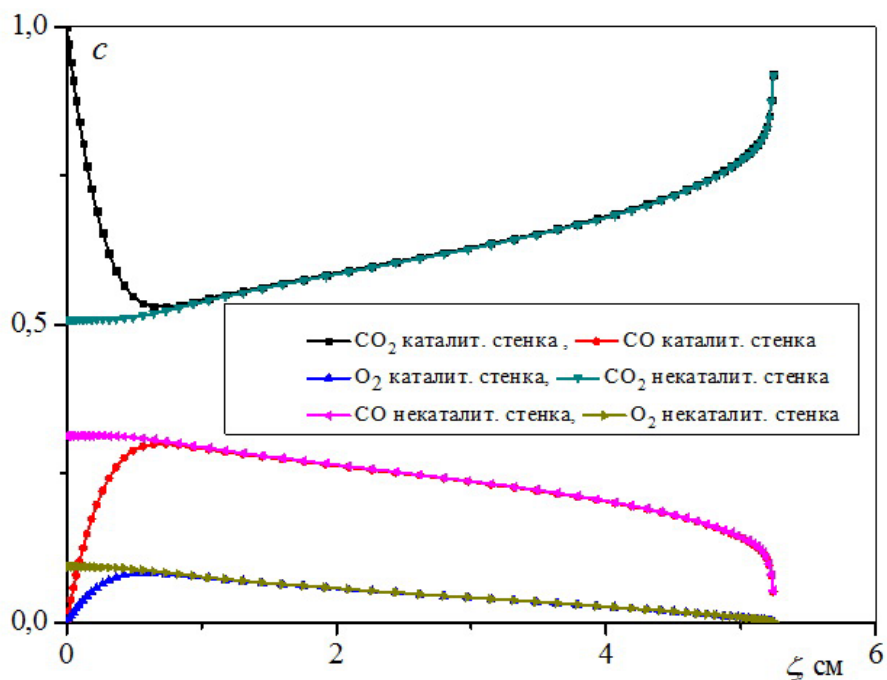
8. Влияние на теплопередачу реакций рекомбинаций на поверхности

Одним из основных факторов, влияющих на теплопередачу к поверхности аппарата в атмосфере Марса, является гетерогенная рекомбинация компонент CO_2 , зависящая от каталитических свойств поверхности. Сравним соответствующие параметры газовой смеси для идеально каталитической и некаталитической поверхности. На рис.11 представлены распределения концентраций отдельных компонент газовой смеси на линии торможения при обтекании углекислым газом аппарата MSRO в случаях идеально каталитической и некаталитической поверхности. Эти данные получены с помощью численного метода [24] для условий обтекания, соответствующих неравновесному режиму с параметрами $V=5223$ м/с, $\rho=2.93 \cdot 10^{-4}$ кг/м³ и $V=3998$ м/с, $\rho=3.067 \cdot 10^{-4}$ кг/м³.

Сравнение данных численного расчета для двух типов поверхности показывает, что влияние каталитических свойств поверхности практически не сказывается на параметрах газовой смеси на внешней границе пограничного слоя, а, следовательно, и на параметре теплообмена в формуле (3.5): $(\rho_e \mu_e u_e / \xi)^{0.5}$.



а)



б)

Рис.11. Распределение концентраций компонент в ударном слое для каталитической и некаталитической поверхности аппарата MSRO. а) $V_{\infty}=5223\text{м/с}$, $\rho_{\infty}=2.93 \cdot 10^{-4}\text{кг/м}^3$; б) $V_{\infty}=3998\text{м/с}$, $\rho_{\infty}=3.067 \cdot 10^{-4}\text{кг/м}^3$

Установлено, что значения давления, отхода ударной волны для обоих вариантов граничных условий на поверхности практически совпадают. Также совпадают профили температуры для этих типов поверхности. Плотность, которая зависит от температуры, давления и молекулярной массы смеси, может существенно отличаться вблизи поверхно-

сти (рис.12), а в основной части ударного слоя для рассматриваемых условий совпадает для двух вариантов поверхности. Изменение плотности вблизи поверхности влияет на значение параметров ρ_e/ρ_w , $l_w = \rho_w \mu_w / \rho_e \mu_e$, определяющих величину $Nu/(Pr \sqrt{Re})$.

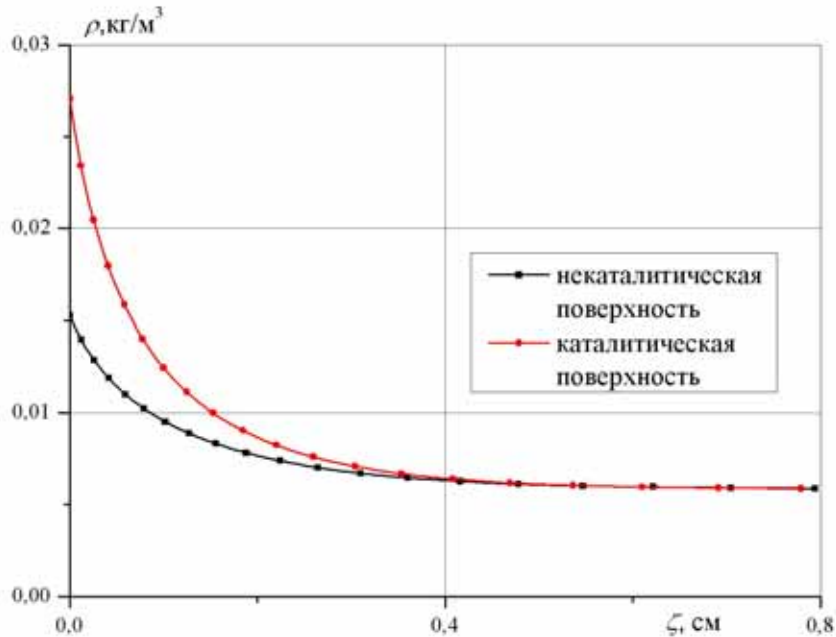


Рис.12. Распределение плотности вдоль критической линии в пограничном слое для двух типов поверхности. $V_\infty=5223\text{м/с}$, $\rho_\infty=2.93 \cdot 10^{-4}\text{кг/м}^3$.

В таблице 5 приводятся средние значения параметра $Nu/(Pr \sqrt{Re})_{\text{сред.}} = 0.5[Nu/(Pr \sqrt{Re})_{\text{равн.}} + Nu/(Pr \sqrt{Re})_{\text{зам.}}]$ в точке торможения, вычисленные по параметрам, соответствующим равновесному и замороженному приближениям для вариантов обтекания аппарата MSRO в случаях идеально-каталитической и некаталитической поверхности.

Таблица 5

Влияние каталитичности поверхности на параметр теплопередачи

Точка траектории	$Nu/(Pr \sqrt{Re})_{\text{сред.}}$	$Nu/(Pr \sqrt{Re})_{\text{сред.}}$
	идеально-каталитич. стенка	некаталитич. стенка
P1	1.15	0.92
P2	1.1	0.905
P3	1.0	0.89
P4	1.09	0.9

Данные таблицы показывают, что изменение состава газовой смеси вблизи поверхности, вызванное различными ее каталитическими свойствами, может уменьшить значения параметра теплопередачи $Nu/(Pr \sqrt{Re}) \sim$ на 20%.

Но основное влияние на тепловой поток реакций, проходящих на поверхности, будет проявляться через энтальпийный потенциал газовой смеси ($H_e - H_w$), зависящей от состава газовой смеси на поверхности тела и, следовательно, от энтальпии газа у стенки $H_w = \sum_i c_{iw} h_{iw}$. Применительно к задачам аэродинамического нагрева тел, движущихся в атмосфере с большими скоростями, физическая суть проблемы каталитичности состоит в

следующем. Молекулы газа в ударном слое диссоциируют на атомы и молекулы, на что затрачивается значительная доля энергии потока. На достаточно больших высотах (при низкой плотности) продукты диссоциации в тонком пограничном слое не успевают рекомбинировать и достигают поверхности. В случае, если поверхность каталитическая, то есть способствует рекомбинации атомов в молекулы, то энергия, затраченная на диссоциацию, выделяется и передается поверхности, то есть идет на нагрев тела. Если на поверхности рекомбинации не происходит, то продукты диссоциации уносят с собой энергию диссоциации, и дополнительного нагрева тела не происходит.

На рис.13 представлены распределения величины полной энтальпии газовой смеси, отнесенной к $V_\infty^2/2$ ($V_\infty=5223\text{м/с}$, $\rho_\infty=2.93\cdot 10^{-4}\text{кг/м}^3$), вдоль линии торможения для каталитической и некаталитической поверхности. Заметим, что энтальпия газовой смеси у некаталитической поверхности (при $\zeta=0$) в несколько раз превосходит соответствующую величину у идеально каталитической поверхности. Энтальпия на внешней границе пограничного слоя для двух типов поверхности одинакова – $2H_e/V_\infty^2 \approx 1$. Таким образом, энтальпийный потенциал ($H_e - H_w$) в точке торможения для идеально каталитической поверхности примерно в 4 раза превосходит соответствующую величину для некаталитической поверхности.

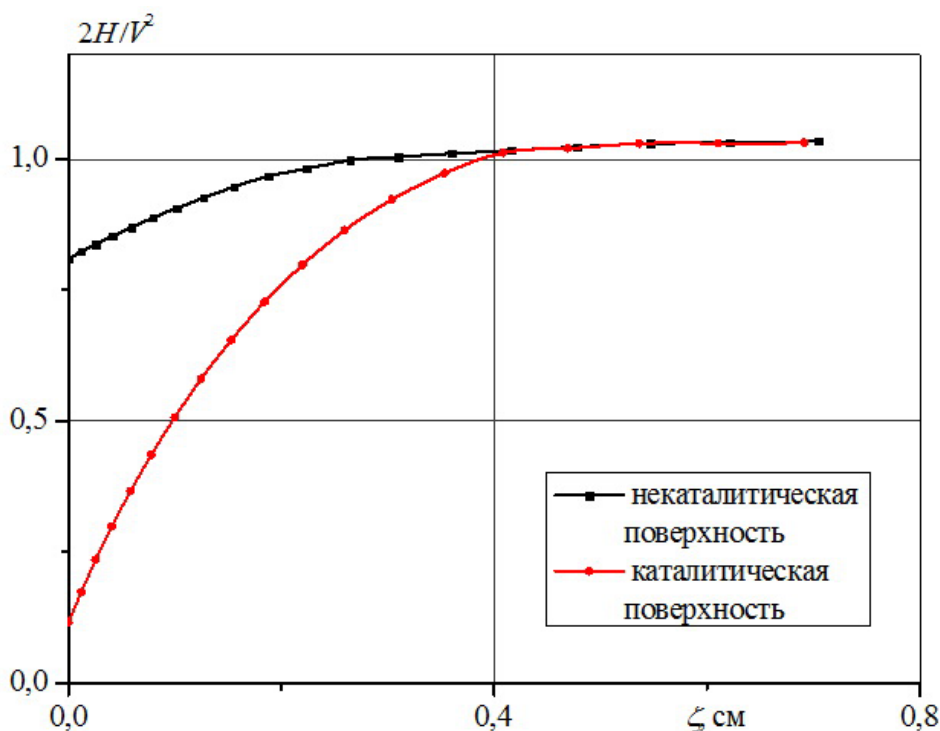


Рис.13. Распределение энтальпии вдоль критической линии в пограничном слое для двух типов поверхности. $V=5223\text{м/с}$, $\rho=2.93\cdot 10^{-4}\text{кг/м}^3$

Этот результат примерно совпадает с отношением величины теплового потока в случае идеально каталитической поверхности к соответствующей величине для некаталитической поверхности, что демонстрирует рис.14.

В результате проведенного анализа при равновесном обтекании тел оценивать теплотеплопередачу к некаталитической поверхности, например, можно следующим образом.

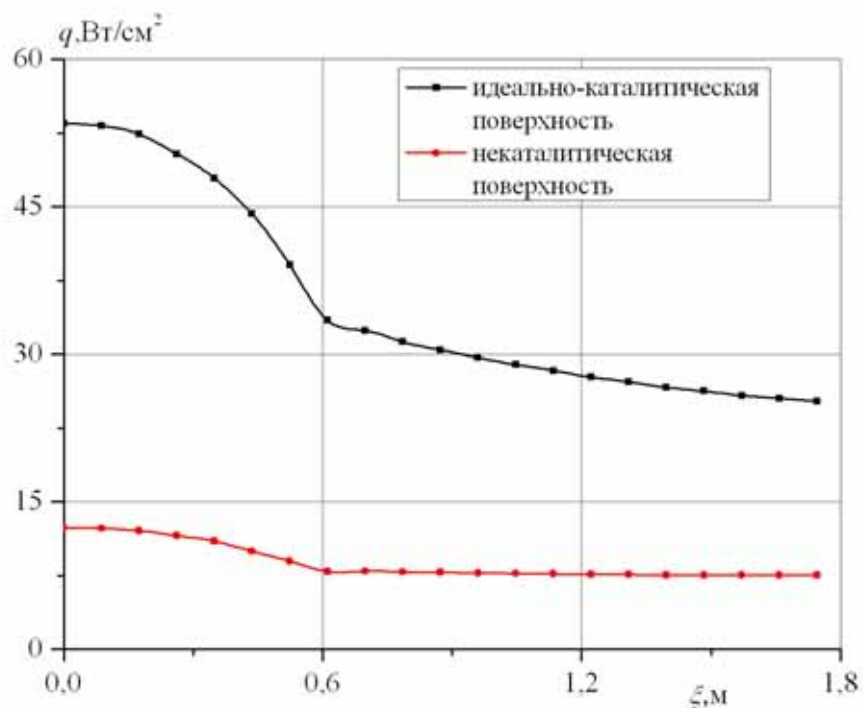


Рис.14. Тепловой поток к поверхности MSRO, $V_{\infty}=5223\text{м/с}$, $\rho_{\infty}=2.93\cdot 10^{-4}\text{кг/м}^3$

При расчете внешнего течения можно использовать данные для давления и скорости в совершенном однородном газе, полученные из решения уравнений Эйлера, используя модель совершенного газа с показателем адиабаты $\gamma=\text{const}$. Плотность, температура и состав смеси на внешней границе пограничного слоя при равновесном обтекании, также как и для идеально-каталитической поверхности, можно найти из решения системы: уравнения сохранения полной энтальпии, уравнений химического равновесия; уравнения состояния газовой смеси; уравнений сохранения баланса массы химических элементов. Анализируя данные по концентрациям компонент в случае некаталитической поверхности (см. рис. 11), можно с достаточной степенью точности принять $c_{iw}=c_{ie}$. С учетом известного состава газовой смеси вблизи поверхности определяется энтальпия

$$H_w = \sum_i c_{iw} h_{iw},$$

а также плотность газовой смеси вблизи поверхности. Далее по формулам (3.5) – (3.9) можно определить параметры трения и теплопередачи к некаталитической поверхности аппарата.

▪ Выводы

В результате проведенных исследований получены следующие результаты:

1. С помощью метода последовательных приближений получено решение системы уравнений реагирующего ламинарного пограничного слоя. Коэффициенты переноса и связанные с ним функции, характеризующие физико-химические свойства газа аппроксимируются специальными функциями.

2. В первом приближении представлены простые соотношения для определения коэффициентов поверхностного трения и теплового потока к поверхности затупленных тел в случаях химически равновесного и химически замороженного режимов течения в пограничном слое. Проведено сравнение результатов расчета теплового потока к поверхности затупленных тел, полученных с помощью метода последовательных приближений и численных методов решения. Сопоставление результатов расчета свидетельствует о том, что

получены приемлемые формулы для оценки конвективных тепловых потоков к поверхности затупленных тел, обтекаемых реагирующими газовыми смесями.

3. Проведен анализ полученных соотношений, определены параметры, влияющие на теплопередачу к поверхности летательного аппарата в атмосфере, при сверхзвуковых условиях обтекания, соответствующих различным состояниям газовой смеси и различным каталитическим свойствам поверхности аппарата. На основе проведенного анализа, а также численных расчетов, установлено, что влияние химических реакций на величину конвективного теплового потока в точке торможения незначительно (не более 15%) при условии, если поверхность тела является каталитической по отношению к реакциям рекомбинации.

4. С помощью полученных выражений и численного анализа выведены формулы для быстрой оценки конвективного теплового потока в критической точке затупленного тела, движущегося в атмосфере Земли или Марса. Проведенное сравнение результатов оценок по этим формулам с соответствующими данными других аппроксимаций, показало их хорошее совпадение.

5. Установлено, что при гиперзвуковом обтекании сферически затупленных конусов потоком углекислого газа состояние газовой смеси в пограничном слое практически не влияет на распределение относительного теплового потока (отнесенного к потоку в точке торможения) вдоль поверхности сферы. Отличие в распределении аналогичных данных на конической поверхности, относящихся к различным режимам обтекания, может быть достаточно существенным, до 30%.

6. При гиперзвуковом обтекании некаталитических поверхностей наблюдается значительное снижение теплопередачи (до 4 раз) по сравнению с соответствующим вариантом каталитической поверхности.

Литература

1. *Тирский Г.А.* Континуальные модели в задачах гиперзвукового обтекания затупленных тел разреженным газом // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 903-930.
2. *Нейланд В.Я. и др.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Наука-Физматлит. 2004. 456с.
3. *Шевелев Ю.Д.* Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М.: Наука, 1977. 224 с.
4. *Ю.Д. Шевелев.* Пространственные задачи вычислительной аэрогидродинамики. М.: Наука, 1986. 368 с.
5. *Мурзинов И.Н.* Ламинарный пограничный слой на сфере в гиперзвуковом потоке равномерно диссоциирующего воздуха // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1966. №2. С.184-188.
6. *У. Дорренс.* Гиперзвуковые течения вязкого газа. М.: МИР, 1966. 439с.
7. *Суслов О.Н.* Асимптотические исследования уравнений химически неравновесного пограничного слоя // Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений. М.: Изд-во МГУ, 1981. С.138-213.
8. *Лиз Л.* Конвективный теплообмен при наличии подвода вещества и химических реакций. – В кн. Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций. М.: Иностранная литература. 1962. С. 13-69.
9. *Лунев В.В.* Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение. 1975. 328с.
10. *Тирский Г.А., Шевелев Ю.Д.* О методе последовательных приближений для задач трехмерного пограничного слоя (локально автомодельное приближение) – ПММ, 1973, т.37, №6, 974-983.
11. *Wilke C.R.* A viscosity equation for gas mixture// J. Chem. Phys. 1950. V.18, No.4 P.517-522.
12. *Mason E.A., Saxena S.C.* Approximate formula for the conductivity of gas mixture // Phys. Fluids., 1958. V. 1, No.5, p361-369.
13. *Blottner F.G., Curties C.F., Bird R.B.* Chemically reacting viscous flow program for multicomponent gas mixtures // Report No. SC-RR-70-751, Sandia Laboratories, Albuquerque, New Mexico. Dec. 1971.

14. *Armaly B., Sutton K.* Thermal conductivity of partially ionized gas mixtures // AIAA Paper, 1982, N469, 6p.
15. *Пилюгин Н.Н., Турский Г.А.* Динамика ионизованного излучающего газа. М.: Изд-во МГУ, 1989. 312с.
16. *Wilke C.R.* Diffusional properties of multicomponent gases// J. Chem. Eng.Progr. 1950. V.46, No.2. P.95-104.
17. *Михайлов В.В.* Приближенное аналитическое представление термодинамических функций воздуха. Инженерный сб., т.2, 1961. Т.31. С. 101-107.
18. *Крайко А. Н.* Аналитическое представление термодинамических функций воздуха // Инж.ж. 1964. Т. 4 №3. С. 548-550.
19. *Синченко С. П.* Аппроксимация термодинамических свойств воздуха // Ж. Вычисл. мат. и выч. Физ. 1968. Т.8, №4. С.917-922.
20. *Михайлов В.В.* Аппроксимация энтальпии и уравнения состояния углекислого газа. Инженерный журнал, т.2, вып.2, 1962. С. 239-245.
21. *Fay J.A., Riddell F.R.* Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air// J. Aeronaut. Sci. 1958, V.25. N2. P.73-85.
22. *Стулов В.П., Мирский В.Н., Вислый А.Н.* Аэродинамика болидов. М.: Наука. Физматлит, 1995. 236с.
23. *Лебедев М.Т., Миноносцев В.Б., Теленин Г.Ф., Тиняков Т.П.* Приближенный метод учета влияния реальности газа при гиперзвуковом обтекании сегментальных тел// Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. №2. С.107-111.
24. *Шевелев Ю.Д., Сызранова Н.Г.* Влияние различных моделей химической кинетики на сверхзвуковое обтекание затупленных тел потоком углекислого газа // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2007. Том 5.
<http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2007-12-17-001.pdf>
25. *В.А. Андрущенко, Н.Г. Сызранова, Ю.Д. Шевелев.* Оценка тепловых потоков к поверхности затупленных тел при движении с гиперзвуковой скоростью в атмосфере // Прикладная математика и механика. Т.71. Вып.5. 2007. С. 827-836.
26. *Yu.D. Shevelev, N.G. Syzranova.* Estimation of Heat Transfer near a Blunt Body By Approximate Analytical Method. // Proc. 'The 6th European Symposium on Aerothermodynamics for Space Vehicles', Versailles, France, 3-6 November 2008, (ESA-659, January 2009)
27. *Fay J.A., Riddell F.R.* Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air// J. Aeronaut. Sci. 1958, V.25. N2. P.73-85.
28. *Sutton J., Graves R.A.* A general stagnation point convective heating equation for arbitrary gas mixtures// NASA TR R-376. 1972.
29. *Martin J.J.* Atmospheric Entry. An Introduction to its Science and Engineering. Old Tappan, NJ: Prentice-Hall. 1966.
30. *Авдудевский В.С., Галицкий Б.М., Глебов Г.А. и др.* Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. М.: Машиностроение, 1975. 623с.
31. *Лунев В.В.* Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 328с.

Статья поступила в редакцию 30 ноября 2009 г.